УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

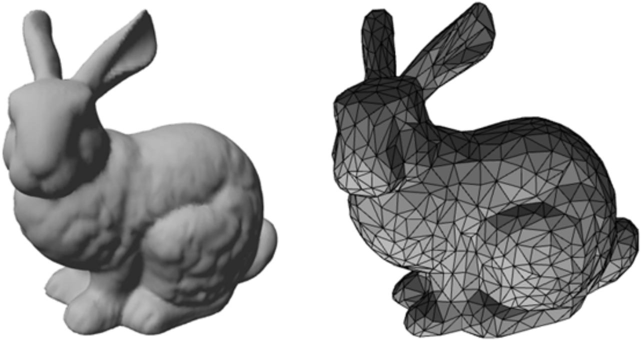
Геометрија И–смер

део 10: Полиедри

Тијана Шукиловић

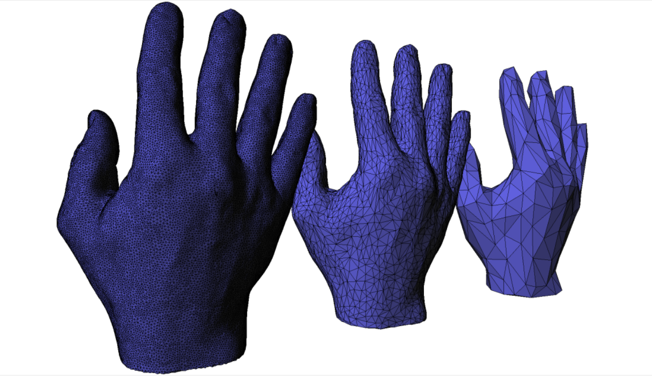
16. децембар 2020

Полиедарски модел глатке површи



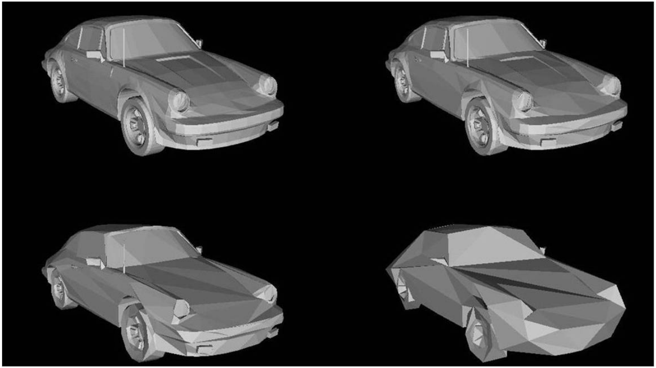
Слика: "Stanford bunny"

