УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Геометрија И–смер

део 6: Афине трансформације простора и пројекције

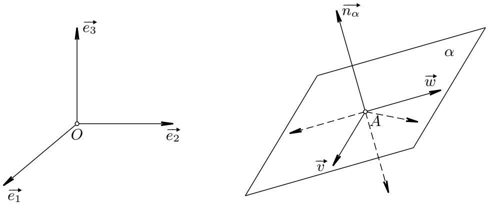
Тијана Шукиловић

16. новембар 2020

Избор координатног система везаног за раван

$$\boxed{\alpha : \; ax + by + cz + d = 0} \longrightarrow \boxed{\alpha' : \; z' = 0}$$

WCS UCS

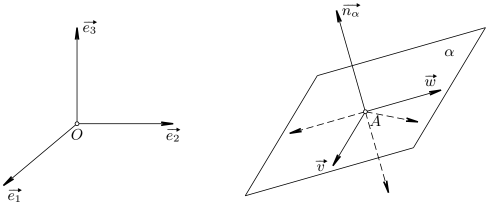


Слика 1: Координатни систем прилагођен датој равни

Избор координатног система везаног за раван

$$\boxed{\alpha : \ ax + by + cz + d = 0} \longrightarrow \boxed{\alpha' : \ z' = 0}$$

WCS UCS



Слика 1: Координатни систем прилагођен датој равни

Пример 1

Одредити ортонормирани координатни систем (x', y', z') у односу на раван $\alpha : x - y - 2 = 0$ и написати везу тих координата са координатама (x, y, z).

Афина пресликавања простора

Анимација: Афине трансформације простора

Тачка $M(x, y, z)$ простора се пресликава у тачку $M'(x', y', z')$ по правилу:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad \det(a_{ij}) \neq 0.$$

Афина пресликавања простора

Анимација: Афине трансформације простора

Тачка $M(x, y, z)$ простора се пресликава у тачку $M'(x', y', z')$ по правилу:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad \det(a_{ij}) \neq 0.$$

Пресликавање се представља 4×4 матрицом:

$$A_b := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Изометрије простора

Теорема 1.1

Свака изометрија простора $\mathbb{E}^n$ је афино пресликавање.

Изометрије простора

Теорема 1.1

Свака изометрија простора $\mathbb{E}^n$ је афино пресликавање.

Теорема 1.2

Афино пресликавање f је изометрија акко $AA^T = A^T A = E$.

Изометрије простора

Теорема 1.1

Свака изометрија простора $\mathbb{E}^n$ је афино пресликавање.

Теорема 1.2

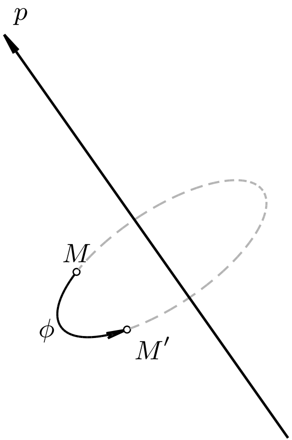
Афино пресликавање f је изометрија акко $AA^T = A^T A = E$.

Теорема 1.3 (Особине изометрија простора)

Следећа тврђења су еквивалентна за $f : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$:

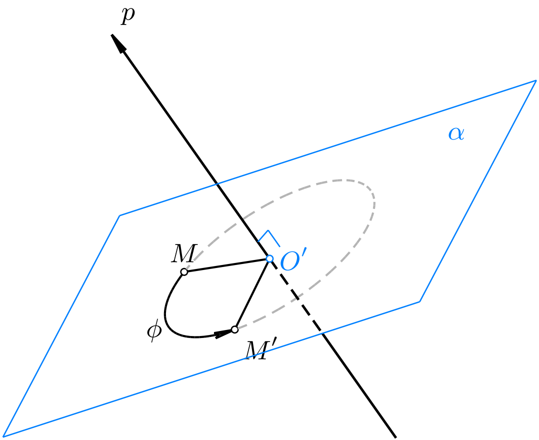
- f је изометрија (чува дужине);
- f чува скаларни производ;
- f пресликава ортонормирану базу у ортонормирану базу.

