УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Геометрија И–смер

део 9: Полигони

Тијана Шукиловић

16. децембар 2020

Полигонска линија и полигон

Дефиниција 1.1

Полигонска линија $A_0 \dots A_{n-1}A_n$ је унија дужи $A_0A_1, \dots,$ $A_{n-1}A_n$ које називамо ивице полигонске линије. Тачке $A_0, \dots A_n$ називају се темена полигонске линије.

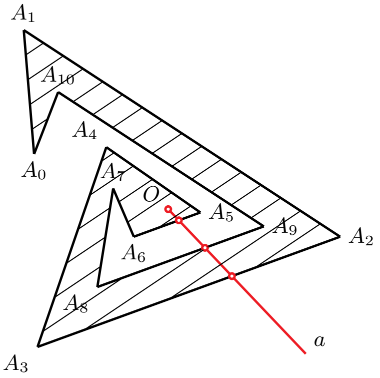
Полигонска линија и полигон

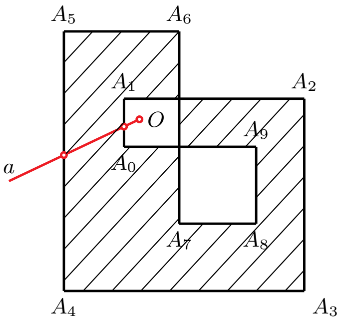
Дефиниција 1.1

Полигонска линија $A_0 \dots A_{n-1}A_n$ је унија дужи $A_0A_1, \dots,$ $A_{n-1}A_n$ које називамо ивице полигонске линије. Тачке $A_0, \dots A_n$ називају се темена полигонске линије.

- затворена полигонска линија = полигон
- суседна темена/ивице
- прост/сложен полигон
- дијагонала полигона
- унутрашња дијагонала полигона

Унутршњост полигона





Слика 1: Унутрашњост простог и сложеног полигона

Површина простог полигона

- Оријентисана површина полигона $P(A_0A_1\ldots A_{n-1})$

Површина простог полигона

- Оријентисана површина полигона $P(A_0A_1\ldots A_{n-1})$

Теорема 1.1

За прост полигон $A_0A_1\ldots A_{n-1}$ и произвољну тачку равни A важи:

$$P(A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}) = P(A, A_0, A_1) + \ldots + P(A, A_{n-1}, A_0).$$

Површина простог полигона

- Оријентисана површина полигона $P(A_0A_1\dots A_{n-1})$

Теорема 1.1

За прост полигон $A_0A_1\dots A_{n-1}$ и произвољну тачку равни A важи:

$$P(A_0, A_1, \dots, A_{n-1}) = P(A, A_0, A_1) + \dots + P(A, A_{n-1}, A_0).$$

$$\begin{aligned} P(A_0, A_1, \dots, A_{n-1}) &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(x_k y_{k+1} - x_{k+1} y_k) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} x_k (y_{k+1} - y_{k-1}) \end{aligned}$$

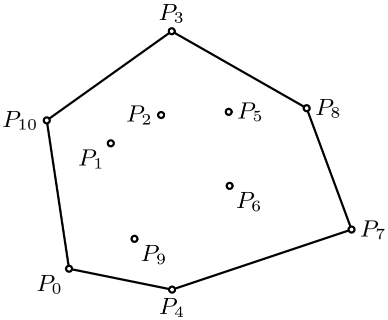
Пример

Пример 1

У равни су дате тачке $P_0 = (1, -3)$, $P_1 = (2, -2)$, $P_2 = (-1, 2)$, $P_3 = (4, -1)$, $P_4 = (0, 3)$.
Испитати да ли је полигон $P_0P_1P_2P_3P_4$ прост.
Ако није, сортирати тачке $P_0, \ldots P_4$ тако да полигон буде прост.
Израчунати површину тако добијеног простог полигона.

