УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Геометрија И–смер

део 5: Афине трансформације равни

Тијана Шукиловић

6. новембар 2020

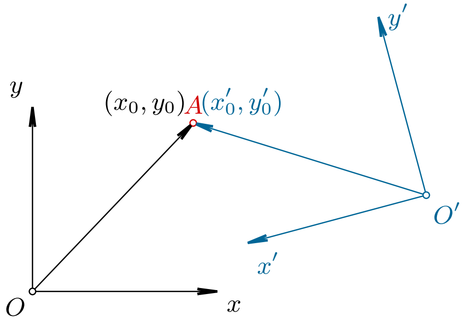
Дефиниција афиног пресликавања

Дефиниција 1.1

Нека је $\bar{f} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ линеарно пресликавање векторског простора који је придружен простору тачака $\mathbb{E}$.
Афино пресликавање $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ је пресликавање тачака које је индуковано пресликавањем $\bar{f}$ вектора у смислу да је:

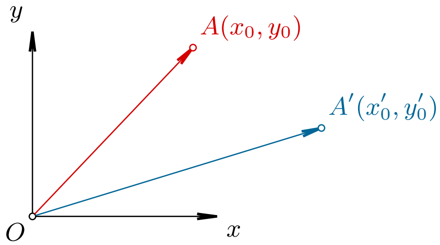
$$f(M) = M', \ \ f(N) = N' \quad \Longleftrightarrow \quad \bar{f}(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{M'N'}.$$

Пасивно и активно гледиште



Слика 1: Пасивно гледиште

Пасивно и активно гледиште



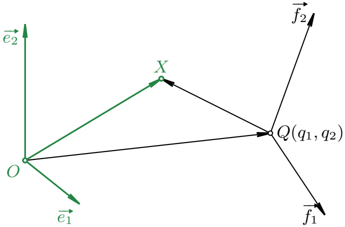
Слика 1: Активно гледиште

Трансформације координата вектора

- $e = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ – стара база
- $f = (\overrightarrow{f_1}, \dots, \overrightarrow{f_n})$ – нова база
- $C = C_{e \to f}$ – матрица преласка = матрица чије су колоне координате вектора нове базе f у старој бази e, редом.

$$[\overrightarrow{v}]_e = C[\overrightarrow{v}]_f$$

Трансформације координата тачака

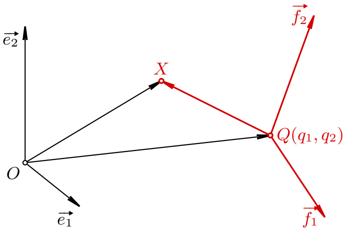


Слика 2: Трансформације координата тачака

$$\boxed{x} = Cx' + q$$

$$x = [X]_{Oe} = (x_1, x_2)^T$$

Трансформације координата тачака

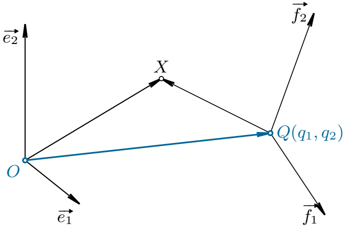


Слика 2: Трансформације координата тачака

$$x = C \boxed{x'} + q$$

$$x' = [X]_{Qf} = (x_1', x_2')^T$$

Трансформације координата тачака

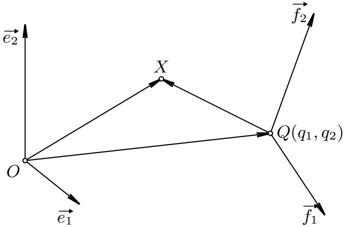


Слика 2: Трансформације координата тачака

$$x = \boxed{C}\, x' + \boxed{q}$$

$$C = C_{e\to f} \qquad q = [Q]_{Oe} = (q_1, q_2)^T$$

Трансформације координата тачака



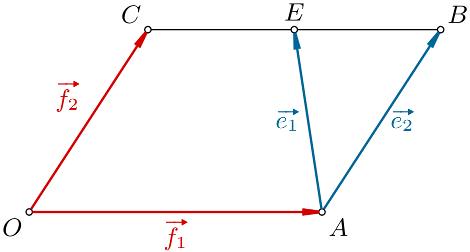
Слика 2: Трансформације координата тачака