Полиедарски модели и триангулација



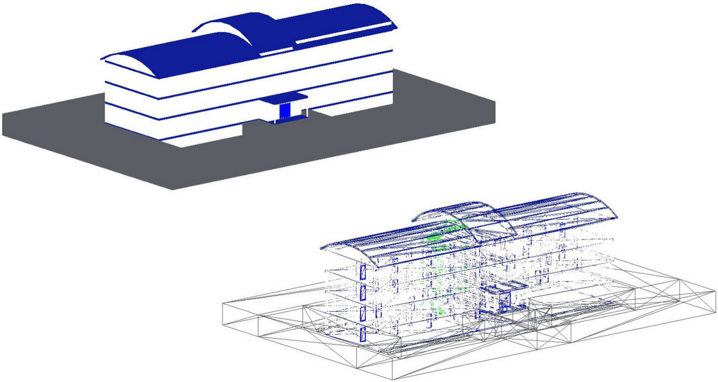
Слика: Модел шаке

Полиедарски модели и триангулација



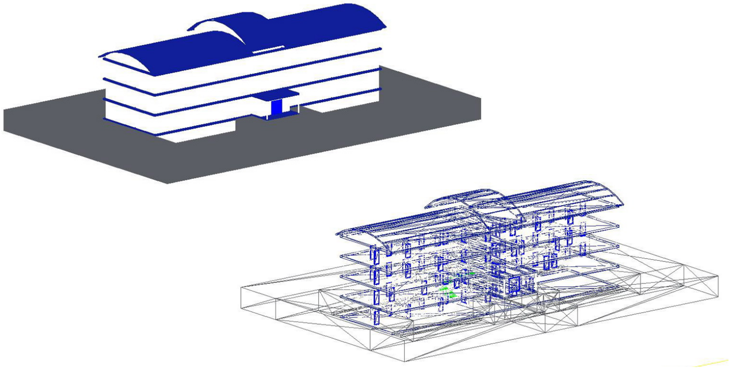
Слика: Модел аутомобила Porsche – редукција полигона (100%, 50%, 20%, 5% оригиналних полигона)

Пример редукције троуглова



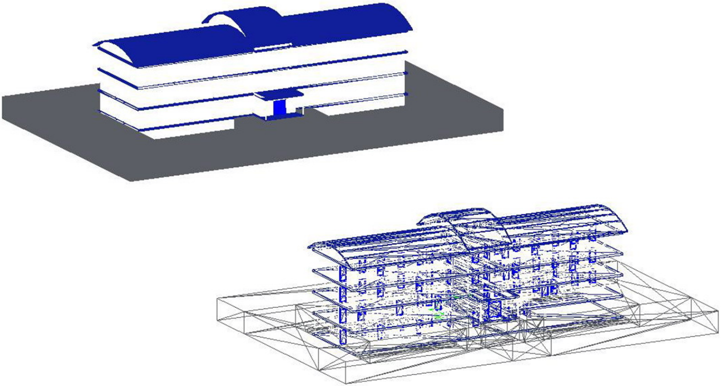
Слика: Модел зграде - оригинални модел (~ 30 хиљада троуглова)

Пример редукције троуглова



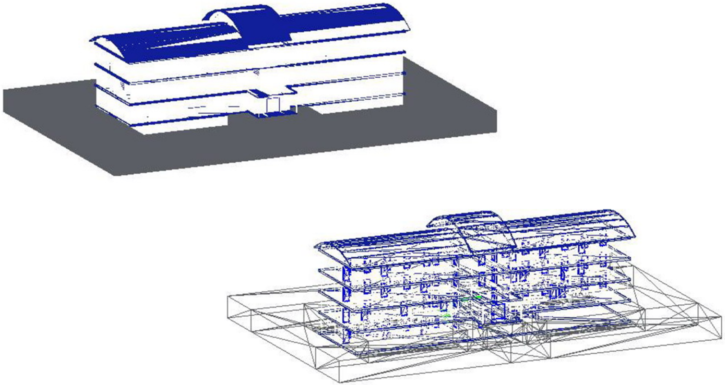
Слика: Модел зграде - 50% редукције ($\sim$ 10 хиљада троуглова)

Пример редукције троуглова



Слика: Модел зграде - 80% редукције ($\sim$ 8 хиљада троуглова)

Пример редукције троуглова



Слика: Модел зграде - 96% редукције ($\sim$ 7 хиљада троуглова)

Примене полиедарских модела у анимацији

Слика: Yoda – модел пре и после рендеровања[1]

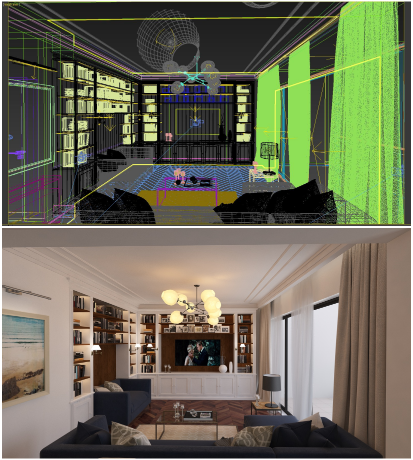
[1] Преузето се сајта: techterms.com

Примене полиедарских модела у архитектури

Слика: MVRDV / 2004, Serpentine Gallery Pavillion[2]

[2] Слика је преузете из презентације доц Радомира Којића, одржане 8.12.2017.