Конвексни омотач

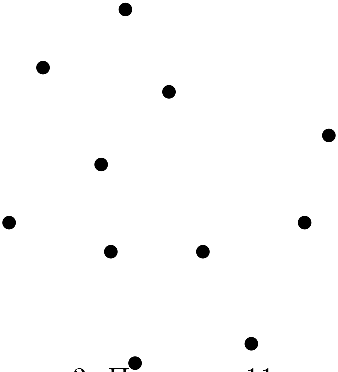
- конвексан лик
- конвексан омотач скупа тачака



Слика 2: Пример конвексног омотача скупа од 11 тачака

Алгоритам „ивичне дужи” (спори алгоритам)

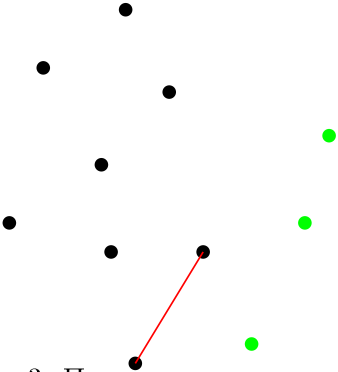
- Временска сложеност $O(n^3)$



Слика 3: Пример – 11 тачака

Алгоритам „ивичне дужи” (спори алгоритам)

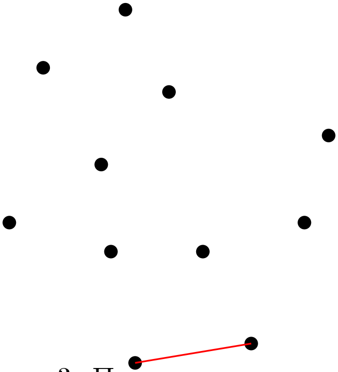
- Временска сложеност $O(n^3)$



Слика 3: Пример – унутрашња дуж

Алгоритам „ивичне дужи” (спори алгоритам)

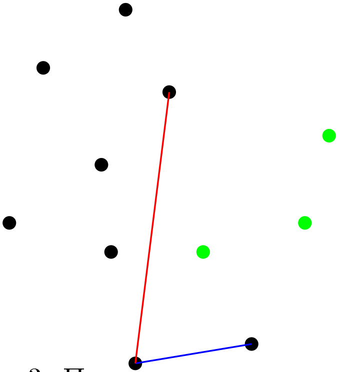
- Временска сложеност $O(n^3)$



Слика 3: Пример – ивична дуж

Алгоритам „ивичне дужи” (спори алгоритам)

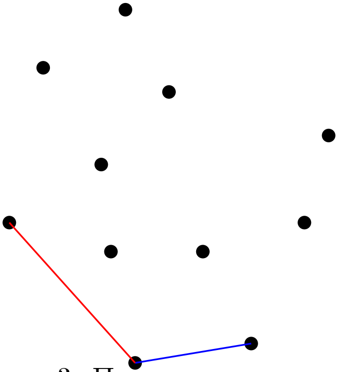
- Временска сложеност $O(n^3)$



Слика 3: Пример – унутрашња дуж

Алгоритам „ивичне дужи” (спори алгоритам)

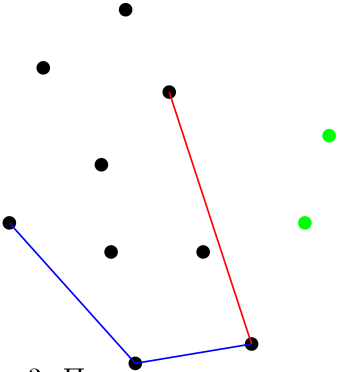
- Временска сложеност $O(n^3)$



Слика 3: Пример – ивична дуж

Алгоритам „ивичне дужи” (спори алгоритам)

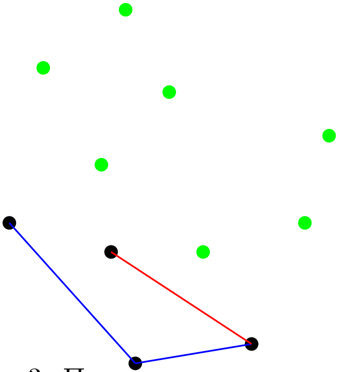
- Временска сложеност $O(n^3)$



Слика 3: Пример – унутрашња дуж

Алгоритам „ивичне дужи" (спори алгоритам)

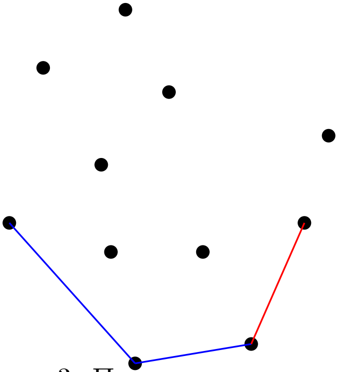
- Временска сложеност $O(n^3)$



Слика 3: Пример – унутрашња дуж

Алгоритам „ивичне дужи” (спори алгоритам)