$$x = \boxed{C}\, x' + \boxed{q}$$

линеарни део   транслаторни део

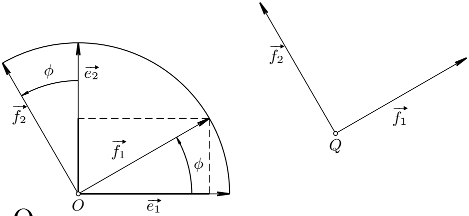
Примери

Пример 1



Слика 3: Одредити координате темена паралелограма у старом реперу Ae и новом реперу Of. Одредити везу између координата.

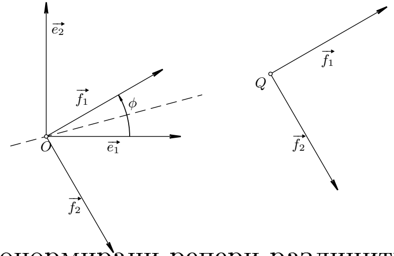
Трансформације ортонормираних репера равни



Слика 4: Ортонормирани репери истих оријентација

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\boxed{\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}}}_{\text{матрица ротације}} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}.$$

Трансформације ортонормираних репера равни

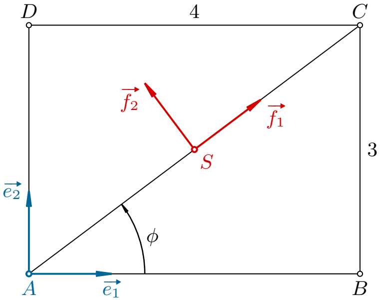


Слика 5: Ортонормирани репери различитих оријентација

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\boxed{\begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix}}}_{\text{матрица рефлексије}} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}.$$

Примери

Пример 2



Слика 6: Одредити везу координата као и координате темена правоугаоника у новом реперу.

Афина пресликавања равни

Дефиниција 3.1

Афино пресликавање равни $\mathbb{E}^2$:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \boxed{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}}, \quad \det(a_{ij}) \neq 0.$$

слике базних вектора

слика координатног почетка

Афина пресликавања равни

Дефиниција 3.1

Афино пресликавање равни $\mathbb{E}^2$:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \boxed{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}}, \quad \det(a_{ij}) \neq 0.$$

слике базних вектора

слика координатног почетка

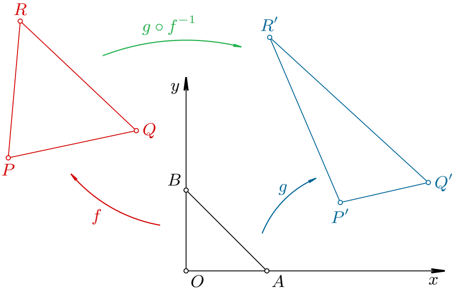
Пример 3

Одредити формуле афиног пресликавања f равни које тачке $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(0,1)$ пресликава редом у тачке $O'(2,2), A'(4,5), B'(3,1)$.

Особине афиних пресликавања

Теорема 3.1

Постоји јединствено афино пресликавање равни које пресликава три неколинеарне тачке P, Q, R у три неколинеарне тачке P', Q', R', редом.



Слика 7: Доказ теореме

Особине афиних пресликавања

Теорема 3.2 (Особине афиних пресликавања равни)

- Пресликавају праве у праве;

Особине афиних пресликавања

Теорема 3.2 (Особине афиних пресликавања равни)

- Пресликавају праве у праве;
- Чувају размеру колинеарних дужи;

Особине афиних пресликавања

Теорема 3.2 (Особине афиних пресликавања равни)

- Пресликавају праве у праве;
- Чувају размеру колинеарних дужи;
- Чувају паралелност правих;

Особине афиних пресликавања

Теорема 3.2 (Особине афиних пресликавања равни)

