УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Геометрија И–смер

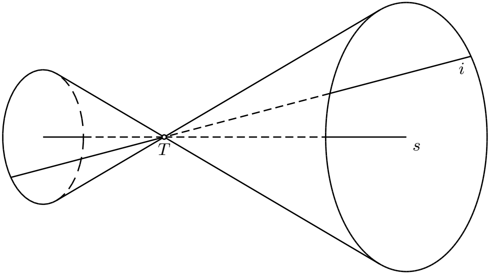
део 4: Криве у равни

Тијана Шукиловић

3. децембар 2019

Конус

Нека су i и s две праве у простору које се секу у тачки T. Кружни конус са теменом T је површ која се добија ротацијом праве i око осе s.
Ротирана права i (у разним положајима) назива се изводница конуса, а права s се назива оса конуса.



Слика 1: Кружни конус

Конусни пресек

Дефиниција 1.1

Конусни пресек је пресек конуса са произвољном равни α.

Конусни пресеци:

- круг;
- елипса;
- хипербола;
- парабола.

Конике

Дефиниција 1.2

Коника је пресек конуса са равни α која НЕ садржи теме конуса.

Теорема 1.1

У равни α конике постоје права d и тачка F такве да је однос растојања

$$\frac{MF}{d(M,d)} = e = const$$

произвољне тачке M конике од тачке F и праве d константан.

Ексцентрицитет конике

Дефиниција 1.3

Број $e \geq 0$ назива се ексцентрицитет конике,

Ексцентрицитет конике

Дефиниција 1.3

Број $e \geq 0$ назива се ексцентрицитет конике, тачка F жижа,

Ексцентрицитет конике

Дефиниција 1.3

Број $e \geq 0$ назива се ексцентрицитет конике, тачка F жижа, а права d директриса конике.

Ексцентрицитет конике

Дефиниција 1.3

Број $e \geq 0$ назива се ексцентрицитет конике, тачка F жижа, а права d директриса конике.

Ексцентрицитет одређује тип конике:

- за $e = 0$ – круг;
- за $0 < e < 1$ – елипса;
- за $e = 1$ – парабола;
- за $e > 1$ – хипербола.

Примери коника у природи

- Путања косог хица је парабола.

Примери коника у природи

- Путања косог хица је парабола.
- Сенка кружног предмета на раван зид је коника.

Примери коника у природи

- Путања косог хица је парабола.
- Сенка кружног предмета на раван зид је коника.
- Сунчева сенка врха штапа у току дана је коника.

Слика: Мост „Сунчани сат”, Калифорнија

Кеплерови закони

Johannes Kepler, 1571–1630

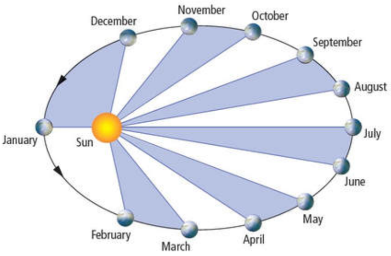
- 1. Кеплеров закон:
  Тела Сунчевог система се крећу око Сунца по коници, а Сунце се налази у жижи те конике.

Слика: 1. Кеплеров закон

Кеплерови закони

Johannes Kepler, 1571–1630

- 1. Кеплеров закон:
  Тела Сунчевог система се крећу око Сунца по коници, а Сунце се налази у жижи те конике.
- 2. Кеплеров закон:
  Радијус вектор планете у односу на Сунце у једнаким временским интервалима опише једнаке површине.



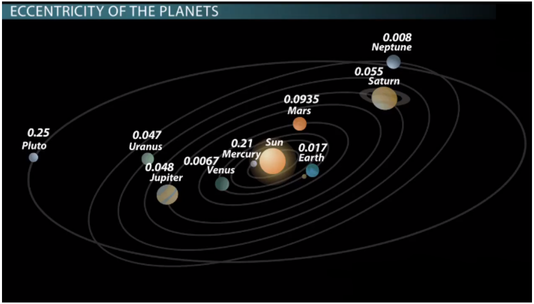
Слика: 2. Кеплеров закон

Кеплерови закони

Johannes Kepler, 1571–1630

- 1. Кеплеров закон:
  Тела Сунчевог система се крећу око Сунца по коници, а Сунце се налази у жижи те конике.
- 2. Кеплеров закон:
  Радијус вектор планете у односу на Сунце у једнаким временским интервалима опише једнаке површине.
- 3. Кеплеров закон: $T^2 \sim a^3$.

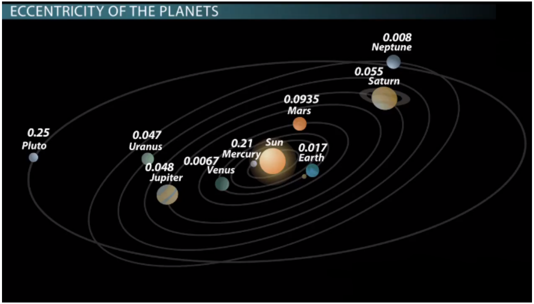
Примери коника у природи



Слика: Орбите планета Сунчевог система

- Да ли Сунце мирује? Шта утиче на орбиту планете?

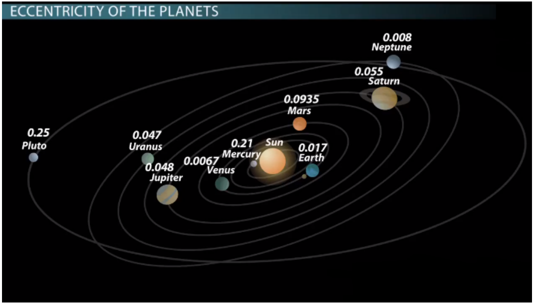
Примери коника у природи



Слика: Орбите планета Сунчевог система

- Да ли Сунце мирује? Шта утиче на орбиту планете?
- Шта је то ретроградни Меркур (у физици)?