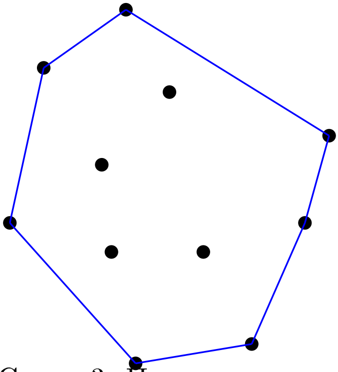
- Временска сложеност $O(n^3)$



Слика 3: Пример – ивична дуж

Алгоритам „ивичне дужи” (спори алгоритам)

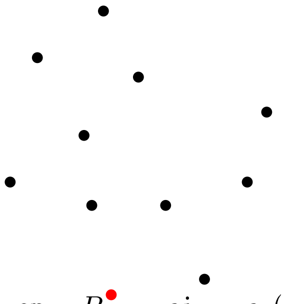
- Временска сложеност $O(n^3)$



Слика 3: Пример – омотач

Алгоритам „паковање поклона” (gift wrap)

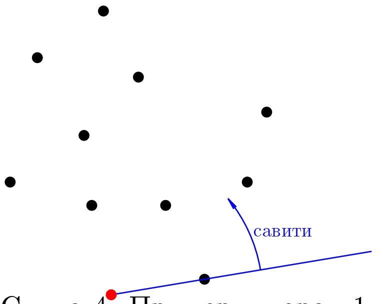
- Временска сложеност $O(n^2)$



Слика 4: Пример – P_0 = најнижа (крајња десна) тачка

Алгоритам „паковање поклона” (gift wrap)

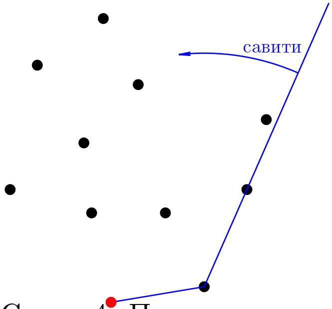
- Временска сложеност $O(n^2)$



Слика 4: Пример – корак 1

Алгоритам „паковање поклона” (gift wrap)

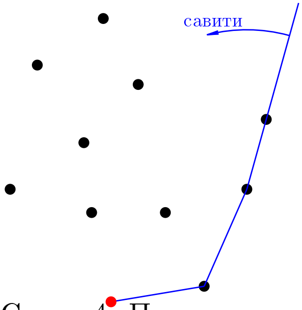
- Временска сложеност $O(n^2)$



Слика 4: Пример – корак 2

Алгоритам „паковање поклона” (gift wrap)

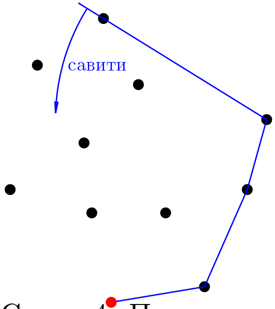
- Временска сложеност $O(n^2)$



Слика 4: Пример – корак 3

Алгоритам „паковање поклона” (gift wrap)

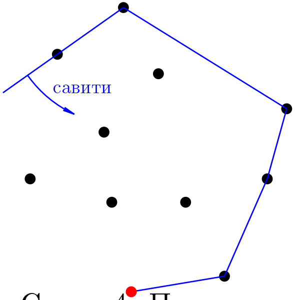
- Временска сложеност $O(n^2)$



Слика 4: Пример – корак 4

Алгоритам „паковање поклона” (gift wrap)

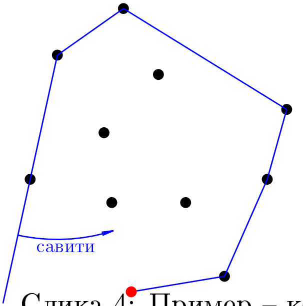
- Временска сложеност $O(n^2)$



Слика 4: Пример – корак 5

Алгоритам „паковање поклона” (gift wrap)

