

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Геометрија II–смер

део 4: Аналитичка геометрија простора

Тијана Шукиловић

30. октобар 2020

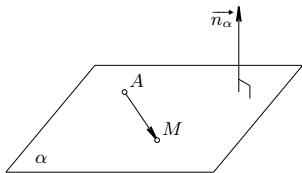
Имплицитна једначина равни

Раван α је одређена тачком $A(x_0, y_0, z_0)$ која јој припада и нормалним вектором равни \vec{n}_α .

Имплицитна једначина равни

Раван α је одређена тачком $A(x_0, y_0, z_0)$ која јој припада и нормалним вектором равни \vec{n}_α .

$$\begin{aligned}M(x, y, z) \in \alpha &\implies \overrightarrow{AM} \perp \vec{n}_\alpha \\0 &= \vec{n}_\alpha \circ \overrightarrow{AM} \\&= (a, b, c) \circ (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \\&= a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) \\&= ax + by + cz \underbrace{- ax_0 - by_0 - cz_0}_d\end{aligned}$$



Слика 1: Имплицитна једначина равни

Нормализована једначина равни

Имлицитна једначина равни:

$$ax + by + cz + d = 0, \quad \vec{n}_\alpha = (a, b, c)$$

Нормализована једначина равни

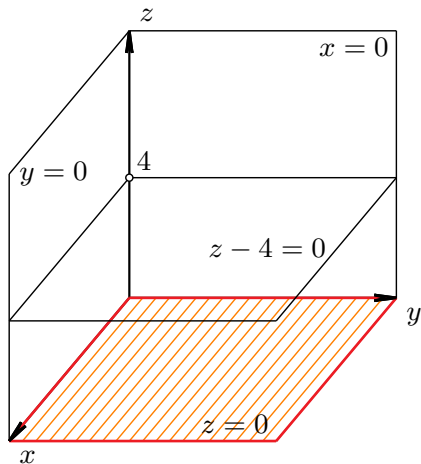
Имлицитна једначина равни:

$$ax + by + cz + d = 0, \quad \vec{n}_\alpha = (a, b, c)$$

Нормализована једначина равни:

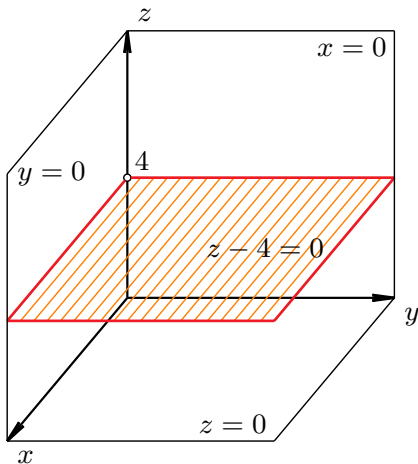
$$ax + by + cz + d = 0, \quad |\vec{n}_\alpha|^2 = a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