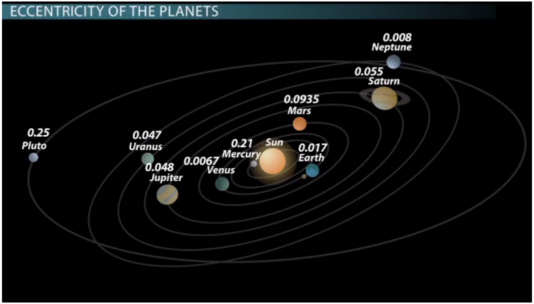
Примери коника у природи



Слика: Орбите планета Сунчевог система

- Да ли Сунце мирује? Шта утиче на орбиту планете?
- Шта је то ретроградни Меркур (у физици)? YouTube

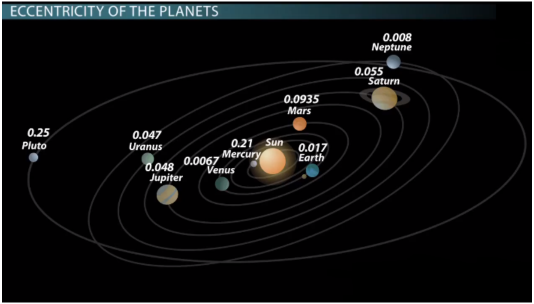
Примери коника у природи



Слика: Орбите планета Сунчевог система

- Да ли Сунце мирује? Шта утиче на орбиту планете?
- Шта је то ретроградни Меркур (у физици)?
- Који астрономски објекти у нашем Сунчевом систему имају скоро параболичне путање?

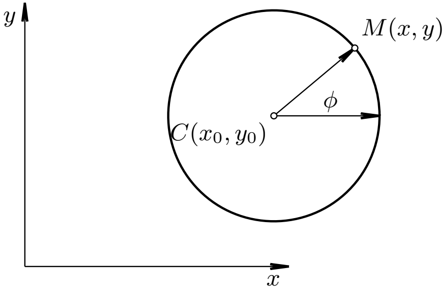
Примери коника у природи



Слика: Орбите планета Сунчевог система

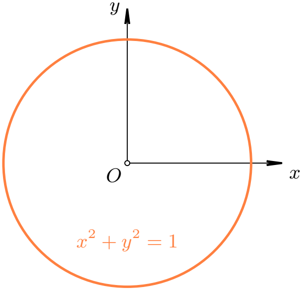
- Да ли Сунце мирује? Шта утиче на орбиту планете?
- Шта је то ретроградни Меркур (у физици)?
- Који астрономски објекти у нашем Сунчевом систему имају скоро параболичне путање?
  Одговор: на пример, Халејева комета ($e \approx 0.967$)

Круг

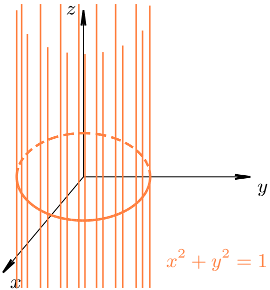


Слика 4: Круг са центром у тачки $C(x_0,y_0)$ и полупречником r

Једначине круга у равни и простору

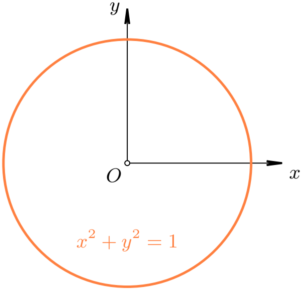


Slika 5: Круг

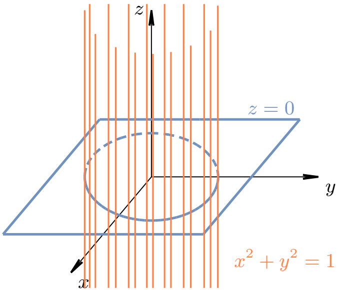


Slika 6: Цилиндар

Једначине круга у равни и простору



Слика 5: Круг



Слика 6: Цилиндар $\longrightarrow$ круг

Имплицитна и параметарска једначина круга

- Имплицитна једначина круга:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Имплицитна и параметарска једначина круга

- Имплицитна једначина круга:

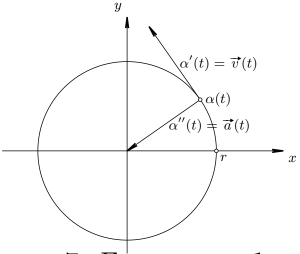
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

- Параметарска једначина круга:

$$x = x_0 + r\cos\theta, \quad y = y_0 + r\sin\theta, \quad \theta \in [0, 2\pi),$$

θ је угао између вектора положаја тачке и позитивног дела x-осе.

Брзина и убрзање



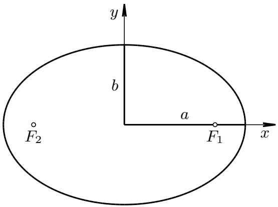
Слика 7: Брзина и убрзање

$$\alpha(t) = (r\cos t,\ r\sin t)\,, t \in [0, 2\pi).$$

- Кружно кретање константном угаоном брзином:
  - t – време;
  - $\vec{v} = \alpha'(t)$ – брзина;
  - $\vec{a} = \alpha''(t)$ – убрзање;
  - $\vec{F} = m\vec{a}$ – центрипетална сила.

Предавања професора Волтера Левина са MIT-а (YouTube)

Елипса



Слика 8: Елипса

Канонска једначина елипсе:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > b > 0.$$

Елементи елипсе

- $a > b > 0$ – полуосе елипсе;

Елементи елипсе

- $a > b > 0$ – полуосе елипсе;
- $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ – жиже елипсе;

Елементи елипсе

- $a > b > 0$ – полуосе елипсе;
- $F_1(c, 0),\ F_2(-c, 0),\ c = \sqrt{a^2 - b^2}$ – жиже елипсе;
- $d_1 : x = \dfrac{a}{e},\ d_2 : x = -\dfrac{a}{e}$ – директрисе елипсе;

Елементи елипсе

- $a > b > 0$ – полуосе елипсе;
- $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ – жиже елипсе;
- $d_1 : x = \dfrac{a}{e}$, $d_2 : x = -\dfrac{a}{e}$ – директрисе елипсе;
- $e = \dfrac{c}{a}$ – ексцентрицитет елипсе.

