УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Геометрија И–смер

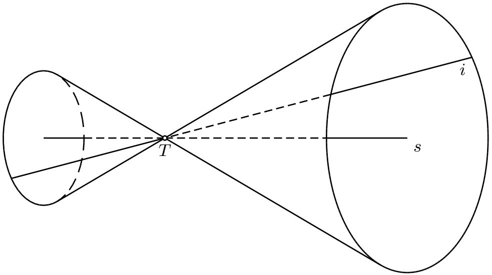
део 7: Криве 2. реда

Тијана Шукиловић

3. децембар 2020

Конус

Нека су i и s две праве у простору које се секу у тачки T.
Кружни конус са теменом T је површ која се добија ротацијом праве i око осе s.
Ротирана права i (у разним положајима) назива се изводница конуса, а права s се назива оса конуса.



Слика 1: Кружни конус

Конусни пресек

Дефиниција 1.1

Конусни пресек је пресек конуса са произвољном равни α.

Конусни пресеци:

- круг;
- елипса;
- хипербола;
- парабола.

Конике

Дефиниција 1.2

Коника је пресек конуса са равни α која НЕ садржи теме конуса.

Теорема 1.1

У равни α конике постоје права d и тачка F такве да је однос растојања

$$\frac{MF}{d(M,d)} = e = const$$

произвољне тачке M конике од тачке F и праве d константан.

Ексцентрицитет конике

Дефиниција 1.3

Број $e \geq 0$ назива се ексцентрицитет конике,

Ексцентрицитет конике

Дефиниција 1.3

Број $e \geq 0$ назива се ексцентрицитет конике, тачка F жижа,

Ексцентрицитет конике

Дефиниција 1.3

Број $e \geq 0$ назива се ексцентрицитет конике, тачка F жижа, а права d директриса конике.

Ексцентрицитет конике

Дефиниција 1.3

Број $e \geq 0$ назива се ексцентрицитет конике, тачка F жижа, а права d директриса конике.

Ексцентрицитет одређује тип конике:

- за $e = 0$ – круг;
- за $0 < e < 1$ – елипса;
- за $e = 1$ – парабола;
- за $e > 1$ – хипербола.

Примери коника у природи

- Путања косог хица је парабола.

Примери коника у природи

- Путања косог хица је парабола.
- Сенка кружног предмета на раван зид је коника.

Примери коника у природи

- Путања косог хица је парабола.
- Сенка кружног предмета на раван зид је коника.
- Сунчева сенка врха штапа у току дана је коника.

Слика: Мост „Сунчани сат”, Калифорнија

Кеплерови закони

Johannes Kepler, 1571–1630

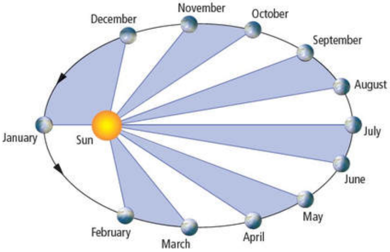
- 1. Кеплеров закон:
  Тела Сунчевог система се крећу око Сунца по коници, а Сунце се налази у жижи те конике.

Слика: 1. Кеплеров закон

Кеплерови закони

Johannes Kepler, 1571–1630

- 1. Кеплеров закон:
  Тела Сунчевог система се крећу око Сунца по коници, а Сунце се налази у жижи те конике.
- 2. Кеплеров закон:
  Радијус вектор планете у односу на Сунце у једнаким временским интервалима опише једнаке површине.



Слика: 2. Кеплеров закон

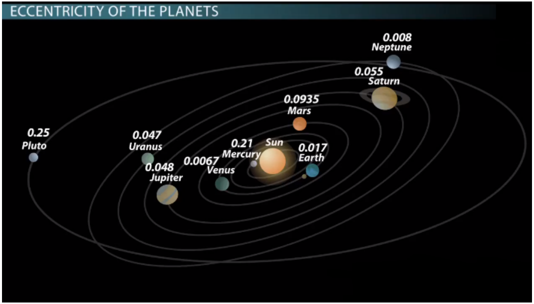
Кеплерови закони

Johannes Kepler, 1571–1630

- 1. Кеплеров закон:
  Тела Сунчевог система се крећу око Сунца по коници, а Сунце се налази у жижи те конике.
- 2. Кеплеров закон:
  Радијус вектор планете у односу на Сунце у једнаким временским интервалима опише једнаке површине.
- 3. Кеплеров закон: $T^2 \sim a^3$:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{gm}}.$$