Примери



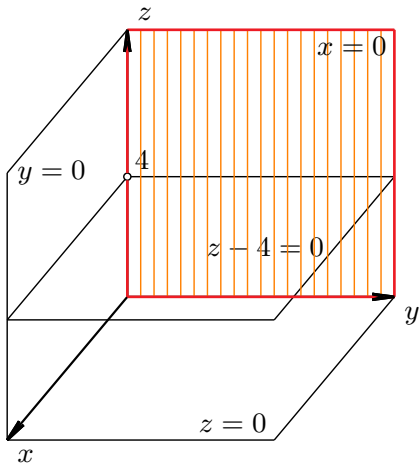
Слика 2: Раван $z = 0$

Примери



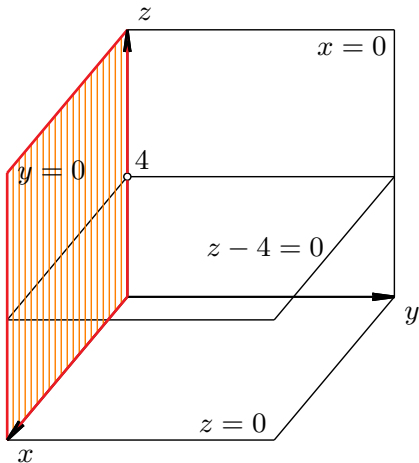
Слика 2: Раван $z - 4 = 0$

Примери



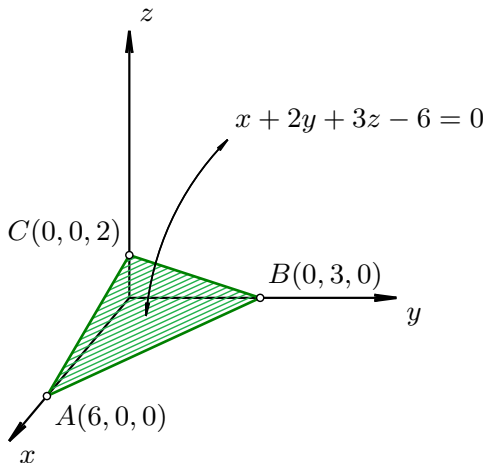
Слика 2: Раван $x = 0$

Примери



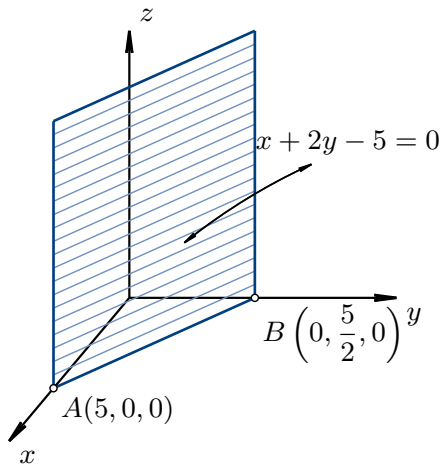
Слика 2: Раван $y = 0$

Пример – скицирати раван



Слика 3: Раван $x + 2y + 3z - 6 = 0$

Пример – скицирати раван



Слика 3: Раван $x + 2y - 5 = 0$

Полуростор

Полупростор је скуп свих тачака са исте стране неке равни
 $\alpha : ax + by + cz + d = 0$.

Одређен је неједначином $ax + by + cz + d > 0$, односно
 $ax + by + cz + d < 0$.

Полуростор

Полупростор је скуп свих тачака са исте стране неке равни $\alpha : ax + by + cz + d = 0$.

Одређен је неједначином $ax + by + cz + d > 0$, односно $ax + by + cz + d < 0$.

Пример 1

Да ли се тачке $A(1, 1, 1)$ и $C(-1, -1, 3)$ налазе са исте стране равни $\beta : x - 3y + 4z - 12 = 0$.

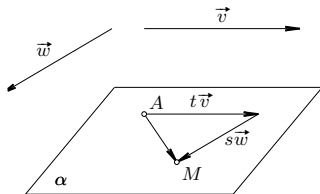
Параметарска једначина равни

Раван α је одређена тачком $A(x_0, y_0, z_0)$ која јој припада и два вектора \vec{v} , \vec{u} паралелна α .

Параметарска једначина равни

Раван α је одређена тачком $A(x_0, y_0, z_0)$ која јој припада и два вектора \vec{v} , \vec{w} паралелна α .

$$M(t, s) = M = A + t\vec{v} + s\vec{w}, \quad t, s \in \mathbb{R}$$



Слика 4: Параметарска једначина равни

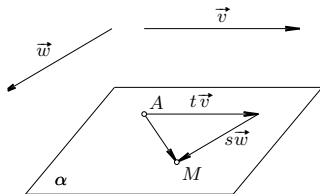
Параметарска једначина равни

Раван α је одређена тачком $A(x_0, y_0, z_0)$ која јој припада и два вектора \vec{v} , \vec{w} паралелна α .

$$M(t, s) = M = A + t\vec{v} + s\vec{w}, \quad t, s \in \mathbb{R}$$

Параметарска једначина равни:

$$\begin{aligned}x &= x_0 + tv_x + sw_x, \\y &= y_0 + tv_y + sw_y, \\z &= z_0 + tv_z + sw_z, \quad t, s \in \mathbb{R}\end{aligned}$$