Елементи елипсе

- $a > b > 0$ – полуосе елипсе;
- $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ – жиже елипсе;
- $d_1 : x = \frac{a}{e}$, $d_2 : x = -\frac{a}{e}$ – директрисе елипсе;
- $e = \frac{c}{a}$ – ексцентрицитет елипсе.

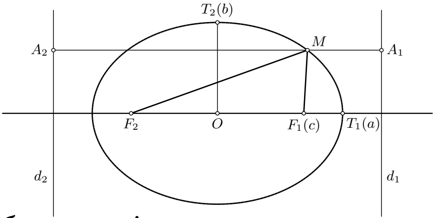
- за $a = b$ елипса je круг!

Фокусне особине елипсе

Теорема 1.2

Збир растојања произвољне тачке елипсе од њених жижа је константан:

$$MF_1 + MF_2 = 2a.$$



Слика 9: Збир растојања тачке елипсе од њених жижа

- Фокусне особине елипсе

Примери

Пример 1

Ако је ексцентрицитет Марса $e = 0.0934$ и растојање између жижа $2c \approx 0.2847AJ$ $(1AJ = 1.5 \times 10^8 km)$, одредити најмање (перихел) и највеће (афел) растојање Марса од Сунца.

$$P = a - c, \quad A = a + c, \quad a = \frac{c}{e}$$

Колике су ове вредности за Земљу?

За коју планету Сунчевог система је однос $P : A$ максималан/минималан?

Колико је потребно Марсу да обиђе око Сунца?

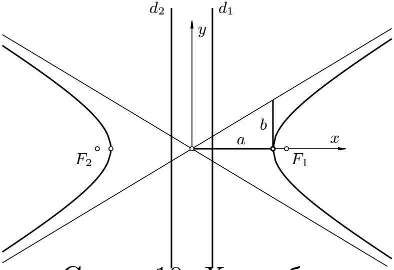
Параметарска једначина елипсе

- Параметарска једначина елипсе:

$$x = a\cos\theta, \quad y = b\sin\theta, \quad \theta \in [0, 2\pi),$$

a, b су полуосе елипсе, али θ НИЈЕ угао између вектора положаја тачке и позитивног дела x-осе.

Хипербола



Слика 10: Хипербола

Канонска једначина хиперболе:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Елементи хиперболе

- $a, b > 0$ – полуосе хиперболе;

Елементи хиперболе

- $a, b > 0$ – полуосе хиперболе;
- $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$, $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ – жиже хиперболе;

Елементи хиперболе

- $a, b > 0$ – полуосе хиперболе;
- $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$, $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ – жиже хиперболе;
- $d_1 : x = \dfrac{a}{e}$, $d_2 : x = -\dfrac{a}{e}$ – директрисе хиперболе;

Елементи хиперболе

- $a, b > 0$ – полуосе хиперболе;
- $F_1(c, 0),\ F_2(-c, 0),\ c = \sqrt{a^2 + b^2}$ – жиже хиперболе;
- $d_1 : x = \dfrac{a}{e},\ d_2 : x = -\dfrac{a}{e}$ – директрисе хиперболе;
- $e = \dfrac{c}{a}$ – ексцентрицитет хиперболе;

Елементи хиперболе

- $a, b > 0$ – полуосе хиперболе;
- $F_1(c, 0),\ F_2(-c, 0),\ c = \sqrt{a^2 + b^2}$ – жиже хиперболе;
- $d_1 : x = \dfrac{a}{e},\ d_2 : x = -\dfrac{a}{e}$ – директрисе хиперболе;
- $e = \dfrac{c}{a}$ – ексцентрицитет хиперболе;
- $a_1 : y = \dfrac{b}{a}x,\ a_2 : y = -\dfrac{b}{a}x$ – асимптоте хиперболе.

Фокусне особине хиперболе

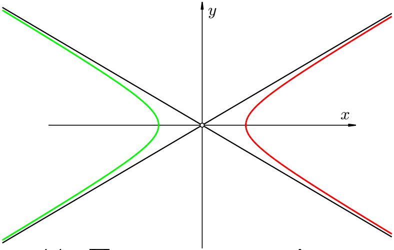
Теорема 1.3

Апсолутна вредност разлике растојања произвољне тачке хиперболе од њених жижа је константан:

$$|MF_1 - MF_2| = 2a.$$

- Фокусне особине хиперболе

Параметризација хиперболе



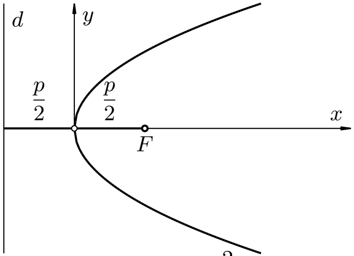
Слика 11: Параметризација хиперболе

$$x = +a\cosh\phi, \quad y = b\sinh\phi, \quad \phi \in \mathbb{R}$$
$$x = -a\cosh\phi, \quad y = b\sinh\phi, \quad \phi \in \mathbb{R}$$

Парабола

Последица 1.1

Свака тачка M параболе је једнако удаљена од жиже и од директрисе параболе.



Слика 12: Парабола $y^2 = 2px$, $p > 0$

- Дефиниција параболе

Елементи параболе $y^2 = 2px$, $p > 0$

- p – параметар параболе;
- $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ – жижа параболе;
- $d:\ x = -\frac{p}{2}$ – директриса параболе;
- o – оса параболе (овде: x-оса);
- T – теме параболе (овде: O).

Параметризација параболе

- Стандардна параметризација:

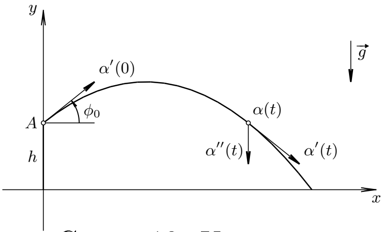
$$x = \frac{t^2}{2p}, \quad y = t, \quad t \in \mathbb{R},$$

- Једначина косог хица

Пример 2

Показати да су сваке две параболе међусобно сличне.