Примене полиедарских модела у ентеријеру



Слика: Примери ентеријера пре и после рендера[3]

[3] Copyright: Tašana Šukilović

Примене полиедарских модела у ентеријеру

Слика: Примери ентеријера пре и после рендера[4]

Полиедарска површ

Дефиниција 1.1

Полиедарска површ $\mathcal{M}$ је објекат простора који је унија коначно много пљосни:

1. Пљосни су конвексни полигони;
2. Свака ивица припада највише двема пљоснима (унутрашње и рубне ивице);
3. Пресек две пљосни може бити само ивица.

Полиедарска површ

Дефиниција 1.1

Полиедарска површ $\mathcal{M}$ је објекат простора који је унија коначно много пљосни:

1. Пљосни су конвексни полигони;
2. Свака ивица припада највише двема пљоснима (унутрашње и рубне ивице);
3. Пресек две пљосни може бити само ивица.

- апстрактна полиедарска површ

Полиедарска површ

Дефиниција 1.1

Полиедарска површ $\mathcal{M}$ је објекат простора који је унија коначно много пљосни:

1. Пљосни су конвексни полигони;
2. Свака ивица припада највише двема пљоснима (унутрашње и рубне ивице);
3. Пресек две пљосни може бити само ивица.

- апстрактна полиедарска површ
- полиедар

Полиедарска површ

Дефиниција 1.1

Полиедарска површ $\mathcal{M}$ је објекат простора који је унија коначно много пљосни:

1. Пљосни су конвексни полигони;
2. Свака ивица припада највише двема пљоснима (унутрашње и рубне ивице);
3. Пресек две пљосни може бити само ивица.

- апстрактна полиедарска површ
- полиедар
- повезана површ

Табела темена и повезаности

- Табела темена
- Табела повезаности

Табела темена и повезаности

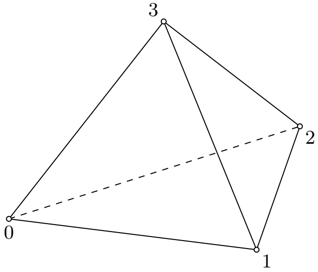
- Табела темена
- Табела повезаности

Табела темена и повезаности

- Табела темена
- Табела повезаности

Пример 1

Одредити табелу повезаности тетраедра.



Слика 8: Тетраедар

Примери

Пример 2

а) Из табеле повезаности одредити скуп ивица.
б) Нацртати слику.
в) Проверити да ли та табела повезаности задаје апстрактну полиедарску површ.
г) У случају потврдног одговора под в) проверити да ли је та полиедарска површ повезана.
д) Одредити руб те површи и број компонената руба.
за следеће табеле повезаности:

1) $\mathcal{T} = \{T_0, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5\}$, $\mathcal{P} = \{p_0, p_1, p_2, p_3\}$,
$p_0 = \langle 0, 1, 2\rangle$, $p_1 = \langle 0, 2, 4, 5\rangle$, $p_2 = \langle 3, 2, 0\rangle$, $p_3 = \langle 1, 0, 3\rangle$.

Примери

Пример 2

а) Из табеле повезаности одредити скуп ивица.
б) Нацртати слику.
в) Проверити да ли та табела повезаности задаје апстрактну полиедарску површ.
г) У случају потврдног одговора под в) проверити да ли је та полиедарска површ повезана.
д) Одредити руб те површи и број компонената руба.
за следеће табеле повезаности:

2) $\mathcal{T} = \{T_0, T_1, \ldots, T_9, T_{10}\}$, $\mathcal{P} = \{p_0, p_1, p_2, p_3, p_4\}$,
$p_0 = \langle 0, 1, 7, 4 \rangle$, $p_1 = \langle 1, 2, 6, 7 \rangle$, $p_2 = \langle 2, 3, 5, 6 \rangle$, $p_3 = \langle 3, 0, 4, 5 \rangle$,
$p_4 = \langle 8, 9, 10 \rangle$.