- Пресликавају праве у праве;
- Чувају размеру колинеарних дужи;
- Чувају паралелност правих;
- Однос површина слике и оригинала једнак је $\dfrac{P(\mathcal{F}')}{P(\mathcal{F})} = |\det(a_{ij})|$;

Особине афиних пресликавања

Теорема 3.2 (Особине афиних пресликавања равни)

- Пресликавају праве у праве;
- Чувају размеру колинеарних дужи;
- Чувају паралелност правих;
- Однос површина слике и оригинала једнак је $\dfrac{P(\mathcal{F}')}{P(\mathcal{F})} = |\det(a_{ij})|$;
- Пресликавања за која је $\det(a_{ij}) > 0$ чувају оријентацију, а за која је $\det(a_{ij}) < 0$ мењају оријентацију равни.

Примери

Пример 4

Дате су тачке $A(-1,-1)$, $B(1,-1)$, $C(1,1)$, $D(-1,1)$; $A'(4,5)$, $B'(8,7)$, $C'(6,9)$, $D'(2,7)$.

а) Одредити једначине афиног пресликавања које пресликава квадрат $ABCD$ у паралелограм $A'B'C'D'$.

б) Одредити једначину слике круга уписаног у квадрат. Која је то крива?

в) Колика је површина слике круга?

г) Да ли пресликавање чува оријентацију?

Представљање афиних пресликавања матрицама

A – линеарни део

b – транслаторни део

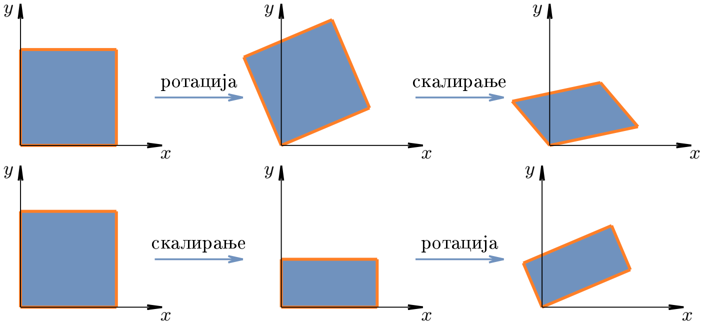
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \boxed{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\boxed{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}}_{A_b} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Представљање афиних пресликавања матрицама

Теорема 3.3

Производ матрица A_b одговара композицији афиних пресликавања.



Слика 8: Афина пресликавања не комутирају!

Транслација

Транслација $\mathcal{T}_{\vec{b}}$ за вектор $\overrightarrow{b}(b_1, b_2)$ дата je формулама:

$$x' = x + b_1,$$
$$y' = y + b_2,$$

или у матричном облику:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Транслација

Транслација $\mathcal{T}_{\vec{b}}$ за вектор $\vec{b}(b_1, b_2)$ дата је формулама:

$$x' = x + b_1,$$
$$y' = y + b_2,$$

или у матричном облику:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

- Како се представља линеарни део транслације?

Транслација

Транслација $\mathcal{T}_{\vec{b}}$ за вектор $\vec{b}(b_1, b_2)$ дата је формулама:

$$x' = x + b_1,$$
$$y' = y + b_2,$$

или у матричном облику:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

- Како се представља линеарни део транслације?
- Шта је композиција транслација?

Транслација

Транслација $\mathcal{T}_{\vec{b}}$ за вектор $\vec{b}(b_1, b_2)$ дата је формулама:

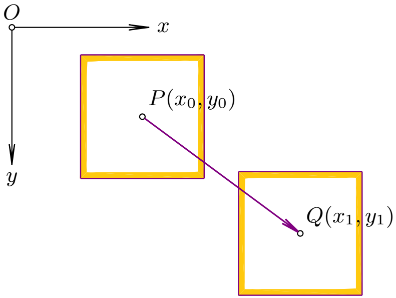
$$x' = x + b_1,$$
$$y' = y + b_2,$$

или у матричном облику:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

- Како се представља линеарни део транслације?
- Шта је композиција транслација?
- Да ли транслације комутирају?