Ротације око праве у простору



Слика 2: Ротација око праве p за угао ϕ

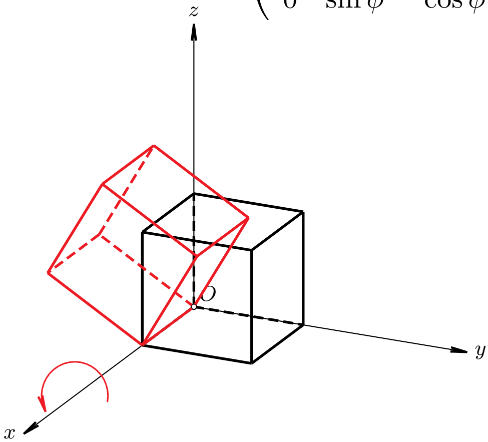
Ротације око праве у простору



Слика 2: Ротација око праве p за угао ϕ

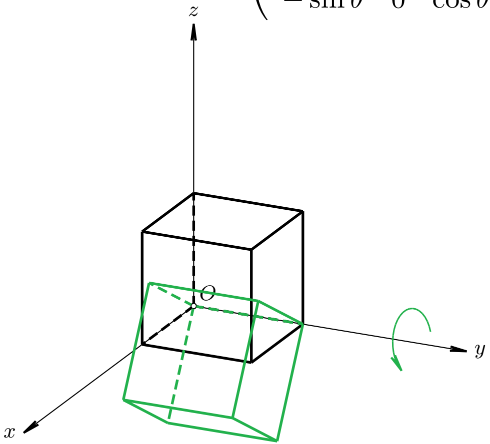
Ротација око координатних оса

$$[\mathcal{R}_{Ox}(\phi)]_e = R_x(\phi) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$



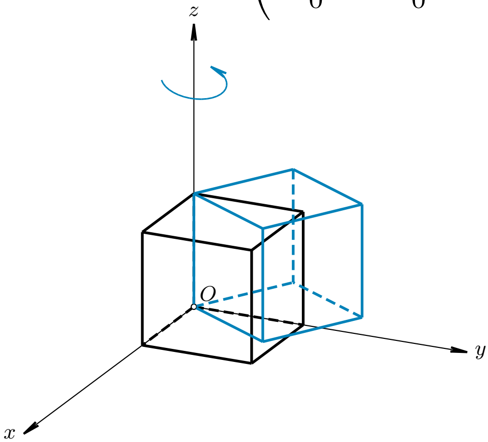
Ротација око координатних оса

$$[\mathcal{R}_{Oy}(\theta)]_e = R_y(\theta) := \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$



Ротација око координатних оса

$$[\mathcal{R}_{Oz}(\psi)]_e = R_z(\psi) := \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Формуле ротације око праве у простору

Теорема 1.4 (Формула Родригеза)

Матрица ротације $[\mathcal{R}_p(\phi)]_e$, у стандардној бази e, за угао ϕ око праве p_0 која садржи координатни почетак је:

$$[\mathcal{R}_{p_0}(\phi)]_e = \; pp^T + \cos\phi\,(E - pp^T) + \sin\phi\, p_\times,$$

где је $p_\times$ матрица векторског множења јединичним вектором p:

$$p_\times := \begin{pmatrix} 0 & -p_3 & p_2 \\ p_3 & 0 & -p_1 \\ -p_2 & p_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ротација око произвољне праве

Ротација око произвољне праве $p \parallel p_0$, $P \in p$:

$$\mathcal{R}_p(\phi) = \mathcal{T}_{\overrightarrow{OP}} \circ \mathcal{R}_{p_0}(\phi) \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{PO}}.$$

Ротација око произвољне праве

Ротација око произвољне праве $p \parallel p_0$, $P \in p$:

$$\mathcal{R}_p(\phi) = \mathcal{T}_{\overrightarrow{OP}} \circ \mathcal{R}_{p_0}(\phi) \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{PO}}.$$

Пример 2

Одредити формуле ротације за угао $\phi = \dfrac{3\pi}{2}$ око праве p у простору која садржи тачку $Q(1,0,0)$ и има вектор правца $\overrightarrow{p} = (1,2,2)$.