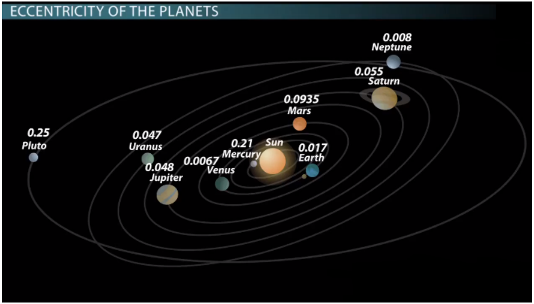
Примери коника у природи



Слика: Орбите планета Сунчевог система

- Да ли Сунце мирује? Шта утиче на орбиту планете?

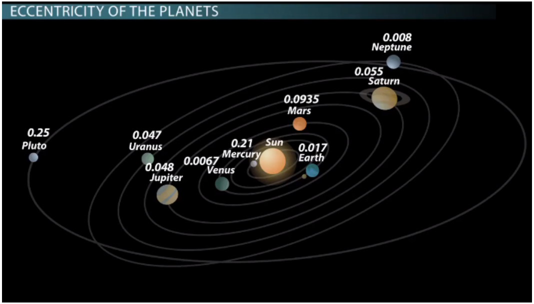
Примери коника у природи



Слика: Орбите планета Сунчевог система

- Да ли Сунце мирује? Шта утиче на орбиту планете?
- Шта је то ретроградни Меркур (у физици)?

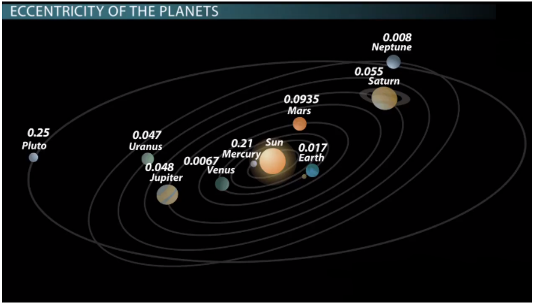
Примери коника у природи



Слика: Орбите планета Сунчевог система

- Да ли Сунце мирује? Шта утиче на орбиту планете?
- Шта је то ретроградни Меркур (у физици)? YouTube

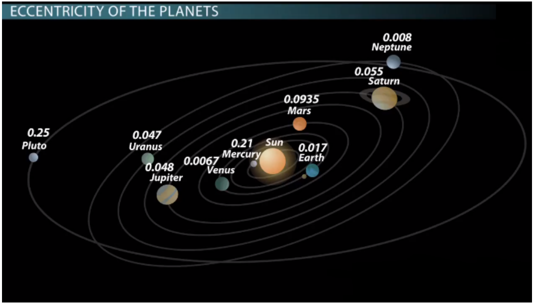
Примери коника у природи



Слика: Орбите планета Сунчевог система

- Да ли Сунце мирује? Шта утиче на орбиту планете?
- Шта је то ретроградни Меркур (у физици)?
- Који астрономски објекти у нашем Сунчевом систему имају скоро параболичне путање?

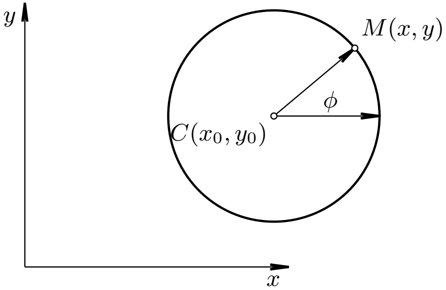
Примери коника у природи



Слика: Орбите планета Сунчевог система

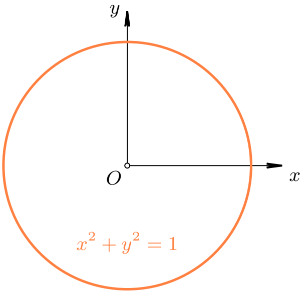
- Да ли Сунце мирује? Шта утиче на орбиту планете?
- Шта је то ретроградни Меркур (у физици)?
- Који астрономски објекти у нашем Сунчевом систему имају скоро параболичне путање?
  Одговор: на пример, Халејева комета ($e \approx 0.967$)