Примери



Слика 9: „*Pan*” алатка

Пример 5

Представити као афину трансформацију „*pan*” алатку: Ако је миш притиснут у $P(x_0, y_0)$, а отпуштен у тачки $Q(x_1, y_1)$, слика се транслира из P у Q.

Ротација

Ротација око координатног почетка, за угао $\phi \in [0, 2\pi)$:

$$\mathcal{R}_\phi : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Ротација

Ротација око координатног почетка, за угао $\phi \in [0, 2\pi)$:

$$\mathcal{R}_\phi : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Ротација око произвољне тачке $Q(q_1, q_2)$ за угао ϕ:

$$\mathcal{R}_{Q,\phi} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{OQ}} \circ \mathcal{R}_\phi \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{QO}}.$$

Ротација

Ротација око координатног почетка, за угао $\phi \in [0, 2\pi)$:

$$\mathcal{R}_\phi : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Ротација око произвољне тачке $Q(q_1, q_2)$ за угао ϕ:

$$\mathcal{R}_{Q,\phi} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{OQ}} \circ \mathcal{R}_\phi \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{QO}}.$$

Пример 6

Одредити 3×3 матрицу ротације око тачке $S(1, -2)$ за угао од $\dfrac{2\pi}{3}$, као и формуле тог пресликавања.
У коју тачку се пресликава координатни почетак при овој ротацији?

Матрица ротације

$$R_\phi := \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$ – матрица ротације за угао ϕ.

Теорема 3.4

Особине матрице ротације:

- $(R_\phi)^{-1} = R_{-\phi} = (R_\phi)^T$;
- $\det R_\phi = 1$;
- $R_\phi R_\theta = R_{\phi+\theta} = R_\theta R_\phi$.

Рефлексија у односу на праву

Рефлексија у односу на праву p_0 кроз координатни почетак, која гради угао $\dfrac{\phi}{2}$ са x-осом:

$$\mathcal{S}_{p_0} : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Рефлексија у односу на праву

Рефлексија у односу на праву p_0 кроз координатни почетак, која гради угао $\dfrac{\phi}{2}$ са x-осом:

$$\mathcal{S}_{p_0} : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Рефлексија у односу на произвољу праву $p \parallel p_0$:

$$\mathcal{S}_p = \mathcal{T}_{\overrightarrow{OQ}} \circ \mathcal{S}_{p_0} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{QO}}.$$

Рефлексија у односу на праву

Рефлексија у односу на праву p_0 кроз координатни почетак, која гради угао $\dfrac{\phi}{2}$ са x-осом:

$$\mathcal{S}_{p_0} : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Рефлексија у односу на произвољу праву $p \parallel p_0$:

$$\mathcal{S}_p = \mathcal{T}_{\overrightarrow{OQ}} \circ \mathcal{S}_{p_0} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{QO}}.$$

Пример 7

Одредити формуле рефлексије у односу на праву:
а) $x = -1$; б) $y = 3$; в) $4x - 3y + 6 = 0$.

Матрица рефлексије

$$S_\phi := \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix}$$ – матрица рефлексије.

Теорема 3.5

Особине матрице рефлексије:

- $(S_\phi)^{-1} = (S_\phi)^T$;
- $S_\phi^2 = Id$;
- $\det S_\phi = -1$;
- $S_\phi S_\theta = R_{\phi-\theta}$.

Скалирање

Скалирање у правцу координатних оса, са центром у координатном почетку и коефицијентима $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$:

$$\mathcal{H}_{\lambda_1,\lambda_2} : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Скалирање

Скалирање у правцу координатних оса, са центром у координатном почетку и коефицијентима $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$:

$$\mathcal{H}_{\lambda_1,\lambda_2} : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Скалирање са центром у произвољној тачки:

$$\mathcal{H}_{Q,\lambda_1,\lambda_2} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{OQ}} \circ \mathcal{H}_{\lambda_1,\lambda_2} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{QO}}.$$

Примери

- За које вредности λ_1 и λ_2 је скалирање $\mathcal{H}_{\lambda_1,\lambda_2}$ рефлексија у односу на x-осу (y-осу)?