Слика 4: Параметарска једначина равни

Прелазак из једног облика равни у други

Параметарски \longrightarrow имплицитни:

$$\vec{n}_\alpha = \vec{v} \times \vec{w} = (a, b, c)$$

$$d = -ax_0 - by_0 - cz_0 = -\vec{n}_\alpha \circ \vec{OA}$$

Прелазак из једног облика равни у други

Параметарски \longrightarrow имплицитни:

$$\vec{n}_\alpha = \vec{v} \times \vec{w} = (a, b, c)$$

$$d = -ax_0 - by_0 - cz_0 = -\vec{n}_\alpha \circ \vec{OA}$$

Имплицитни \longrightarrow параметарски:

$\vec{v} \perp \vec{n}_\alpha$ – произвољан

$$\vec{w} = \vec{n}_\alpha \times \vec{v}$$

$$a \neq 0 : A \left(-\frac{d}{a}, 0, 0 \right)$$

Прелазак из једног облика равни у други

Пример 2

Одредити параметарски једначину равни

$$\alpha : x - 2y + z - 2 = 0.$$

Пример 3

Одредити нормализовану једначину равни β :

$$x = 2,$$

$$y = 1 - t,$$

$$z = 2 + t - 3s, \quad t, s \in \mathbb{R}$$

Параметарска једначина праве

Права у простору се задаје тачком $P(x_0, y_0, z_0)$ и ненула вектором правца $\vec{p}(p_x, p_y, p_z)$:

$$M(t) = M = P + t\vec{p}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Параметарска једначина праве

Правна у простору се задаје тачком $P(x_0, y_0, z_0)$ и ненула вектором правца $\vec{p}(p_x, p_y, p_z)$:

$$M(t) = M = P + t\vec{p}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Параметарска једначина праве:

$$x = x_0 + tp_x,$$

$$y = y_0 + tp_y,$$

$$z = z_0 + tp_z, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Параметарска једначина праве

Права у простору се задаје тачком $P(x_0, y_0, z_0)$ и ненула вектором правца $\vec{p}(p_x, p_y, p_z)$:

$$M(t) = M = P + t\vec{p}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Параметарска једначина праве:

$$x = x_0 + tp_x,$$

$$y = y_0 + tp_y,$$

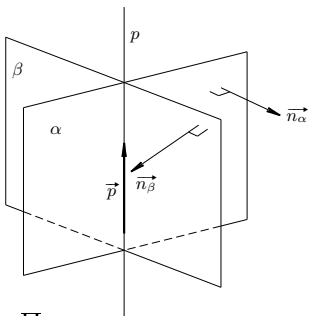
$$z = z_0 + tp_z, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Канонска једначина праве:

$$\frac{x - x_0}{p_x} = \frac{y - y_0}{p_y} = \frac{z - z_0}{p_z}.$$

Права као пресек две равни

$$\left. \begin{array}{l} \alpha : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ \beta : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{array} \right\} \implies \vec{p} = \vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta$$



Слика 5: Права као пресек две равни

Примери

Пример 4

Праву $p : x - z = 0, 2x - y + 1 = 0$ записати параметарски.

Пример 5

Праву $p : x = t + 4, y = -t + 1, z = 3t, t \in \mathbb{R}$ записати као пресек две равни.

Пример 6

Одредити једначину праве која садржи тачке $A(1, 2, 3)$ и $B(3, 2, 1)$.

Прамен равни

Теорема 1.1

Скуп свих равни које садрже праву $p = \alpha \cap \beta$ је дат једначином:

$$\gamma : \lambda_1(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + \lambda_2(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0,$$

за $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Прамен равни

Теорема 1.1

Скуп свих равни које садрже праву $p = \alpha \cap \beta$ је дат једначином:

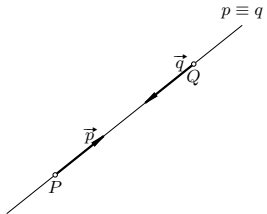
$$\gamma : \lambda_1(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + \lambda_2(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0,$$

за $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Пример 7

Одредити једначину равни која садржи тачку $M(1, 4, -2)$ и праву $p : x - y - 1 = 0, z - 2x = 0$.