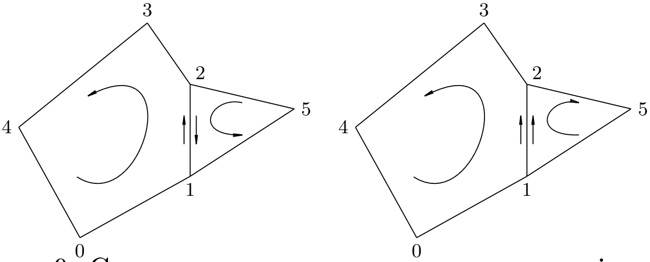
Примери

Пример 2

а) Из табеле повезаности одредити скуп ивица.
б) Нацртати слику.
в) Проверити да ли та табела повезаности задаје апстрактну полиедарску површ.
г) У случају потврдног одговора под в) проверити да ли је та полиедарска површ повезана.
д) Одредити руб те површи и број компонената руба.
за следеће табеле повезаности:

3) $\mathcal{T} = \{T_0, T_1, \ldots, T_7\}$, $\mathcal{P} = \{p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$,
$p_0 = \langle 0, 1, 3\rangle$, $p_1 = \langle 0, 1, 5, 4\rangle$, $p_2 = \langle 1, 2, 6, 5\rangle$, $p_3 = \langle 5, 6, 7\rangle$,
$p_4 = \langle 7, 4, 0, 3\rangle$, $p_5 = \langle 2, 6, 7, 3\rangle$.

Оријентабилност полиедарске површи



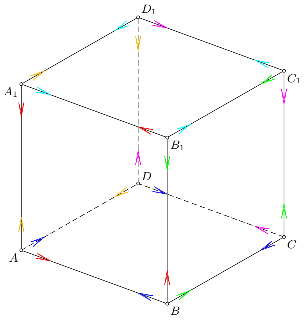
Слика 9: Суседне пљосни исте и различите оријентације

$\mathcal{M}$ – оријентабилна ако су сваке две суседне пљосни исте оријентације.

Оријентабилност

Пример 3

Коцка је оријентабилна.



Слика 10: Усклађивање оријентације коцке

Оријентабилност

Теорема 1.1

Полиедарски модели неке глатке површи су или сви оријентабилни или сви неоријентабилни.

Оријентабилност

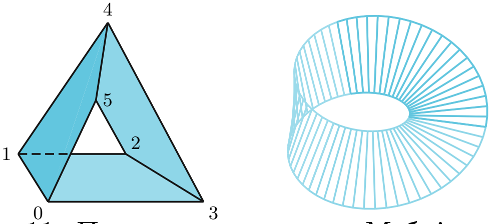
Теорема 1.1

Полиедарски модели неке глатке површи су или сви оријентабилни или сви неоријентабилни.

Теорема 1.2

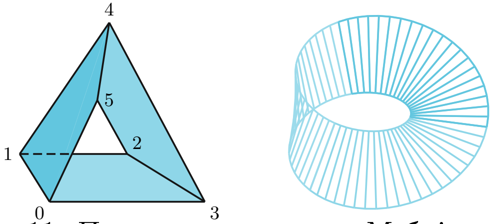
Сваки прост полиедар је оријентабилна површ.

Мебијусова трака



Слика 11: Полиедарски модели Мебијусове траке

Мебијусова трака



Слика 11: Полиедарски модели Мебијусове траке

Пример 4

Полиедарски модел Мебијусове траке је неоријентабилан.

Мебијусова трака – особине

- Једнострана је – могуће ју је сасвим обојити без скидања четкице са папира.
  Кретање по Мебијусовој траци

Мебијусова трака – особине

- Једнострана је – могуће ју је сасвим обојити без скидања четкице са папира.
- Када је пресечемо уздужно добијамо два пута уврнуту једну траку.