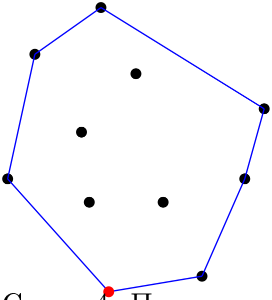
- Временска сложеност $O(n^2)$



Слика 4: Пример – корак 6

Алгоритам „паковање поклона" (gift wrap)

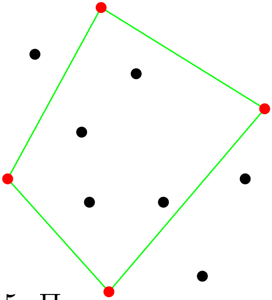
- Временска сложеност $O(n^2)$



Слика 4: Пример – омотач

„Брзи” алгоритам (quickhull)

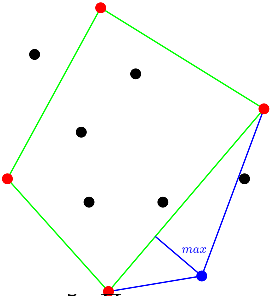
- Временска сложеност $O(n \log n)$



Слика 5: Пример – почетни четвороугао

„Брзи” алгоритам (quickhull)

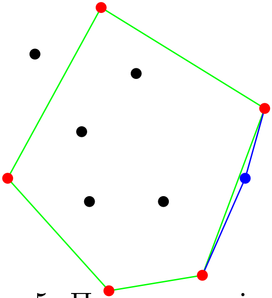
- Временска сложеност $O(n \log n)$



Слика 5: Пример – доњи десни

„Брзи” алгоритам (quickhull)

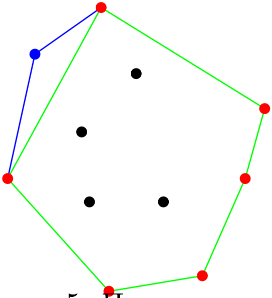
- Временска сложеност $O(n \log n)$



Слика 5: Пример – најдаља од нове

„Брзи” алгоритам (quickhull)

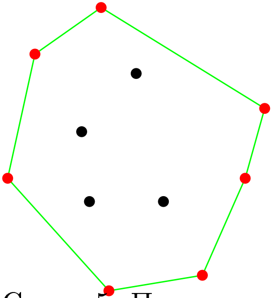
- Временска сложеност $O(n \log n)$



Слика 5: Пример – горњи леви

„Брзи” алгоритам (quickhull)

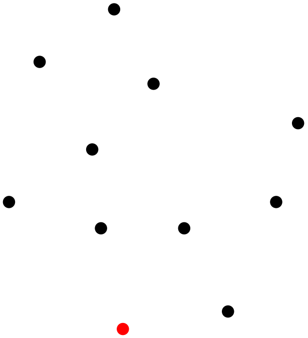
- Временска сложеност $O(n \log n)$



Слика 5: Пример – омотач

Грахамов алгоритам

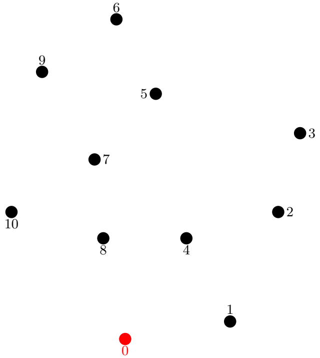
- Временска сложеност $O(n \log n)$



Слика 6: Пример – $P_0 =$ најнижа (крајња десна) тачка

Грахамов алгоритам

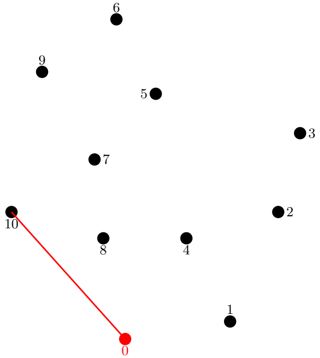
- Временска сложеност $O(n \log n)$



Слика 6: Пример – сортиране тачке (према углу)

Грахамов алгоритам

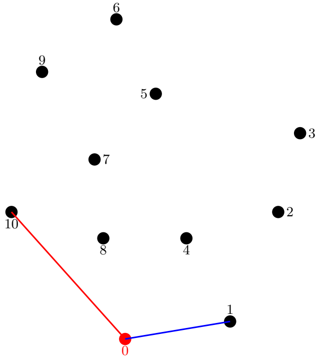
- Временска сложеност $O(n \log n)$



Слика 6: Пример – стек: [10 0]