Рефлексија у односу на раван

Теорема 1.5

Матрица рефлексије $[\mathcal{S}_\alpha]_e$, у стандардној бази e, у односу на раван α која садржи координатни почетак O, и чији јединични нормални вектор има колону координата p, је дата са:

$$[\mathcal{S}_\alpha]_e = E - 2pp^T.$$

Рефлексија у односу на раван

Теорема 1.5

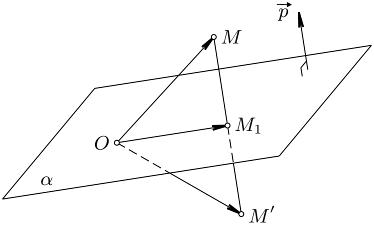
Матрица рефлексије $[\mathcal{S}_\alpha]_e$, у стандардној бази e, у односу на раван α која садржи координатни почетак O, и чији јединични нормални вектор има колону координата p, је дата са:

$$[\mathcal{S}_\alpha]_e = E - 2pp^T.$$

Ако раван $\beta \parallel \alpha$ не садржи координатни почетак, него неку тачку B, тада се рефлексија S_β представља са:

$$\mathcal{S}_\beta = \mathcal{T}_{\overrightarrow{OB}} \circ \mathcal{S}_\alpha \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{BO}}.$$

Примери



Слика 4: Рефлексија у односу на раван кроз O

Пример 3

Одредити формуле рефлексије у односу на раван $\alpha : 2x - y + 2z = 0$.

Ојлерове теореме

Теорема 1.6 (I Ојлерова)

Свако кретање f простора $\mathbb{E}^3$ које има фиксну неку тачку O' је ротација око неке оријентисане праве p која садржи O', за угао $\phi \in [0, 2\pi)$.

Ојлерове теореме

Теорема 1.6 (I Ојлерова)

Свако кретање f простора $\mathbb{E}^3$ које има фиксну неку тачку O' је ротација око неке оријентисане праве p која садржи O', за угао $\phi \in [0, 2\pi)$.

Теорема 1.7 (II Ојлерова)

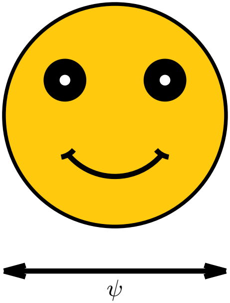
Свако кретање f простора $\mathbb{E}^3$ које чува координатни почетак може се представити као композиција три сопствене ротације око координатних оса:

$$f = \mathcal{R}_{Ox_2}(\phi) \circ \mathcal{R}_{Oy_1}(\theta) \circ \mathcal{R}_{Oz}(\psi),$$

где су $\psi, \phi \in [0, 2\pi), \theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, тзв. Ојлерови или Тејт-Брајанови углови.

Ојлерови углови

ψ – угао скретања (енг. yaw)

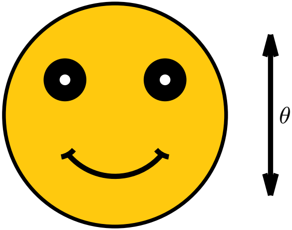


Слика 5: Скретање

Ојлерови углови

ψ – угао скретања (енг. yaw)

θ – угао пропињања (енг. pitch)