Круг

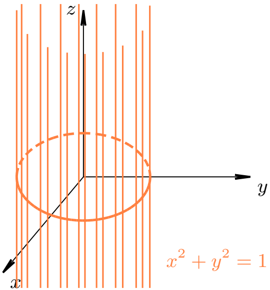


Слика 4: Круг са центром у тачки $C(x_0, y_0)$ и полупречником r

Једначине круга у равни и простору

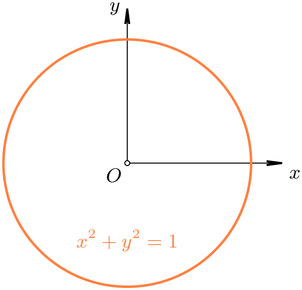


Слика 5: Круг

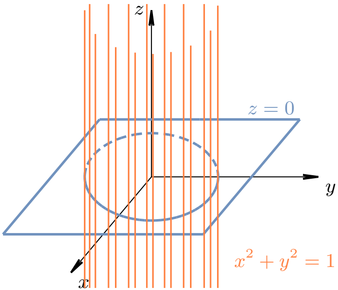


Слика 6: Цилиндар

Једначине круга у равни и простору



Слика 5: Круг



Слика 6: Цилиндар $\longrightarrow$ круг

Имплицитна и параметарска једначина круга

- Имплицитна једначина круга:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Имплицитна и параметарска једначина круга

- Имплицитна једначина круга:

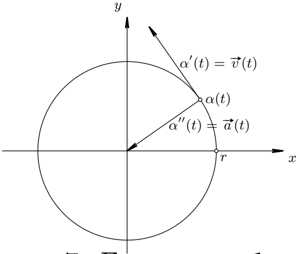
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

- Параметарска једначина круга:

$$x = x_0 + r\cos\theta, \quad y = y_0 + r\sin\theta, \quad \theta \in [0, 2\pi),$$

θ је угао између вектора положаја тачке и позитивног дела x-осе.

Брзина и убрзање



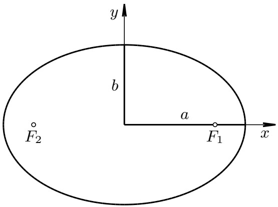
Слика 7: Брзина и убрзање

$$\alpha(t) = (r\cos t,\ r\sin t)\,, t \in [0, 2\pi).$$

- Кружно кретање константном угаоном брзином:
  - t – време;
  - $\vec{v} = \alpha'(t)$ – брзина;
  - $\vec{a} = \alpha''(t)$ – убрзање;
  - $\vec{F} = m\vec{a}$ – центрипетална сила.

Предавања професора Волтера Левина са MIT-а (YouTube)

Елипса



Слика 8: Елипса

Канонска једначина елипсе:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > b > 0.$$

Елементи елипсе

- $a > b > 0$ – полуосе елипсе;

Елементи елипсе

- $a > b > 0$ – полуосе елипсе;
- $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ – жиже елипсе;

Елементи елипсе

- $a > b > 0$ – полуосе елипсе;
- $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ – жиже елипсе;
- $d_1 : x = \dfrac{a}{e}$, $d_2 : x = -\dfrac{a}{e}$ – директрисе елипсе;

Елементи елипсе

- $a > b > 0$ – полуосе елипсе;
- $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ – жиже елипсе;
- $d_1 : x = \frac{a}{e}$, $d_2 : x = -\frac{a}{e}$ – директрисе елипсе;
- $e = \frac{c}{a}$ – ексцентрицитет елипсе.