Грахамов алгоритам

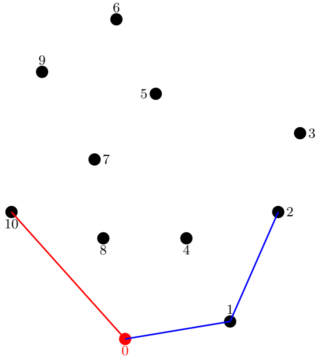
- Временска сложеност $O(n \log n)$



Слика 6: Пример – стек: [10 0 1]

Грахамов алгоритам

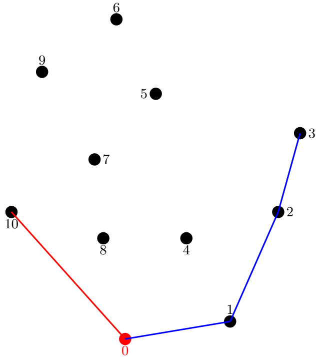
- Временска сложеност $O(n \log n)$



Слика 6: Пример – стек: [10 0 1 2]

Грахамов алгоритам

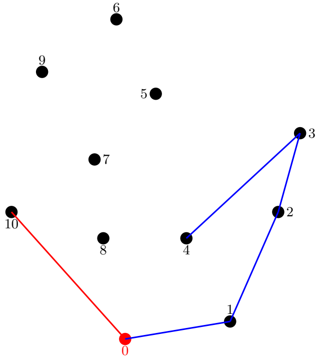
- Временска сложеност $O(n \log n)$



Слика 6: Пример – стек: [10 0 1 2 3]

Грахамов алгоритам

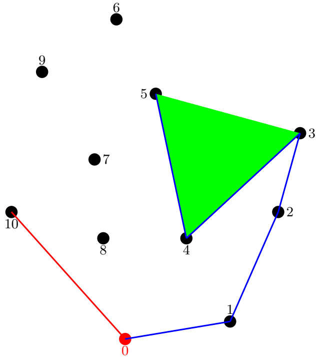
- Временска сложеност $O(n \log n)$



Слика 6: Пример – стек: [10 0 1 2 3 4]

Грахамов алгоритам

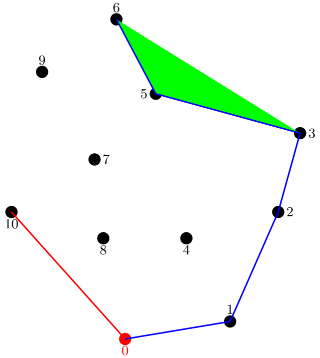
- Временска сложеност $O(n \log n)$



Слика 6: Пример – стек: $[10\ 0\ 1\ 2\ 3\ \cancel{4}\ 5]$

Грахамов алгоритам

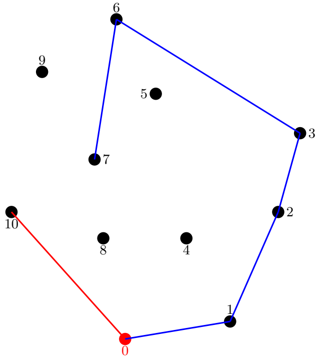
- Временска сложеност $O(n \log n)$



Слика 6: Пример – стек: [10 0 1 2 3 $\cancel{5}$ 6]

Грахамов алгоритам

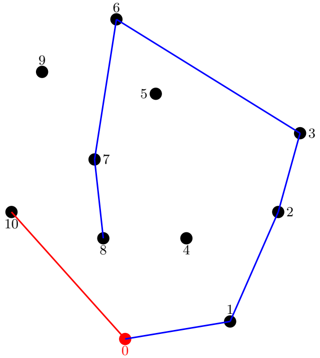
- Временска сложеност $O(n \log n)$



Слика 6: Пример – стек: [10 0 1 2 3 6 7]

Грахамов алгоритам

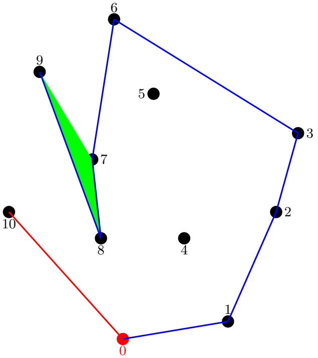
- Временска сложеност $O(n \log n)$



Слика 6: Пример – стек: [10 0 1 2 3 6 7 8]