Примери

- За које вредности λ_1 и λ_2 је скалирање $\mathcal{H}_{\lambda_1,\lambda_2}$ рефлексија у односу на x-осу (y-осу)?
- За које вредности λ_1 и λ_2 је скалирање $\mathcal{H}_{Q,\lambda_1,\lambda_2}$ централна рефлексија у односу на тачку Q?

Примери

- За које вредности λ_1 и λ_2 је скалирање $\mathcal{H}_{\lambda_1,\lambda_2}$ рефлексија у односу на x-осу (y-осу)?
- За које вредности λ_1 и λ_2 је скалирање $\mathcal{H}_{Q,\lambda_1,\lambda_2}$ централна рефлексија у односу на тачку Q?
- За које вредности λ_1 и λ_2 је скалирање хомотетија?

Примери

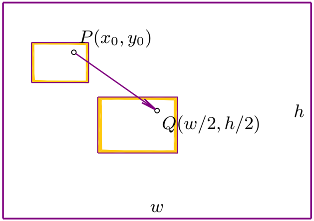
- За које вредности λ_1 и λ_2 је скалирање $\mathcal{H}_{\lambda_1,\lambda_2}$ рефлексија у односу на x-осу (y-осу)?
- За које вредности λ_1 и λ_2 је скалирање $\mathcal{H}_{Q,\lambda_1,\lambda_2}$ централна рефлексија у односу на тачку Q?
- За које вредности λ_1 и λ_2 је скалирање хомотетија?
- Да ли скалирање чува однос дужине и ширине, углове? А хомотетија?

Примери

Пример 8

Представити као афине трансформације следеће догађаје:

- „*Zoom in*": Кликом миша у тачку $P(x_0, y_0)$, слика се увећава λ пута, а тачка P постаје центар екрана резолуције $w \times h$.



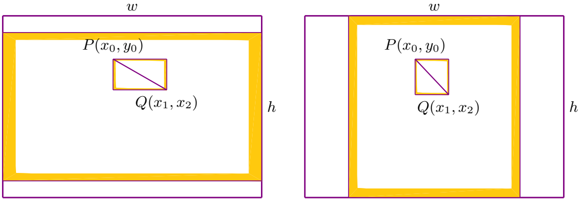
Слика 10: „*Zoom in*" алатка

Примери

Пример 8

Представити као афине трансформације следеће догађаје:

- „*Zoom to window*": Миш је притиснут у тачки $P(x_0, y_0)$, а отпуштен у тачки $Q(x_1, y_1)$. Увећати прозор са дијагоналом PQ преко целог екрана. При томе водити рачуна да се увећана слика уклопи у екран или по ширини, или по висини – у зависности од пропорција прозора. Сматрати да је екран резолуције $1920 : 1080 = 16 : 9$.



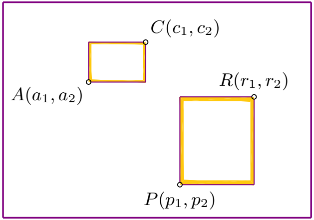
Слика 10: „*Zoom to window*" алатка

Примери

Пример 8

Представити као афине трансформације следеће догађаје:

- Пресликати прозор чије су лево-доње теме $A(a_1, a_2)$ и горње-десно теме $C(c_1, c_2)$ у прозор одређен дијагоналним теменима $P(p_1, p_2)$ и $R(r_1, r_2)$.



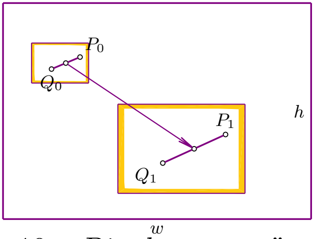
Слика 10: Прозор

Примери

Пример 8

Представити као афине трансформације следеће догађаје:

- „*Pinch to zoom*": У почетном тренутку додир једног прста је регистрован у тачки P_0, а другог у тачки Q_0. У следећем тренутку први прст се налази у тачки P_1, а други у тачки Q_1. Увећати слику за однос дужина $\lambda = P_1Q_1 : P_0Q_0$, при чему се средиште дужи P_0Q_0 пресликава у средиште дужи P_1Q_1.