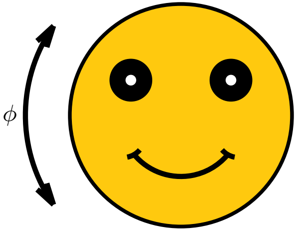
Слика 5: Пропињање

Ојлерови углови

ψ – угао скретања (енг. yaw)

θ – угао пропињања (енг. pitch)

ϕ – угао ваљања (енг. roll)



Слика 5: Ваљање

Веза сопствених и светских ротација

Анимација: Ојлерови углови

Веза сопствених и светских ротација

Анимација: Ојлерови углови

Пажња!!!
У II Ојлеровој теореми ротације се изводе у сопственом координатном систему (везаном за објекат).

Веза сопствених и светских ротација

Анимација: Ојлерови углови

Пажња!!!
У II Ојлеровој теореми ротације се изводе у сопственом координатном систему (везаном за објекат).

Теорема 1.8 (Веза сопствених и светских ротација)

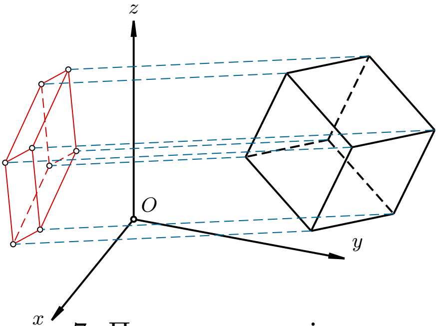
$$[\mathcal{R}_{Ox_2}(\phi) \circ \mathcal{R}_{Oy_1}(\theta) \circ \mathcal{R}_{Oz}(\psi)]_e = [f]_e = R_z(\psi)R_y(\theta)R_x(\phi).$$

Пројектовање

Слика: Алтамира, Шпанија

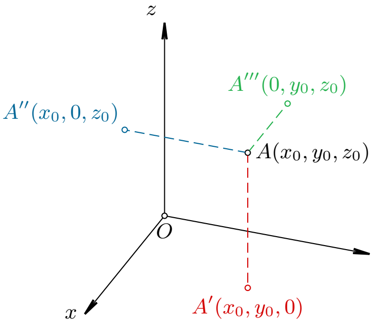
Паралелно пројектовање

- $f : \mathbb{E}^3 \longrightarrow \mathbb{E}^2$
  - паралелно пројектовање (специјално: ортогонална пројекција)



Слика 7: Паралелно пројектовање

Ортогонална пројекција на координатне равни

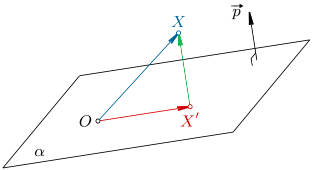


Слика 8: Ортогонална пројекција

Пример 4

Одредити ортогоналну пројекцију квадрата $ABCD$, $A(1, 2, -1)$, $B(-1, 0, 2)$, $D(3, 1, 1)$, на xy-раван.

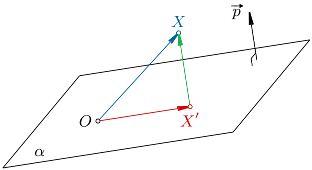
Ортогонална пројекција на произвољну раван



Слика 9: Ортогонална пројекција

$$X' = (E - pp^T)X, \quad p = [\vec{p}], \ \vec{p} \text{ – јединични}$$

Ортогонална пројекција на произвољну раван



Слика 9: Ортогонална пројекција

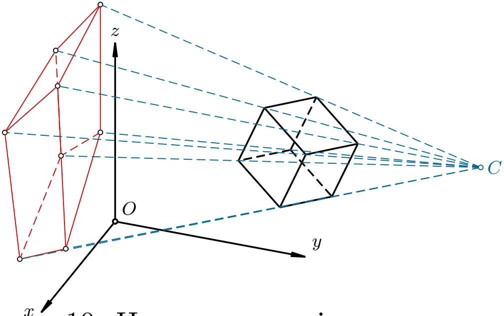
$$X' = (E - pp^T)X, \quad p = [\vec{p}], \ \vec{p} \text{ – јединични}$$

Пример 5

Одредити ортогоналну пројекцију квадрата из Примера 4 на раван $\alpha : 3y - z = 0$.