Грахамов алгоритам

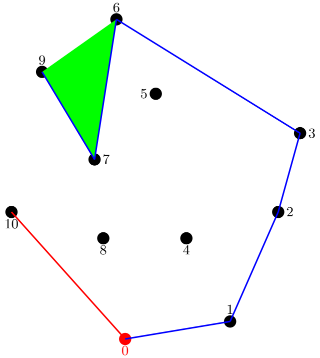
- Временска сложеност $O(n \log n)$



Слика 6: Пример – стек: [10 0 1 2 3 6 7 ~~8~~ 9]

Грахамов алгоритам

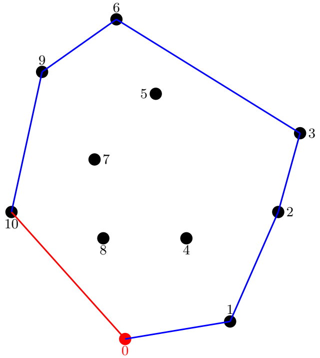
- Временска сложеност $O(n \log n)$



Слика 6: Пример – стек: [10 0 1 2 3 6 $\cancel{7}$ 9]

Грахамов алгоритам

- Временска сложеност $O(n \log n)$



Слика 6: Пример – омотач [10 0 1 2 3 6 9]

Примери

Пример 2

Одредити конвексни омотач скупа тачака $P_0 = (1,3)$, $P_1 = (-2,0)$, $P_2 = (-3,5)$, $P_3 = (4,2)$, $P_4 = (1,1)$, $P_5 = (6,4)$, $P_6 = (2,-3)$, $P_7 = (5,5)$, $P_8 = (5,-1)$.

Задатак решити:

а) Цртањем.

б) Грахамовим алгоритмом.

Триангулација полигона

- Триангулација је разлагање неког лика на троуглове.

Триангулација полигона

- Триангулација је разлагање неког лика на троуглове.
- Триангулација простог полигона је разлагање његове унутрашњости унутрашњим дијагоналама које се међусобно не секу.

Триангулација полигона

- Триангулација је разлагање неког лика на троуглове.
- Триангулација простог полигона је разлагање његове унутрашњости унутрашњим дијагоналама које се међусобно не секу.

Лема 3.1

Сваки прост полигон са више од 3 темена има унутрашњу дијагоналу.

Триангулација полигона

- Триангулација је разлагање неког лика на троуглове.
- Триангулација простог полигона је разлагање његове унутрашњости унутрашњим дијагоналама које се међусобно не секу.

Лема 3.1

Сваки прост полигон са више од 3 темена има унутрашњу дијагоналу.

Теорема 3.1

Сваки прост полигон допушта триангулацију и свака триангулација полигона са n темена се састоји од тачно $n-2$ троугла.

Примери

Пример 3

Од датих тачака у равни формирати прост полигон, а затим га триангулисати.

а) $P_0 = (0,0)$, $P_1 = (5,-1)$, $P_2 = (3,2)$, $P_3 = (6,4)$, $P_4 = (-1,3)$.

б) $P_0 = (-1,3)$, $P_1 = (2,1)$, $P_2 = (0,0)$, $P_3 = (4,-1)$, $P_4 = (5,3)$, $P_5 = (3,4)$.

Проблем уметничке галерије

Проблем: Поставити минималан број чувара који покривају читаву галерију.

Проблем уметничке галерије

Проблем: Поставити минималан број чувара који покривају читаву галерију.

Галерија = прост полигон са n ивица;
Чувари = тачке унутар полигона.

Проблем уметничке галерије

Проблем: Поставити минималан број чувара који покривају читаву галерију.

Галерија = прост полигон са n ивица;
Чувари = тачке унутар полигона.

Chvátal: Горња граница = $\frac{n}{3}$ чувара!

Проблем уметничке галерије

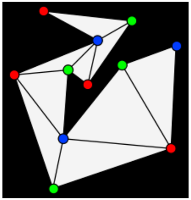
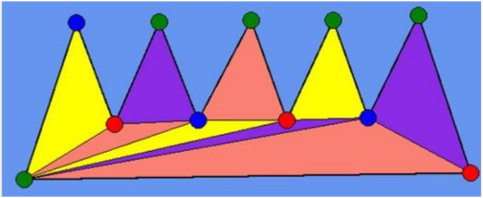
Проблем: Поставити минималан број чувара који покривају читаву галерију.