Слика 10: „*Pinch to zoom*" алатка

Смицање

Смицање са коефицијентом λ у правцу x-осе:

$$\mathcal{S}_x(\lambda) : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Смицање

Смицање са коефицијентом λ у правцу x-осе:

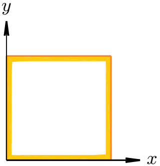
$$\mathcal{S}_x(\lambda) : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Смицање са коефицијентом λ у правцу y-осе:

$$\mathcal{S}_y(\lambda) : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Реализација ротације помоћу смицање

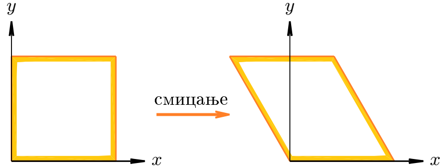
$$\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\cos\phi - 1}{\sin\phi} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sin\phi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\cos\phi - 1}{\sin\phi} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Слика 11: Реализација ротације помоћу три смицања

Реализација ротације помоћу смицање

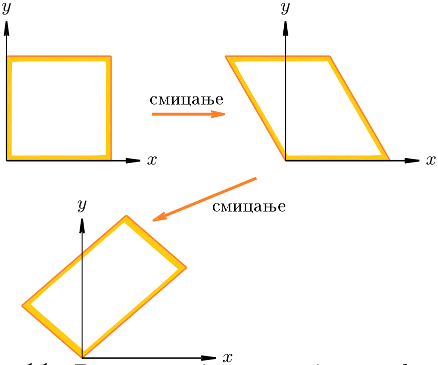
$$\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\cos\phi - 1}{\sin\phi} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sin\phi & 1 \end{pmatrix} \color{red}{\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\cos\phi - 1}{\sin\phi} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$



Слика 11: Реализација ротације помоћу три смицања

Реализација ротације помоћу смицање

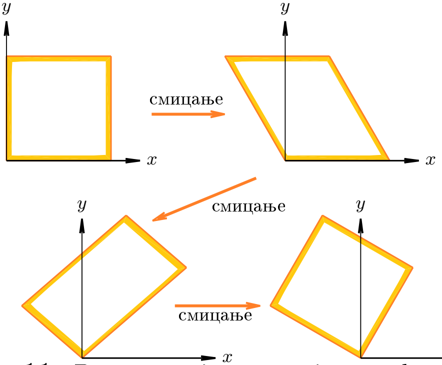
$$\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\cos\phi - 1}{\sin\phi} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sin\phi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\cos\phi - 1}{\sin\phi} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Слика 11: Реализација ротације помоћу три смицања

Реализација ротације помоћу смицање

$$\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\cos\phi - 1}{\sin\phi} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sin\phi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\cos\phi - 1}{\sin\phi} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Слика 11: Реализација ротације помоћу три смицања

Изометрије

Дефиниција 3.2

Пресликавања која чувају дужину у еуклидском простору $\mathbb{E}$ произвољне димензије називају се изометрије.

Изометрије

Дефиниција 3.2

Пресликавања која чувају дужину у еуклидском простору $\mathbb{E}$ произвољне димензије називају се изометрије.
Изометрије које чувају оријентацију зову се кретања.

Изометрије

Дефиниција 3.2

Пресликавања која чувају дужину у еуклидском простору $\mathbb{E}$ произвољне димензије називају се изометрије.
Изометрије које чувају оријентацију зову се кретања.

Теорема 3.6

Транслација, ротација око произвољне тачке и рефлексија у односу на произвољну праву су изометрије равни.

Изометрије

Дефиниција 3.2

Пресликавања која чувају дужину у еуклидском простору $\mathbb{E}$ произвољне димензије називају се изометрије.
Изометрије које чувају оријентацију зову се кретања.

Теорема 3.6

Транслација, ротација око произвољне тачке и рефлексија у односу на произвољну праву су изометрије равни.

Које трансформације равни су кретања?