Елементи елипсе

- $a > b > 0$ – полуосе елипсе;
- $F_1(c, 0),\ F_2(-c, 0),\ c = \sqrt{a^2 - b^2}$ – жиже елипсе;
- $d_1 : x = \dfrac{a}{e},\ d_2 : x = -\dfrac{a}{e}$ – директрисе елипсе;
- $e = \dfrac{c}{a}$ – ексцентрицитет елипсе.

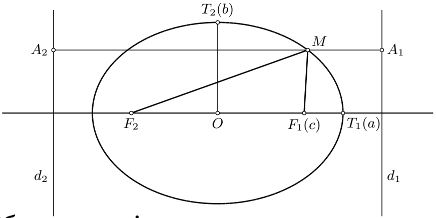
- за $a = b$ елипса је круг!

Фокусне особине елипсе

Теорема 1.2

Збир растојања произвољне тачке елипсе од њених жижа је константан:

$$MF_1 + MF_2 = 2a.$$



Слика 9: Збир растојања тачке елипсе од њених жижа

- Фокусне особине елипсе

Примери

Пример 1

Ако је ексцентрицитет Марса $e = 0.0934$ и растојање између жижа $2c \approx 0.2847AJ$ $(1AJ = 1.5 \times 10^8 km)$, одредити најмање (перихел) и највеће (афел) растојање Марса од Сунца.

$$P = a - c, \quad A = a + c, \quad a = \frac{c}{e}$$

Колике су ове вредности за Земљу?

За коју планету Сунчевог система је однос $P : A$ максималан/минималан?

Колико је потребно Марсу да обиђе око Сунца?

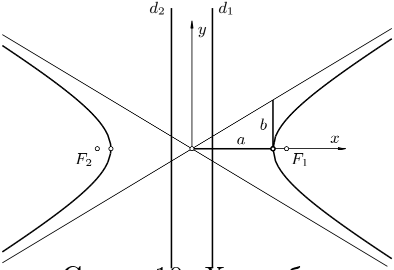
Параметарска једначина елипсе

- Параметарска једначина елипсе:

$$x = a\cos\theta, \quad y = b\sin\theta, \quad \theta \in [0, 2\pi),$$

a, b су полуосе елипсе, али θ НИЈЕ угао између вектора положаја тачке и позитивног дела x-осе.

Хипербола



Слика 10: Хипербола

Канонска једначина хиперболе:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Елементи хиперболе

- $a, b > 0$ – полуосе хиперболе;

Елементи хиперболе

- $a, b > 0$ – полуосе хиперболе;
- $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$, $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ – жиже хиперболе;

Елементи хиперболе

- $a, b > 0$ – полуосе хиперболе;
- $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$, $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ – жиже хиперболе;
- $d_1 : x = \dfrac{a}{e}$, $d_2 : x = -\dfrac{a}{e}$ – директрисе хиперболе;

Елементи хиперболе

- $a, b > 0$ – полуосе хиперболе;
- $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$, $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ – жиже хиперболе;
- $d_1 : x = \frac{a}{e}$, $d_2 : x = -\frac{a}{e}$ – директрисе хиперболе;
- $e = \frac{c}{a}$ – ексцентрицитет хиперболе;

Елементи хиперболе

- $a, b > 0$ – полуосе хиперболе;
- $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$, $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ – жиже хиперболе;
- $d_1 : x = \dfrac{a}{e}$, $d_2 : x = -\dfrac{a}{e}$ – директрисе хиперболе;
- $e = \dfrac{c}{a}$ – ексцентрицитет хиперболе;
- $a_1 : y = \dfrac{b}{a}x$, $a_2 : y = -\dfrac{b}{a}x$ – асимптоте хиперболе.