Једначина косог хица



Слика 13: Коси хитац

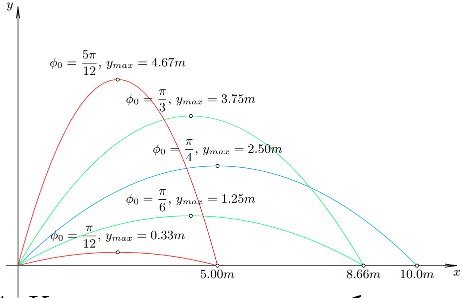
$$x(t) = (v_0 \cos \phi_0)t, \quad t \geq 0$$

$$y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + (v_0 \sin \phi_0)t + h, \quad t \geq 0,$$

- v_0 – почетна брзина;
- h – висина;
- ϕ_0 – угао (у односу на тло);
- g – гравитационо убрзање.

Коси хитац

- За који угао ϕ_0 се достиже највећа даљина/висина?
- Шта се дешава када је $v_0 = 0$?



Слика 14: Коси хици са почетном брзином $v_0 = 10\frac{m}{s}$, за углове $\phi_0 = \frac{k\pi}{12}$, $k = 1, \ldots, 5$

Пример: Коси хитац

Пример 3

Кошаркаш висине $1.85m$ треба да убаци лопту у кош са са линије слободног бацања ($4.5m$). Обруч је на висини $3.05m$.

Под којим почетним углом треба избацити лопту да би се постигао погодак? За почетну брзину избачаја лопте узети $7m/s$.

Колико се мења потребна почетна брзина избачаја ако се изводи скок-шут са исте удаљености под тим углом? Претпоставимо да је одраз $1m$.

Узети да је гравитационо убрзање $g \sim 10m/s^2$.

Пример: Слободан пад

Пример 4

Спортиста масе $65kg$ скаче у базен са скакаонице висине $10m$ без почетне брзине. После колико времена је спортиста ударио о површину воде? Којом брзином се у том тренутку кретао?

а) Израчунати ове вредности ако се занемари отпор ваздуха.

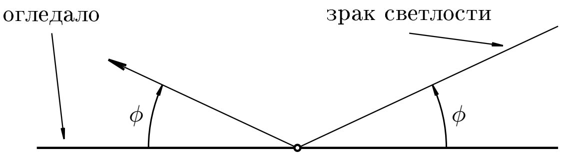
$$v = gt, \quad h = \frac{gt^2}{2} \implies v = \sqrt{2gh},\ t = \frac{v}{g}$$

б) Израчунати ове вредности ако је отпор ваздуха $F = 100N$.

$$F = ma_{ot},\ a = g - a_{ot},\ h = \frac{at_{ot}^2}{2} \implies v_{ot} = \sqrt{2ah},\ t_{ot} = \sqrt{\frac{2h}{a}}$$

Закон одбијања светлости

Светлост се одбија од глатке површине тако да је упадни угао зрака светлости једнак одбојном углу.

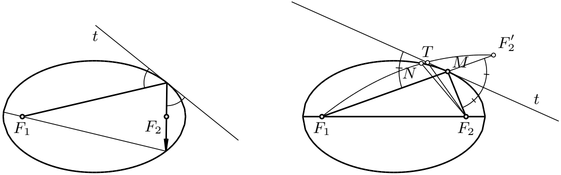


Слика 15: Закон одбијања светлости

Оптичка особина елипсе

Теорема 1.4

Светлосни зрак који извире из жиже елипсе и одбија се од елипсе, пролази кроз другу жижу елипсе.



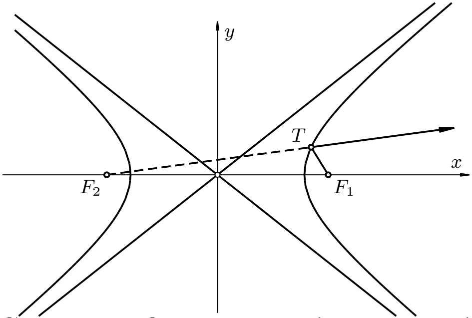
Слика 16: Оптичка особина елипсе

Елиптички билијар

Оптичка особина хиперболе

Теорема 1.5

Светлосни зрак који извире из жиже хиперболе и одбија се од хиперболе, колинеаран је са другом жижом хиперболе.

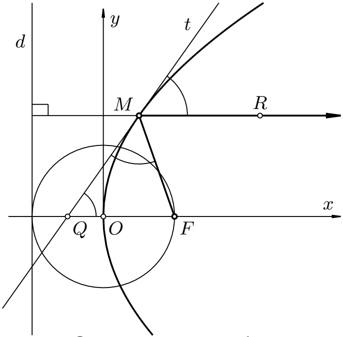


Слика 17: Оптичка особина хиперболе

Оптичка особина параболе

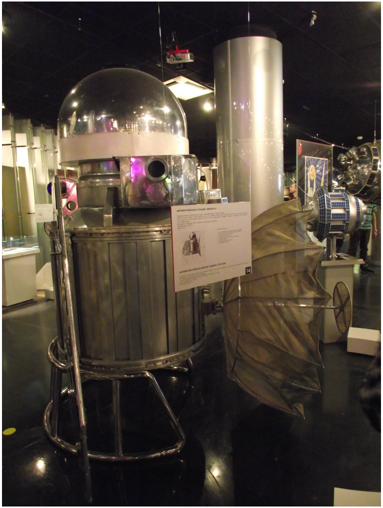
Теорема 1.6

Светлосни зрак који извире из жиже параболе одбија се од параболе паралелно њеној оси.



Слика 18: Оптичка особина параболе

Пример параболичке антене



Слика: Свемирска станица Венера I, Музеј космонаутике, Москва

Криве другог реда

Дефиниција 1.4

Крива другог реда је скуп тачака равни чије координате (x, y) задовољавају једначину другог степена:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Криве другог реда

Дефиниција 1.4

Крива другог реда је скуп тачака равни чије координате (x, y) задовољавају једначину другог степена:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Колико год претходна једначина изгледала компликовано, може се показати да она геометријски описује елипсу, хиперболу, параболу или неку једноставну „дегенерисану” криву.