Анимације: Бојан Васиљевић (167/2014)

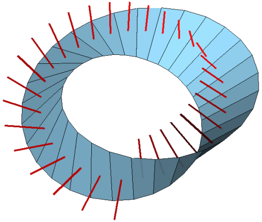
Мебијусова трака – особине

- Једнострана је – могуће ју је сасвим обојити без скидања четкице са папира.
- Када је пресечемо уздужно добијамо два пута уврнуту једну траку. Када и ту траку пресечемо добијамо две уланчане траке.

Анимације: Бојан Васиљевић (167/2014)

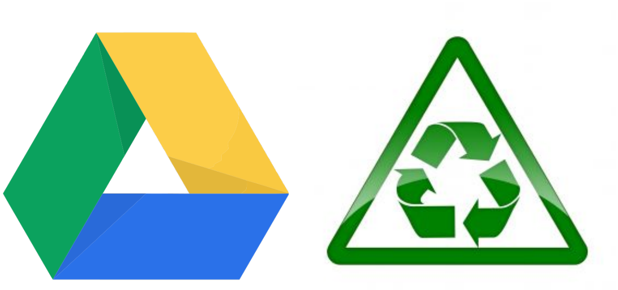
Мебијусова трака – особине

- Једнострана је – могуће ју је сасвим обојити без скидања четкице са папира.
- Када је пресечемо уздужно добијамо два пута уврнуту једну траку. Када и ту траку пресечемо добијамо две уланчане траке.
- Немогуће је дефинисати непрекидну нормалу на Мебијусовој траци.



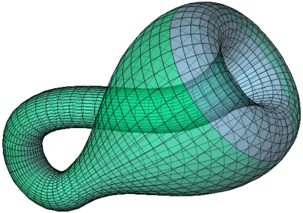
Слика: Нормале на Мебијусову траку

Примери Мебијусове траке



Слика: Лого за Google Drive (лево) и међународни симбол за рециклажу (десно)

Клајнова боца



Слика: Клајнова боца

Вожња бицикла по Клајновој боци

Ојлерова карактеристика и род површи

Ојлерова карактеристика полиедарске површи $\mathcal{M}$ је број

$$\chi(\mathcal{M}) = \boxed{T} - \boxed{I} + \boxed{P}$$

темена ивице пљосни

Ојлерова карактеристика и род површи

Ојлерова карактеристика полиедарске површи $\mathcal{M}$ је број

$$\chi(\mathcal{M}) = \boxed{T} - \boxed{I} + \boxed{P}$$

темена ивице пљосни

Теорема 1.3

Сви полиедарски модели неке глатке површи имају исту Ојлерову карактеристику.

Ојлерова карактеристика и род површи

Ојлерова карактеристика полиедарске површи $\mathcal{M}$ је број

$$\chi(\mathcal{M}) = \underbrace{T}_{\text{темена}} - \underbrace{I}_{\text{ивице}} + \underbrace{P}_{\text{пљосни}}$$

Теорема 1.3

Сви полиедарски модели неке глатке површи имају исту Ојлерову карактеристику.

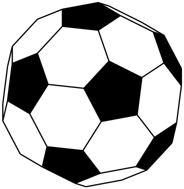
За полиедре важи:

$$\chi(\mathcal{M}) = 2 - 2\underbrace{r}_{\text{род полиедра}}$$

Примери

Пример 5

Ако је $\mathcal{M}$ полиедарски модел сфере, тада је $\chi(\mathcal{M}) = 2$.