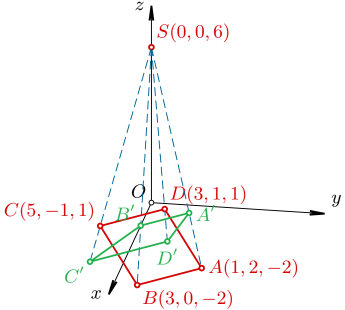
Централно пројектовање

- $f : \mathbb{E}^3 \longrightarrow \mathbb{E}^2$
  - централно пројектовање



Слика 10: Централно пројектовање

Централна пројекција



Слика 11: Централна пројекција

Пример 6

Одредити централну пројекцију квадрата $ABCD$, $A(1,2,-2)$, $B(3,0,-2)$, $D(3,1,1)$, из тачке $S(0,0,6)$ на xy-раван.

Пројектовање

- $f:\ \mathbb{E}^3 \longrightarrow \mathbb{E}^2$
  - паралелно пројектовање (специјално: ортогонална пројекција)
  - централно пројектовање

Пројектовање

- $f: \mathbb{E}^3 \longrightarrow \mathbb{E}^2$
  - паралелно пројектовање (специјално: ортогонална пројекција)
  - централно пројектовање
- Да ли је f бијекција?

Пројектовање

- $f: \mathbb{E}^3 \longrightarrow \mathbb{E}^2$
  - паралелно пројектовање (специјално: ортогонална пројекција)
  - централно пројектовање

- Да ли је f бијекција?
- Да ли је f изометрија?

Пројектовање

- $f: \ \mathbb{E}^3 \longrightarrow \mathbb{E}^2$
  - паралелно пројектовање (специјално: ортогонална пројекција)
  - централно пројектовање

- Да ли je f бијекција?
- Да ли je f изометрија?
- Да ли f чува колинеарност, паралелност, углове, средиште дужи?

Пројекција сфере на раван

- Шта све може бити ортогонална пројекција сфере на раван?

Пројекција сфере на раван

- Шта све може бити ортогонална пројекција сфере на раван?
- Шта све може бити централна пројекција сфере на раван?

Пројекција сфере на раван

- Шта све може бити ортогонална пројекција сфере на раван?
- Шта све може бити централна пројекција сфере на раван?

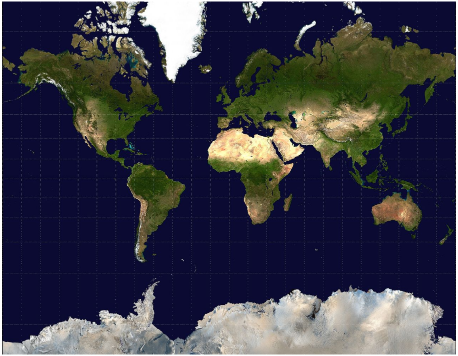
- Картографске пројекције:

Пројекција сфере на раван

- Шта све може бити ортогонална пројекција сфере на раван?
- Шта све може бити централна пројекција сфере на раван?

- Картографске пројекције:
  - конформне (чувају углове)
  - еквивалентне (чувају однос површина)
  - еквидистантне (чувају растојања)

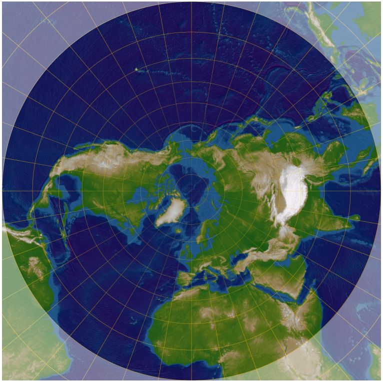
Конформне пројекције



Слика: Меркаторова пројекција

извор слика: Wikipedia

Конформне пројекције



Слика: Стереографска пројекција

извор слика: Wikipedia

Конформне пројекције

Слика: Ламбертова пројекција (конусна)