Свођење криве на канонски облик

Теорема 1.7

За сваку криву другог реда, дату у ортонормираном реперу Oe, постоји нови ортонормирани репер Qf, исте оријентације, у ком она има тачно једну од следећих једначина:

$$
\begin{array}{lll}
(E) & \dfrac{x''^2}{a^2} + \dfrac{y''^2}{b^2} = 1, & \text{(елипса)} \\
(H) & \dfrac{x''^2}{a^2} - \dfrac{y''^2}{b^2} = 1, & \text{(хипербола)} \\
(P) & y''^2 = 2px'', & \text{(парабола)}
\end{array}
$$

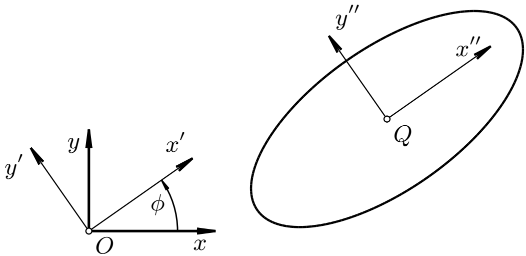
Свођење криве на канонски облик

Теорема 1.7

$$\begin{aligned}
&(D1) && \frac{x''^2}{a^2}+\frac{y''^2}{b^2}=-1, && \text{(празан скуп или имагинарна елипса)}\\
&(D2) && \frac{x''^2}{a^2}+\frac{y''^2}{b^2}=0, && \text{(тачка)}\\
&(D3) && \frac{x''^2}{a^2}-\frac{y''^2}{b^2}=0, && \text{(две праве које се секу)}\\
&(D4) && x''^2=a^2, && \text{(две паралелне праве)}\\
&(D5) && x''^2=0, && \text{(„двострука” права)}\\
&(D6) && x''^2=-a^2 && \text{(празан скуп).}
\end{aligned}$$

где је $p>0$, $a,b>0$ и $a\geq b$ за $(E),(D1),(D2)$ и $(D3)$.

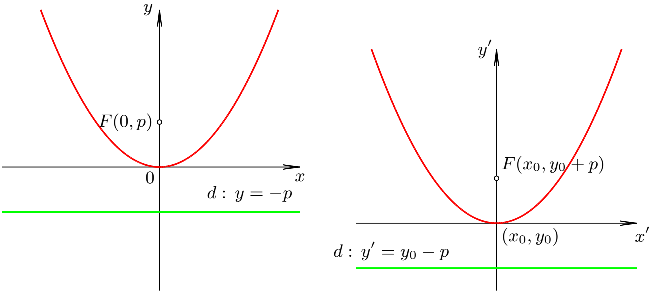
Свођење криве на канонски облик



Слика 20: Свођење елипсе на канонски облик

- транслација
- ротација

Свођење криве на канонски облик транслацијом



Слика 21: Транслација параболе

$$x' = x + x_0, \qquad y' = y + y_0$$

Свођење криве на канонски облик ротацијом

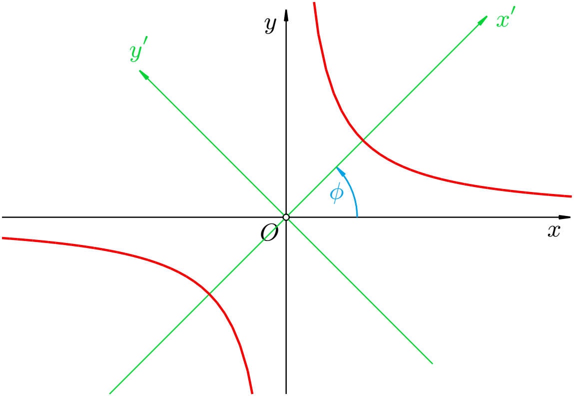
$$x = \cos\phi\, x' - \sin\phi\, y', \qquad y = \sin\phi\, x' + \cos\phi\, y'$$

$$\cot 2\phi = \frac{\cos 2\phi}{\sin 2\phi} = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}, \phi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos 2\phi = \frac{\cot 2\phi}{+\sqrt{1 + \cot^2 2\phi}}$$

$$\cos\phi = +\sqrt{\frac{1 + \cos 2\phi}{2}}, \qquad \sin\phi = +\sqrt{\frac{1 - \cos 2\phi}{2}}$$

Пример: Ротација хиперболе



Слика 22: Хипербола $xy = 1$

Безијерове криве

Дефиниција 2.1

Нека су $P_0, P_1 \ldots P_n$, $n \geq 2$ тачке равни. Безијерова крива степена n је:

$$\alpha_n(t) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} P_i = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) P_i, \quad t \in [0,1].$$

Тачке P_i називају се контролне тачке, а полиноми $B_i(t)$ Бернштајнови полиноми или базне функције.
Полигонска линија $P_0 P_1 \ldots P_n$ се зове контролна полигонска линија.

Безијерове криве на прозивољном интервалу

- $t \in [0, 1]$:

$$\alpha_n(t) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} P_i = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) P_i.$$

Безијерове криве на прозивољном интервалу

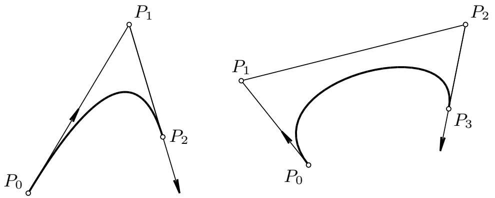
- $t \in [0,1]$:

$$\alpha_n(t) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} P_i = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) P_i.$$

- $u \in [a,b]$:

$$\alpha_n(u) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \left(\frac{u-a}{b-a}\right)^i \left(\frac{b-u}{b-a}\right)^{n-i} P_i.$$

Безијерове криве 2. и 3. степена

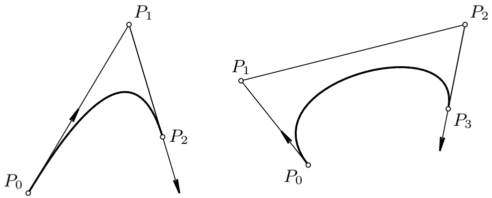


Слика 23: Безијерове криве степена 2 и 3

Крива 2. степена одређена је са три контролне тачке:

$$\alpha_2(t) = (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2, \quad t \in [0,1];$$

Безијерове криве 2. и 3. степена



Слика 23: Безијерове криве степена 2 и 3

Крива 2. степена одређена је са три контролне тачке:

$$\alpha_2(t) = (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2, \quad t \in [0,1];$$

Крива 3. степена одређена је са четири контролне тачке:

$$\alpha_3(t) = (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t)P_2 + t^3 P_3, \quad t \in [0,1].$$

Матрична репрезентација Безијерове криве

$$\alpha_2(t) = \begin{pmatrix}1, & t, & t^2\end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}.$$

Пример 5

Извести формуле матричне репрезентације кубне Безијерове криве.