Галерија = прост полигон са n ивица;
Чувари = тачке унутар полигона.

Chvátal: Горња граница $= \dfrac{n}{3}$ чувара!
Алгоритам:

- Триангулисати полигон;
- Обојити темена подеоних троуглова (3-бојење);
- Изабрати за чуваре темена обојена истом бојом.

Проблем уметничке галерије – примери

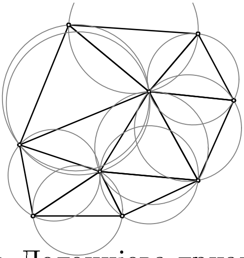



Слика: Примери: Чувари – плаве тачке

Алгоритми за триангулацију полигона

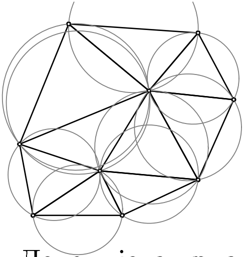
- унутрашњим дијагоналама
- „завртањем ушију"
- триангулација монотоних полигона и монотоних планина
- Делонијева триангулација
- триангулација у линеарном времену

Делонијева триангулација



Слика 8: Делонијева триангулација

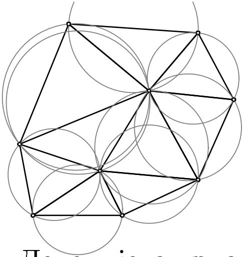
Делонијева триангулација



Слика 8: Делонијева триангулација

Делонијева триангулација минимизује максималан полупречник круга описаног око троугла триангулације.

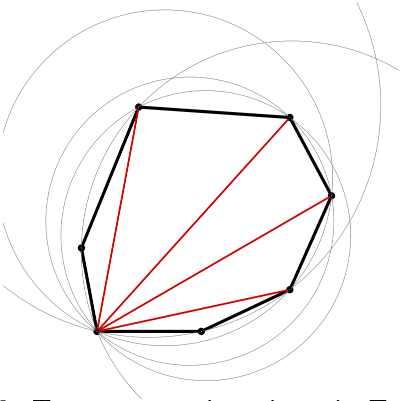
Делонијева триангулација



Слика 8: Делонијева триангулација

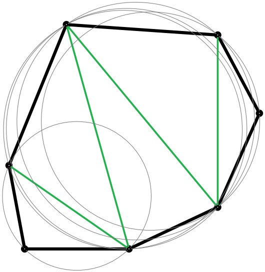
Делонијева триангулација минимизује максималан полупречник круга описаног око троугла триангулације. Поступком максимизације најмањег угла се не минимизује највећи угао, нити се минимизују дужине страница.

Делонијева триангулација - примери



Слика 9: Триангулација која није Делонијева

Делонијева триангулација - примери

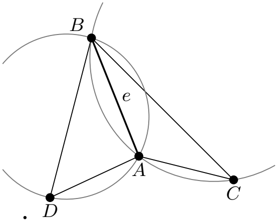


Слика 9: Делонијева триангулација

Локално Делонијеве ивице

Дефиниција 3.1

Унутрашња ивица AB је локално Делонијева ако тачка D не припада унутрашњости круга који садржи тачке A, B и C.

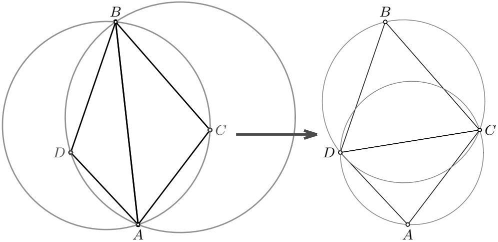


Слика 10: Делонијева ивица неконвексног четвороугла

Теорема 3.2

Ако је $\mathcal{T}$ триангулација чије су све ивице локално Делонијеве, тада је $\mathcal{T}$ Делонијева триангулација.

Обртање ивица (flip algorithm)



Слика 11: „Обртање ивице”

Теорема 3.3

Алгоритам „обртања ивица” се зауставља након $\binom{n}{2} = O(n^2)$ корака и његов резултат је Делонијева триангулација која максимизује најмањи угао на скупу свих триангулација.