Фокусне особине хиперболе

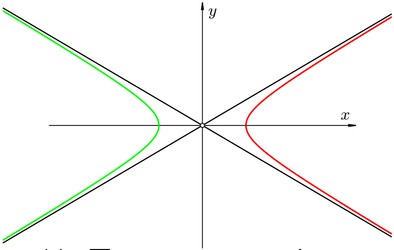
Теорема 1.3

Апсолутна вредност разлике растојања произвољне тачке хиперболе од њених жижа је константан:

$$|MF_1 - MF_2| = 2a.$$

- Фокусне особине хиперболе

Параметризација хиперболе



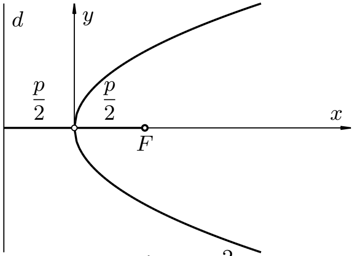
Слика 11: Параметризација хиперболе

$$x = +a\cosh\phi, \quad y = b\sinh\phi, \quad \phi \in \mathbb{R}$$
$$x = -a\cosh\phi, \quad y = b\sinh\phi, \quad \phi \in \mathbb{R}$$

Парабола

Последица 1.1

Свака тачка M параболе је једнако удаљена од жиже и од директрисе параболе.



Слика 12: Парабола $y^2 = 2px$, $p > 0$

- Дефиниција параболе

Елементи параболе $y^2 = 2px,\ p > 0$

- p – параметар параболе;
- $F\left(\dfrac{p}{2}, 0\right)$ – жижа параболе;
- $d:\ x = -\dfrac{p}{2}$ – директриса параболе;
- o – оса параболе (овде: x-оса);
- T – теме параболе (овде: O).

Параметризација параболе

- Стандардна параметризација:

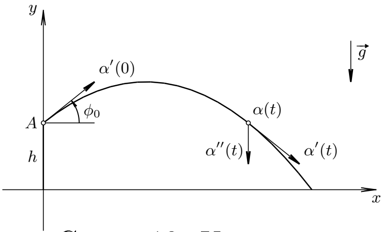
$$x = \frac{t^2}{2p}, \quad y = t, \quad t \in \mathbb{R},$$

- Једначина косог хица

Пример 2

Показати да су сваке две параболе међусобно сличне.

Једначина косог хица



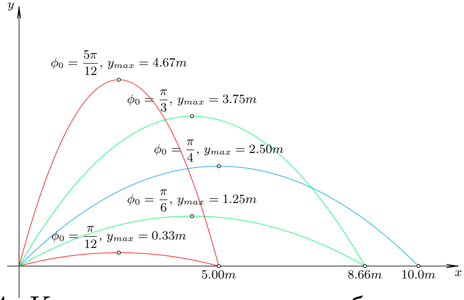
Слика 13: Коси хитац

$$
\begin{aligned}
x(t) &= (v_0 \cos\phi_0)t, \quad t \geq 0 \\
y(t) &= -\frac{g}{2}t^2 + (v_0 \sin\phi_0)t + h, \quad t \geq 0,
\end{aligned}
$$

- v_0 – почетна брзина;
- h – висина;
- ϕ_0 – угао (у односу на тло);
- g – гравитационо убрзање.

Коси хитац

- За који угао ϕ_0 се достиже највећа даљина/висина?
- Шта се дешава када је $v_0 = 0$?



Слика 14: Коси хици са почетном брзином $v_0 = 10\dfrac{m}{s}$, за углове $\phi_0 = \dfrac{k\pi}{12}$, $k = 1, \ldots, 5$

Пример: Коси хитац

Пример 3

Кошаркаш висине $1.85m$ треба да убаци лопту у кош са са линије слободног бацања ($4.5m$). Обруч је на висини $3.05m$.

Под којим почетним углом треба избацити лопту да би се постигао погодак? За почетну брзину избачаја лопте узети $8m/s$.

Колико се мења потребна почетна брзина избачаја ако се изводи скок-шут са исте удаљености под тим углом? Претпоставимо да је одраз $1m$.

Узети да је гравитационо убрзање $g \sim 10m/s^2$.

Пример: Слободан пад

Пример 4

Спортиста масе $65kg$ скаче у базен са скакаонице висине $10m$ без почетне брзине. После колико времена је спортиста ударио о површину воде? Којом брзином се у том тренутку кретао?

а) Израчунати ове вредности ако се занемари отпор ваздуха.