Особине

- $\deg \alpha_n = n$.

Особине

- $\deg \alpha_n = n$.
- $\alpha_n(0) = P_0, \quad \alpha_n(1) = P_n$.

Особине

- $\deg \alpha_n = n$.
- $\alpha_n(0) = P_0, \quad \alpha_n(1) = P_n$.
- Тангентни вектор у P_0 je $\overrightarrow{P_0P_1}$, а у P_n je $\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$.

Особине

- $\deg \alpha_n = n$.
- $\alpha_n(0) = P_0, \quad \alpha_n(1) = P_n$.
- Тангентни вектор у P_0 је $\overrightarrow{P_0P_1}$, а у P_n је $\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$.
- $P_k \to P_k + \vec{v}: \quad \bar{\alpha}_n(t) = \alpha_n(t) + B_{n,k}(t)\vec{v}$.

Особине

- $\deg \alpha_n = n$.
- $\alpha_n(0) = P_0, \quad \alpha_n(1) = P_n$.
- Тангентни вектор у P_0 је $\overrightarrow{P_0P_1}$, а у P_n је $\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$.
- $P_k \to P_k + \vec{v}: \quad \bar{\alpha}_n(t) = \alpha_n(t) + B_{n,k}(t)\vec{v}$.
- Особина ненегативности.

Особине

- $\deg \alpha_n = n$.
- $\alpha_n(0) = P_0, \quad \alpha_n(1) = P_n$.
- Тангентни вектор у P_0 је $\overrightarrow{P_0P_1}$, а у P_n је $\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$.
- $P_k \to P_k + \vec{v}: \quad \bar{\alpha}_n(t) = \alpha_n(t) + B_{n,k}(t)\vec{v}$.
- Особина ненегативности.
- Особина конвексног омотача.

Особине

- $\deg \alpha_n = n$.
- $\alpha_n(0) = P_0, \quad \alpha_n(1) = P_n$.
- Тангентни вектор у P_0 је $\overrightarrow{P_0P_1}$, а у P_n је $\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$.
- $P_k \to P_k + \vec{v}: \quad \bar{\alpha}_n(t) = \alpha_n(t) + B_{n,k}(t)\vec{v}$.
- Особина ненегативности.
- Особина конвексног омотача.
- Особина мање варијације.

Особине

- $\deg \alpha_n = n$.
- $\alpha_n(0) = P_0, \quad \alpha_n(1) = P_n$.
- Тангентни вектор у P_0 је $\overrightarrow{P_0P_1}$, а у P_n је $\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$.
- $P_k \to P_k + \vec{v}: \quad \bar{\alpha}_n(t) = \alpha_n(t) + B_{n,k}(t)\vec{v}$.
- Особина ненегативности.
- Особина конвексног омотача.
- Особина мање варијације.
- Афина инваријантност.

Особине

- $\deg \alpha_n = n$.
- $\alpha_n(0) = P_0, \quad \alpha_n(1) = P_n$.
- Тангентни вектор у P_0 је $\overrightarrow{P_0P_1}$, а у P_n је $\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$.
- $P_k \to P_k + \vec{v}: \quad \bar{\alpha}_n(t) = \alpha_n(t) + B_{n,k}(t)\vec{v}$.
- Особина ненегативности.
- Особина конвексног омотача.
- Особина мање варијације.
- Афина инваријантност.

Теорема 2.1

Безијерова крива степена два је део параболе.

Де-Кастељау алгоритам

Одређивање тачке на кривој $\alpha_n(t)$ за неко $t \in [0, 1]$:

1. $P_{00} = P_0,\ P_{01} = P_1, \ldots, P_{0n-1} = P_{n-1},\ P_{0n} = P_n$

Де-Кастељау алгоритам

Одређивање тачке на кривој $\alpha_n(t)$ за неко $t \in [0,1]$:

1. $P_{00} = P_0,\ P_{01} = P_1, \ldots, P_{0n-1} = P_{n-1},\ P_{0n} = P_n$
2. $P_{1i} = (1-t)P_{0i} + tP_{0i+1},\ \ i = 0, \ldots, n-1$

Де-Кастељау алгоритам

Одређивање тачке на кривој $\alpha_n(t)$ за неко $t \in [0,1]$:

1. $P_{00} = P_0,\ P_{01} = P_1, \ldots, P_{0n-1} = P_{n-1},\ P_{0n} = P_n$
2. $P_{1i} = (1-t)P_{0i} + tP_{0i+1},\ \ i = 0, \ldots, n-1$

$\vdots$

Де-Кастељау алгоритам

Одређивање тачке на кривој $\alpha_n(t)$ за неко $t \in [0,1]$:

1. $P_{00} = P_0,\ P_{01} = P_1, \ldots, P_{0n-1} = P_{n-1},\ P_{0n} = P_n$
2. $P_{1i} = (1-t)P_{0i} + tP_{0i+1},\ \ i = 0, \ldots, n-1$

   $\vdots$
3. $P_{ki} = (1-t)P_{k-1i} + tP_{k-1i+1},\ \ i = 0, \ldots, n-k$

Де-Кастељау алгоритам

Одређивање тачке на кривој $\alpha_n(t)$ за неко $t \in [0,1]$:

1. $P_{00} = P_0,\ P_{01} = P_1, \ldots, P_{0n-1} = P_{n-1},\ P_{0n} = P_n$
2. $P_{1i} = (1-t)P_{0i} + tP_{0i+1},\quad i = 0, \ldots, n-1$