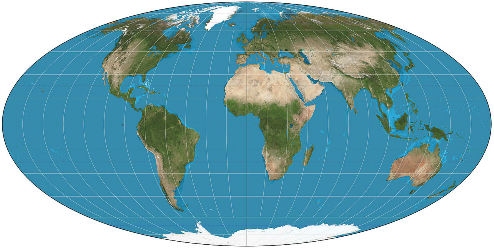
извор слика: Wikipedia

Еквивалентне пројекције

Слика: Бонеова пројекција

извор слика: Wikipedia

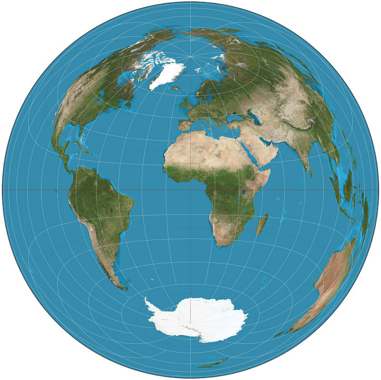
Еквивалентне пројекције



Слика: Молвеиде пројекција

извор слика: Wikipedia

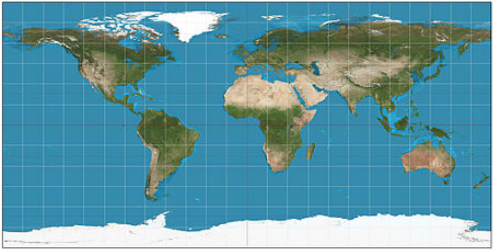
Еквивалентне пројекције



Слика: Ламбертова пројекција (азимутална)

извор слика: Wikipedia

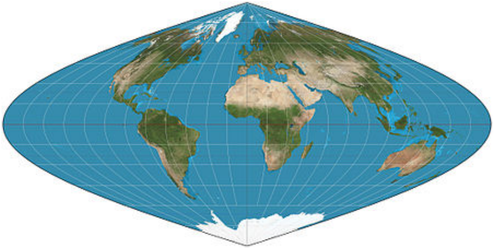
Еквидистантне пројекције



Слика: Географска пројекција (чува растојања дуж меридијана)

извор слика: Wikipedia

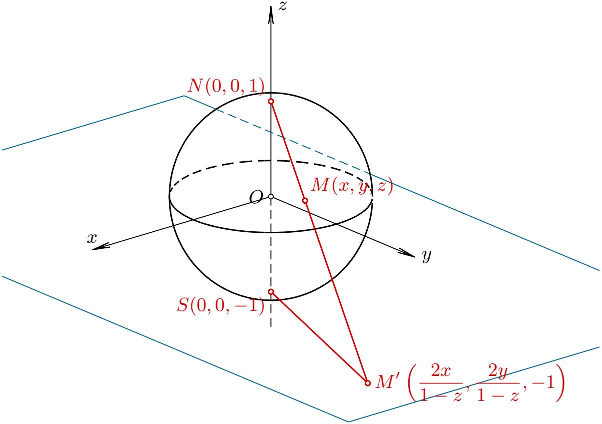
Еквидистантне пројекције



Слика: Синусоидална пројекција (чува растојања дуж паралела)

извор слика: Wikipedia

Стереографска пројекција



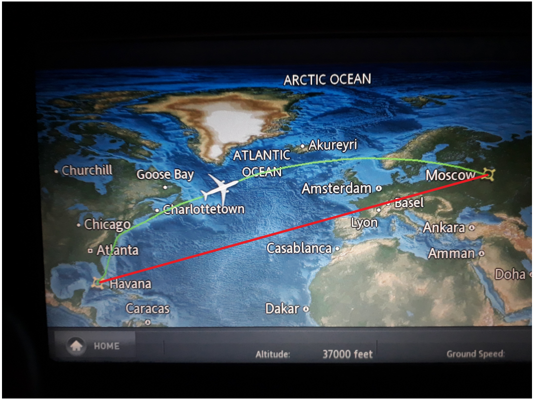
Слика 15: Стереографска пројекција са северног пола на раван $z=-1$