Међусобни положаји две праве

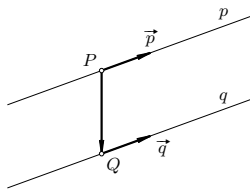


Слика 6: Праве које се поклапају

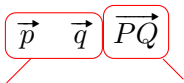
$$\vec{p} \quad \vec{q} \quad \overrightarrow{PQ}$$

колинеарни

Међусобни положаји две праве



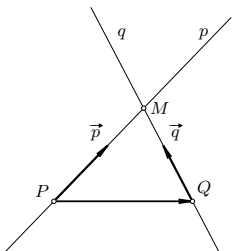
Слика 6: Паралелне праве



колинеарни

неколинеаран

Међусобни положаји две праве

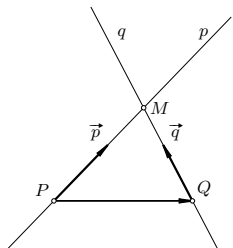


Слика 6: Праве које се секу

$$\boxed{\vec{p} \quad \vec{q}} \quad \overrightarrow{PQ}$$

неколинеарни

Међусобни положаји две праве

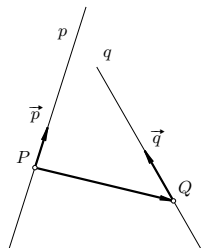


Слика 6: Праве које се секу

$$\boxed{\vec{p} \quad \vec{q} \quad \vec{PQ}}$$

копланарни

Међусобни положаји две праве



Слика 6: Мимоилазне праве

$$\vec{p} \quad \vec{q} \quad \overrightarrow{PQ}$$

некопланарни

Пример 8

Одредити међусобни положај правих:

$$(a) \quad p: \frac{x-2}{1} = \frac{y-19}{5} = \frac{z-2}{1}, \quad q: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{4};$$

$$(б) \quad p: \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-2}{-1}, \quad q: 2x = y, 3x = z;$$

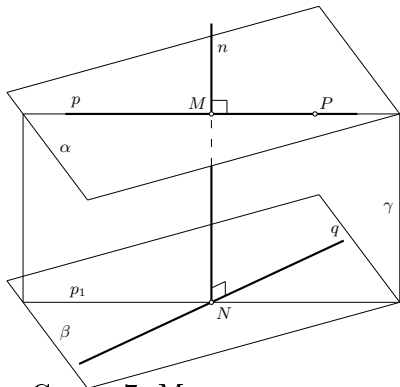
$$(в) \quad p: \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-2}{-1}, \quad q: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{-1};$$

$$(г) \quad p: \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-2}{-1}, \quad q: \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+7}{2}.$$

Мимоилазне праве

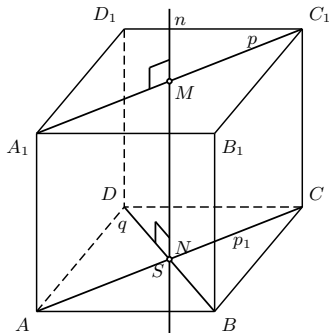
Теорема 2.1

Мимоилазне праве p и q имају јединствену **заједничку нормалу**, тј. праву која сече обе праве и нормална је на њих.



Слика 7: Мимоилазне праве

Примери

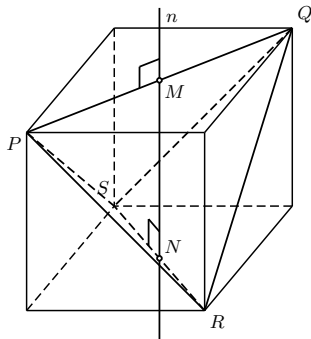


Слика 8: Коцка

Пример 9

Дијагонале наспрамних пљосни коцке су мимоилазне праве, а њихова заједничка нормала је одређена средиштима тих дијагонала.