   $\vdots$
3. $P_{ki} = (1-t)P_{k-1i} + tP_{k-1i+1},\quad i = 0, \ldots, n-k$
4. $P_{n0} = (1-t)P_{n-1\,0} + tP_{n-1\,1}$

Де-Кастељау алгоритам

Одређивање тачке на кривој $\alpha_n(t)$ за неко $t \in [0,1]$:

1. $P_{00} = P_0,\ P_{01} = P_1, \ldots, P_{0n-1} = P_{n-1},\ P_{0n} = P_n$
2. $P_{1i} = (1-t)P_{0i} + tP_{0i+1},\ \ i = 0, \ldots, n-1$

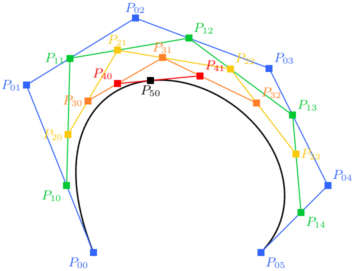
   $\vdots$
3. $P_{ki} = (1-t)P_{k-1i} + tP_{k-1i+1},\ \ i = 0, \ldots, n-k$
4. $P_{n0} = (1-t)P_{n-1\,0} + tP_{n-1\,1}$

$P_{n-1\,0}P_{n-1\,1}$ – тангента на криву у тачки t

Де-Кастељау алгоритам

Пример 6

Показати да је де-Кастељау алгоритам коректан.



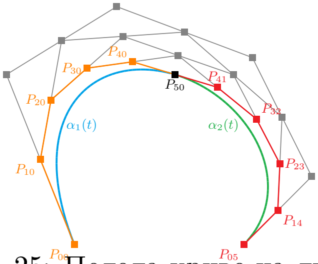
Слика 24: Де-Кастељау алгоритам за криву 5. степена и $t = 0.4$

- Цртање криве 5. степена

Подела криве на два дела

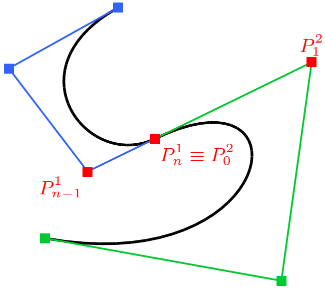
Криву α делимо на две криве α_1 и α_2:

$$\alpha_1 : P_0 = P_{00}, P_{10}, P_{20}, \ldots P_{n0} = \alpha(t),$$
$$\alpha_2 : \alpha(t) = P_{n0}, P_{n-11}, P_{n-22}, \ldots, P_{0n} = P_n.$$



Слика 25: Подела криве на два дела

Глатко спајање кривих

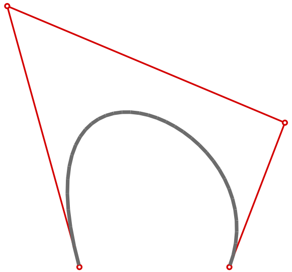


Слика 26: Глатко спајање кривих

Повећање степена криве

$$\alpha_n(t):\ P_0, \ldots, P_n, \quad \bar{\alpha}_{n+1}(t):$$

$$Q_0 = P_0,\ Q_i = \frac{i}{n+1} P_{i-1} + \left(1 - \frac{i}{n+1}\right) P_i,\ \ 1 \leq i \leq n,\ Q_{n+1} = P_n.$$

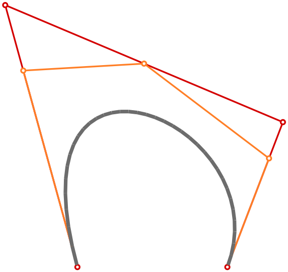


Слика 27: Повећање степена Безијерове криве

Повећање степена криве

$$\alpha_n(t): \ P_0, \ldots, P_n, \quad \bar{\alpha}_{n+1}(t):$$

$$Q_0 = P_0, \ Q_i = \frac{i}{n+1} P_{i-1} + \left(1 - \frac{i}{n+1}\right) P_i, \ 1 \leq i \leq n, \ Q_{n+1} = P_n.$$

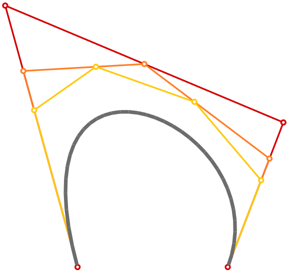


Слика 27: Повећање степена Безијерове криве

Повећање степена криве

$$\alpha_n(t):\ P_0, \ldots, P_n, \quad \bar{\alpha}_{n+1}(t):$$

$$Q_0 = P_0,\ Q_i = \frac{i}{n+1} P_{i-1} + \left(1 - \frac{i}{n+1}\right) P_i,\ \ 1 \le i \le n,\ Q_{n+1} = P_n.$$

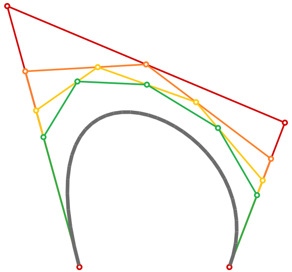


Слика 27: Повећање степена Безијерове криве

Повећање степена криве

$$\alpha_n(t):\ P_0,\ldots,P_n, \quad \bar{\alpha}_{n+1}(t):$$

$$Q_0 = P_0,\ Q_i = \frac{i}{n+1}P_{i-1} + \left(1 - \frac{i}{n+1}\right)P_i,\ \ 1 \le i \le n,\ Q_{n+1} = P_n.$$

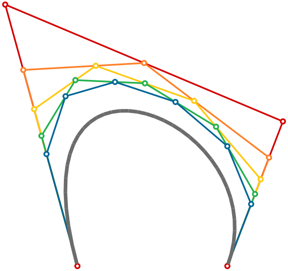


Слика 27: Повећање степена Безијерове криве

Повећање степена криве

$$\alpha_n(t): \ P_0, \dots, P_n, \quad \bar{\alpha}_{n+1}(t):$$

$$Q_0 = P_0, \ Q_i = \frac{i}{n+1} P_{i-1} + \left(1 - \frac{i}{n+1}\right) P_i, \ \ 1 \leq i \leq n, \ Q_{n+1} = P_n.$$