Особине стереографске пројекције

- Шта је слика круга који припада сфери, а садржи северни пол?
- Специјално, у шта се сликају паралеле?
- Шта је слика меридијана?
- Да ли се чувају углови?
- Да ли се чува однос површина?
- Да ли се чувају растојања дуж меридијана? А дуж паралела?

Неки интересантни проблеми на сфери

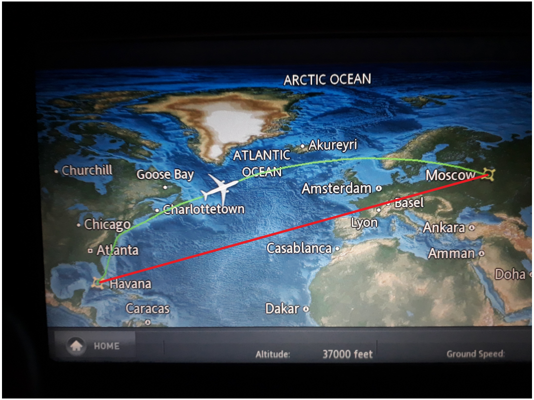
- Најкраћи пут између две тачке на сфери.



Слика: Најкраћи пут између Хаване и Москве

Неки интересантни проблеми на сфери

- Најкраћи пут између две тачке на сфери.
  - Колика је дужина зеленог пута? А црвеног?

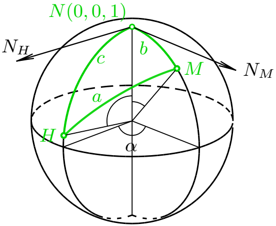


Слика: Најкраћи пут између Хаване и Москве

Неки интересантни проблеми на сфери

- Најкраћи пут између две тачке на сфери.
  - Москва ($55.8°\ N$, $37.6°\ E$), Хавана ($23.1°\ N$, $82.4°\ W$)
    Основна формула сферне геометрије

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$



Слика 16: Најкраће растојање на сфери

Неки интересантни проблеми на сфери

- Најкраћи пут између две тачке на сфери.

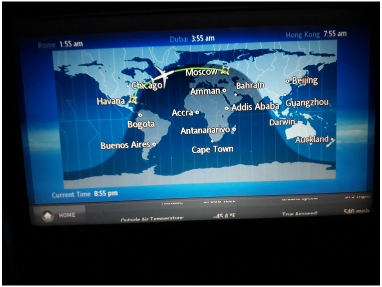
Слика: Геодезијска линија

Неки интересантни проблеми на сфери

- Ако је у Београду јун, око $2h$ ујутро, осенчити на карти делове у којима је ноћ.

Неки интересантни проблеми на сфери

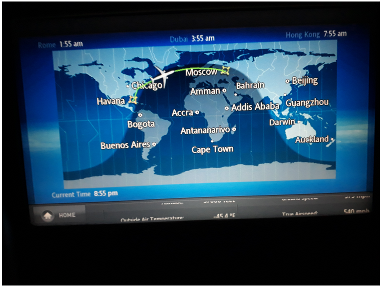
- Ако је у Београду јун, око $2h$ ујутро, осенчити на карти делове у којима је ноћ.



Слика: Летњи изглед расподеле дана и ноћи

Неки интересантни проблеми на сфери

- Ако је у Београду јун, око $2h$ ујутро, осенчити на карти делове у којима је ноћ.



Слика: Летњи изглед расподеле дана и ноћи

- Како ова слика изгледа у септембру?