Примери



Слика 9: Тетраедар

Пример 10

Шта је заједничка нормала мимоилазних ивица PQ и RS правилног тетраедра $PQRS$?

Међусобни положаји праве и равни

Права p и раван α могу да:

- се секу;
- буду паралелне;
- права припада равни.

Међусобни положаји праве и равни

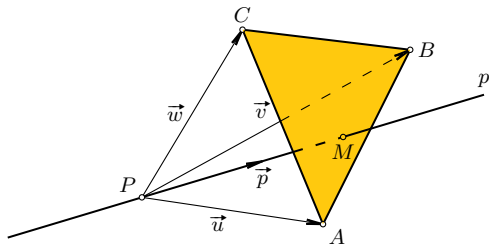
Права p и раван α могу да:

- се секу;
- буду паралелне;
- права припада равни.

Пример 11

Одредити међусобни положај праве $p : \frac{x+4}{0} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{1}$ и равни $\alpha : x - 2y + 5z - 1 = 0$.

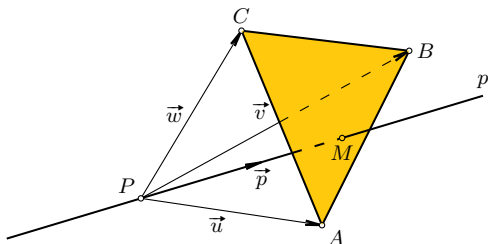
Продор праве кроз троугао



Слика 10: Продор праве кроз троугао

$$\text{sign}[\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}, \vec{p}] = \text{sign}[\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PC}, \vec{p}] = \text{sign}[\overrightarrow{PC}, \overrightarrow{PA}, \vec{p}]$$

Продор праве кроз троугао

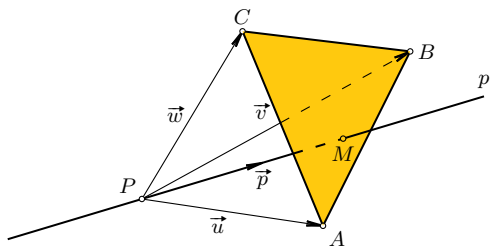


Слика 10: Продор праве кроз троугао

$$M = P + t\vec{p},$$

$$t = \frac{[\vec{PA}, \vec{PB}, \vec{PC}]}{[\vec{PA}, \vec{PB}, \vec{p}] + [\vec{PB}, \vec{PC}, \vec{p}] + [\vec{PC}, \vec{PA}, \vec{p}]}$$

Продор праве кроз троугао

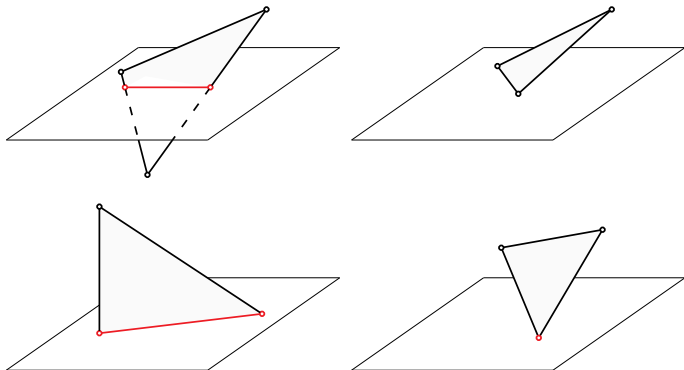


Слика 10: Продор праве кроз троугао

Пример 12

Да ли права $p : \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{2}$ сече троугао ABC ,
 $A(2, 4, 6)$, $B(-4, 2, 0)$, $C(6, 4, -2)$?