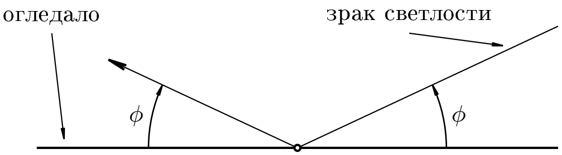
$$v = gt, \quad h = \frac{gt^2}{2} \implies v = \sqrt{2gh}, \ t = \frac{v}{g}$$

б) Израчунати ове вредности ако је отпор ваздуха $F = 100N$.

$$F = ma_{ot}, \ a = g - a_{ot}, \ h = \frac{at_{ot}^2}{2} \implies v_{ot} = \sqrt{2ah}, \ t_{ot} = \sqrt{\frac{2h}{a}}$$

Закон одбијања светлости

Светлост се одбија од глатке површине тако да је упадни угао зрака светлости једнак одбојном углу.

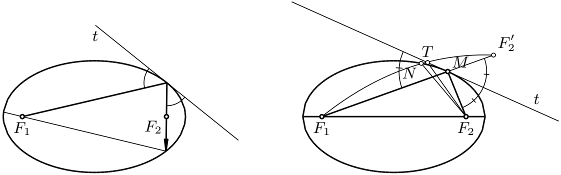


Слика 15: Закон одбијања светлости

Оптичка особина елипсе

Теорема 1.4

Светлосни зрак који извире из жиже елипсе и одбија се од елипсе, пролази кроз другу жижу елипсе.



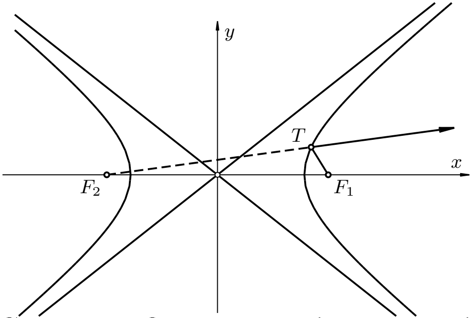
Слика 16: Оптичка особина елипсе

Елиптички билијар

Оптичка особина хиперболе

Теорема 1.5

Светлосни зрак који извире из жиже хиперболе и одбија се од хиперболе, колинеаран је са другом жижом хиперболе.

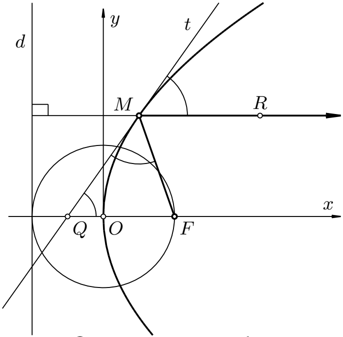


Слика 17: Оптичка особина хиперболе

Оптичка особина параболе

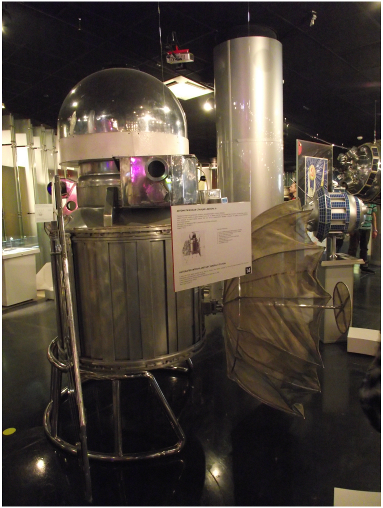
Теорема 1.6

Светлосни зрак који извире из жиже параболе одбија се од параболе паралелно њеној оси.



Слика 18: Оптичка особина параболе

Пример параболичке антене



Слика: Свемирска станица Венера I, Музеј космонаутике, Москва

Криве другог реда

Дефиниција 1.4

Крива другог реда је скуп тачака равни чије координате (x, y) задовољавају једначину другог степена:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Криве другог реда

Дефиниција 1.4

Крива другог реда је скуп тачака равни чије координате (x, y) задовољавају једначину другог степена:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Колико год претходна једначина изгледала компликовано, може се показати да она геометријски описује елипсу, хиперболу, параболу или неку једноставну „дегенерисану” криву.