Слика 15: Полиедарски модел сфере

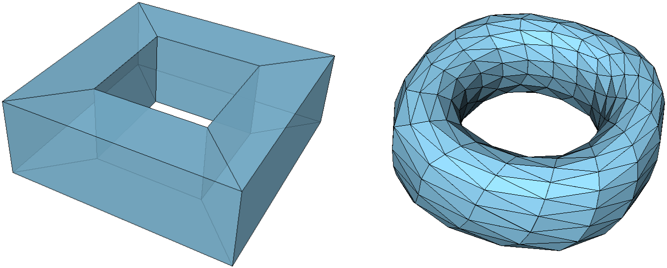
Пример 6

Ојлерова карактеристика Мебијусове траке је нула.

Примери

Пример 7

Род торуса је 1.



Слика: Полиедарски модели торуса

Примери

Пример 8

Дата је полиедарска површ:

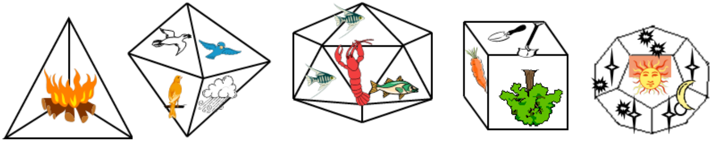
$$\begin{aligned} p_0 &= \langle 0,1,4,3\rangle, & p_5 &= \langle 4,5,8,7\rangle,\\ p_1 &= \langle 1,2,5,4\rangle, & p_6 &= \langle 8,7,1,2\rangle,\\ p_2 &= \langle 2,0,3,5\rangle, & p_7 &= \langle 0,1,7,6\rangle\\ p_3 &= \langle 6,8,5,3\rangle, & p_8 &= \langle 0,6,8,2\rangle.\\ p_4 &= \langle 6,3,4,7\rangle \end{aligned}$$

а) Доказати да је она полиедар, тј. да нема руб.
б) Израчунати њену Ојлерову карактериску и род.

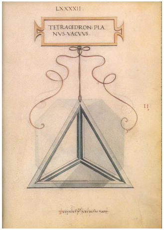
Платонова тела

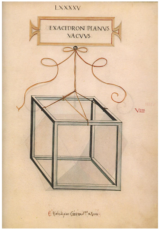
Платон (457 – 347 п.н.е.), „Тимај” или „О метафизици”

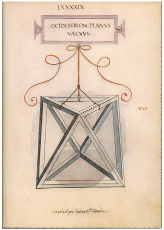
- тетраедар = сувоћа ватре
- октаедар = покретљивост ваздуха
- икосаедар = влажност воде
- хексаедар (коцка) = стабилност земље
- додекаедар = Универзум

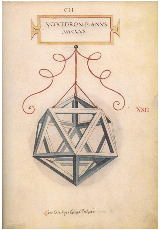


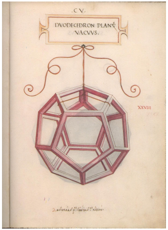
Леонардо да Винчи (1452 – 1519)



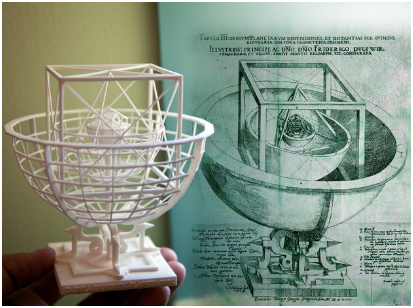






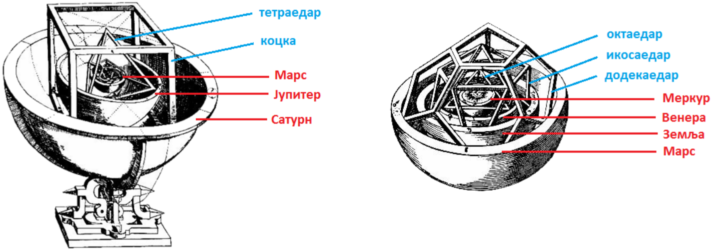


Јохан Кеплер (1571 – 1630)



Слика: Кеплеров модел Соларног система (Joaquin Baldwin 3D Printed Designs)

Јохан Кеплер (1571 – 1630)



Слика: Кеплеров Соларни систем

Платонова тела

Теорема 1.4

Постоји тачно пет Платонових тела.