Пресек троугла и равни



Слика 11: Пресек равни и троугла

Растојање тачке од праве

Теорема 3.1

Растојање тачке M од праве p задате тачком P и вектором правца P дато је формулом:

$$d = \frac{|\vec{p} \times \overrightarrow{PM}|}{|\vec{p}|}.$$

Растојање тачке од праве

Теорема 3.1

Растојање тачке M од праве p задате тачком P и вектором правца \vec{p} дато је формулом:

$$d = \frac{|\vec{p} \times \overrightarrow{PM}|}{|\vec{p}|}.$$

Пример 13

Одредити растојање тачке $M(1, 0, -1)$ од праве

$$p: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{2}.$$

Растојање тачке од равни

Теорема 3.2

Растојање тачке $M(x_0, y_0, z_0)$ од равни
 $\alpha : ax + by + cz + d = 0$ дато је формулом:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Растојање тачке од равни

Теорема 3.2

Растојање тачке $M(x_0, y_0, z_0)$ од равни
 $\alpha : ax + by + cz + d = 0$ дато је формулом:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Пример 14

Одредити растојање тачке $M(1, 0, -1)$ од равни
 $\alpha : x + y - 4z = 0$.

Растојање између мимоилазних правих

Теорема 3.3

Растојање између мимоилазних правих p и q дато је формулом:

$$d = \frac{|[\vec{p}, \vec{q}, \overrightarrow{PQ}]|}{|\vec{p} \times \vec{q}|}.$$

Растојање између мимоилазних правих

Теорема 3.3

Растојање између мимоилазних правих p и q дато је формулом:

$$d = \frac{|[\vec{p}, \vec{q}, \overrightarrow{PQ}]|}{|\vec{p} \times \vec{q}|}.$$

Пример 15

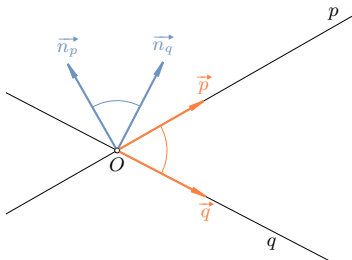
Одредити заједничку нормалну и растојање између мимоилазних правих

$$p: \frac{x-6}{3} = \frac{y-5}{4} = \frac{z}{0},$$
$$q: \frac{x+1}{4} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z-15}{-5}.$$

Углови између правих и равни

- Угао између правих p и q је оштар угао између њихових нормалних вектора.

$$\angle(p, q) = \text{оштар} \angle(\vec{p}, \vec{q}) = \arccos \frac{|\vec{p} \circ \vec{q}|}{|\vec{p}| \cdot |\vec{q}|}$$

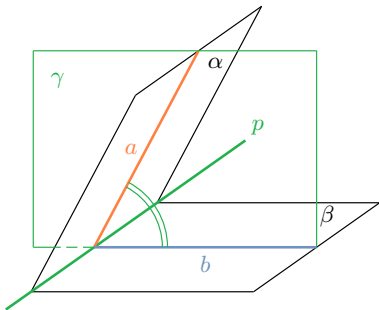


Слика 12: Угао између две праве

Углови између правих и равни

- Угао између равни α и β је оштар угао између правих a и b .

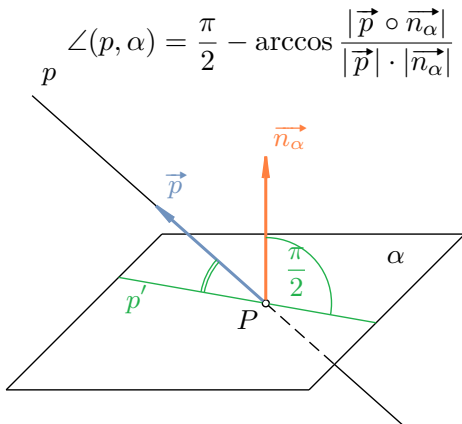
$$\angle(\alpha, \beta) = \arccos \frac{|\vec{n}_\alpha \circ \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha| \cdot |\vec{n}_\beta|}$$



Слика 13: Угао између две равни

Углови између правих и равни

- Угао између праве p и равни α је угао између праве p и њене нормалне пројекције p' на раван α .



Слика 14: Угао између праве и равни

Примери

Пример 16

Одредити тачку продора праве $p : \frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-5}{-4}$
кроз раван $\alpha : 3x + y + 5z - 7 = 0$.

Колики угао права p заклапа са равни α ?