Свођење криве на канонски облик

Теорема 1.7

За сваку криву другог реда, дату у ортонормираном реперу Oe, постоји нови ортонормирани репер Qf, исте оријентације, у ком она има тачно једну од следећих једначина:

$$(E) \quad \frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1, \qquad \text{(елипса)}$$

$$(H) \quad \frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 1, \qquad \text{(хипербола)}$$

$$(P) \quad y''^2 = 2px'', \qquad \text{(парабола)}$$

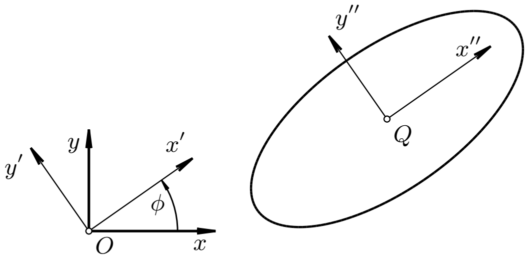
Свођење криве на канонски облик

Теорема 1.7

$$
\begin{array}{lll}
(D1) & \dfrac{x''^2}{a^2} + \dfrac{y''^2}{b^2} = -1, & \text{(празан скуп или имагинарна елипса)} \\
(D2) & \dfrac{x''^2}{a^2} + \dfrac{y''^2}{b^2} = 0, & \text{(тачка)} \\
(D3) & \dfrac{x''^2}{a^2} - \dfrac{y''^2}{b^2} = 0, & \text{(две праве које се секу)} \\
(D4) & x''^2 = a^2, & \text{(две паралелне праве)} \\
(D5) & x''^2 = 0, & \text{(„двострука” права)} \\
(D6) & x''^2 = -a^2 & \text{(празан скуп).}
\end{array}
$$

где je $p > 0$, $a, b > 0$ и $a \geq b$ за $(E), (D1), (D2)$ и $(D3)$.

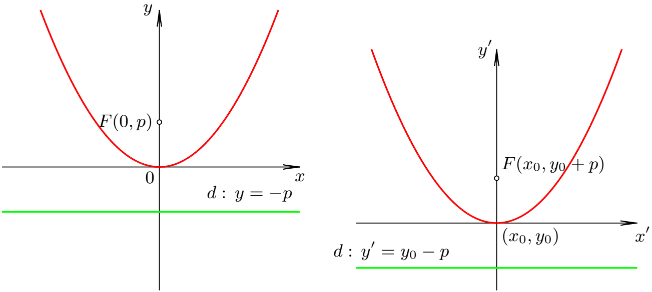
Свођење криве на канонски облик



Слика 20: Свођење елипсе на канонски облик

- транслација
- ротација

Свођење криве на канонски облик транслацијом



Слика 21: Транслација параболе

$$x' = x + x_0, \qquad y' = y + y_0$$

Свођење криве на канонски облик ротацијом

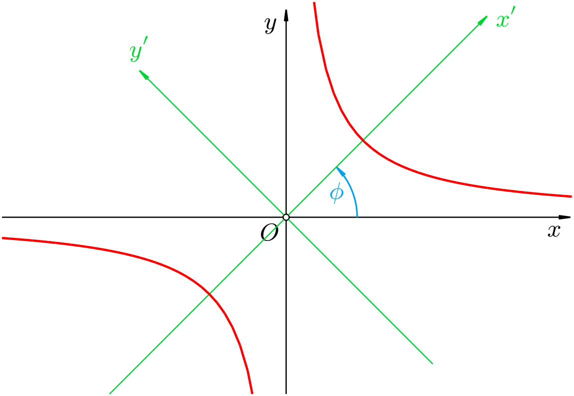
$$x = \cos\phi\, x' - \sin\phi\, y', \qquad y = \sin\phi\, x' + \cos\phi\, y'$$

$$\cot 2\phi = \frac{\cos 2\phi}{\sin 2\phi} = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}, \phi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos 2\phi = \frac{\cot 2\phi}{+\sqrt{1 + \cot^2 2\phi}}$$

$$\cos\phi = +\sqrt{\frac{1 + \cos 2\phi}{2}}, \qquad \sin\phi = +\sqrt{\frac{1 - \cos 2\phi}{2}}$$

Пример: Ротација хиперболе



Слика 22: Хипербола $xy = 1$