Платонова тела

Теорема 1.4

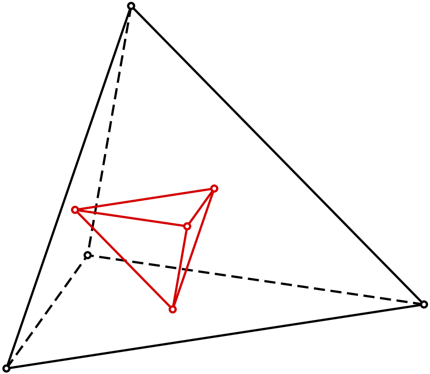
Постоји тачно пет Платонових тела.

полиедар	p	q	T	I	P
тетраедар	3	3	4	6	4
коцка (хексаедар)	3	4	8	12	6
октаедар	4	3	6	12	8
додекаедар	3	5	20	30	12
икосаедар	5	3	12	30	20

p - број ивица из једног темена;

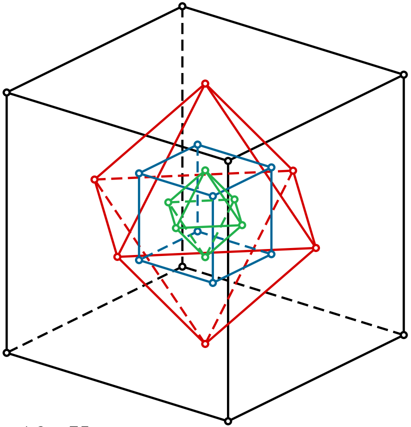
q - број ивица једне пљосни.

Дуалност Платонових тела



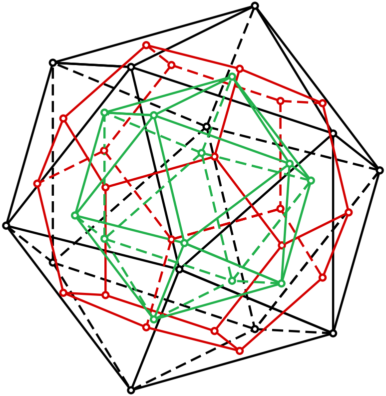
Слика 18: Тетраедар је дуалан самом себи

Дуалност Платонових тела



Слика 18: Хексаедар и октаедар су дуални

Дуалност Платонових тела



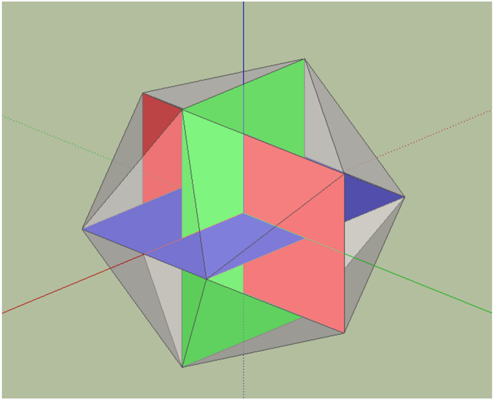
Слика 18: Икосаедар и додекаедар су дуални

Конструкција Платонових тела

Конструкције:

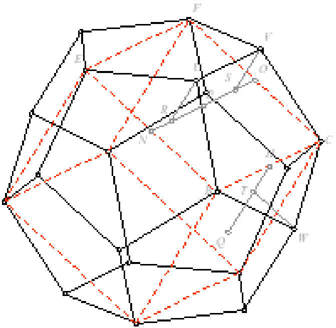
- тетраедар;
- октаедар;
- додекаедар;
- икосаедар.

Конструкција Платонових тела



Слика: Конструкција икосаедра коришћењем „златних правоугаоника”

Конструкција Платонових тела



Еуклидова конструкција додекаедра[5]

[5] анимација проф. Зорана Лучића