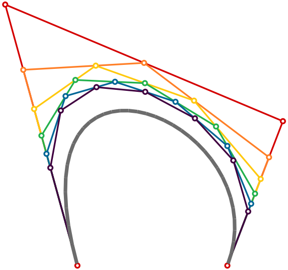


Слика 27: Повећање степена Безијерове криве

Повећање степена криве

$$\alpha_n(t): \; P_0, \ldots, P_n, \quad \bar{\alpha}_{n+1}(t):$$

$$Q_0 = P_0, \; Q_i = \frac{i}{n+1} P_{i-1} + \left(1 - \frac{i}{n+1}\right) P_i, \; 1 \leq i \leq n, \; Q_{n+1} = P_n.$$



Слика 27: Повећање степена Безијерове криве

Примери

Пример 7

а) Одредити Безијерову криву $\alpha_2(t)$ чије су контролне тачке $P_0(1,1)$, $P_1(-1,0)$, $P_2(1,-1)$.

б) Одредити једначину тангенте на криву $\alpha_2(t)$ у тачки $t_0 = 0.5$ и показати да је тангента паралелна са правом P_0P_2.

в) Повећати степен криве за 1.

г) Одредити једначину тангенте на криву $\bar{\alpha}_3(t)$ у тачки $t_0 = 0.5$. Да ли је тангента паралелна са правом $\bar{P}_0\bar{P}_3$?

Рационалне Безијерове (RB) krive

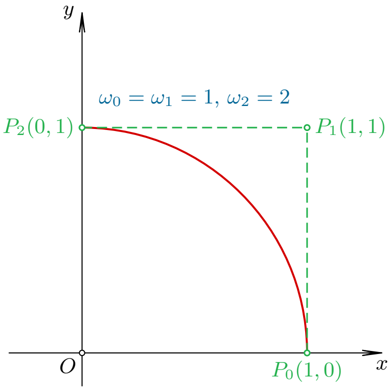
Рационална Безијерова крива степена n са контролним тачкама $P_0, \dots, P_n$ и тежинама $\omega_0, \dots, \omega_n > 0$ je дата параметризацијом:

$$r_n(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n} \omega_i B_{i,n}(t) P_i}{\sum_{i=0}^{n} \omega_i B_{i,n}(t)}, \quad t \in [0, 1],$$

где су $B_{i,n}(t)$ Бернштајнови полиноми.

Део круга као RB-kriva

Пример 8



Слика 28: Четвртина круга: $x = \cos\theta,\ y = \sin\theta,\ \theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

као RB-kriva: $x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2},\ y = \dfrac{2t}{1+t^2},\ t \in [0,1].$

Фрактали

Фрактал = геометријски лик који се може разложити на мање делове тако да је сваки од њих, макар приближно, умањена копија целине.

Слика: Печуј, 2011

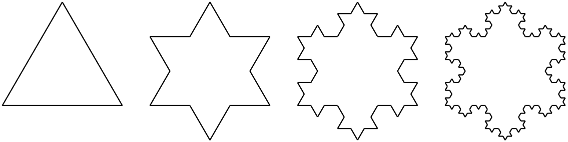
Фрактали

Фрактал = геометријски лик који се може разложити на мање делове тако да је сваки од њих, макар приближно, умањена копија целине. Подела фрактала:

- геометријски;
- алгебарски;
- стохастички.

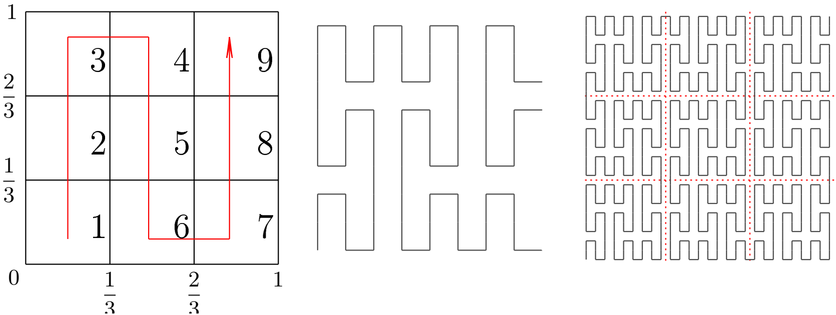
Геометријски фрактали

- Геометријски фрактал = самослична фигура чији се општи облик задаје генератором.



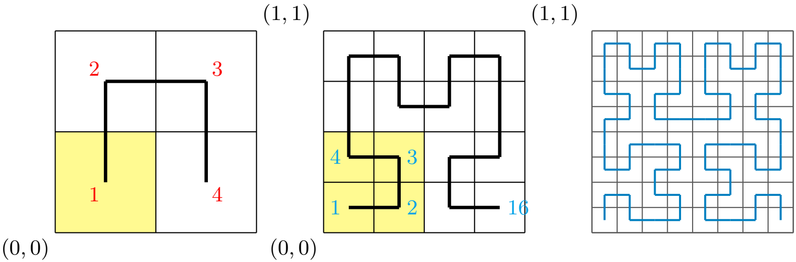
Слика 29: Прве четири итерације Кохове криве

Пеанова крива



Слика 30: Прве три итерације Пеанове криве

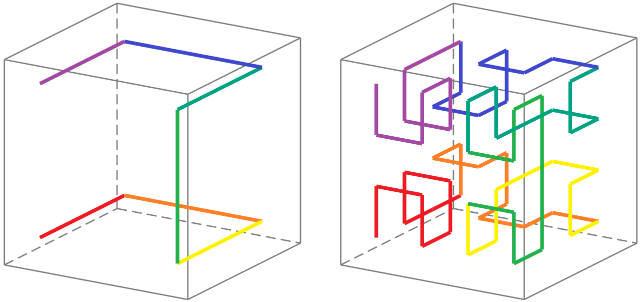
Хилбертова крива



Слика 31: Прве три итерације Хилбертове криве

Примена геометрисцјких фрактала

Примена: када је потребно линеаризовати вишедимензионе податке јер представљају оптималан начин да се вишедимензиони скупови пресликају на једнодимензионе низове.



Слика 32: Прве две итерације тродимензионе Хилбертове криве