УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Геометрија И–смер

део 2: Афине трансформације равни и простора

Тијана Шукиловић

5. новембар 2019

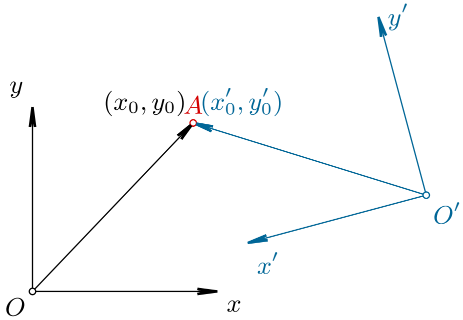
Дефиниција афиног пресликавања

Дефиниција 1.1

Нека је $\bar{f} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ линеарно пресликавање векторског простора који је придружен простору тачака $\mathbb{E}$.
Афино пресликавање $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ је пресликавање тачака које је индуковано пресликавањем $\bar{f}$ вектора у смислу да је:

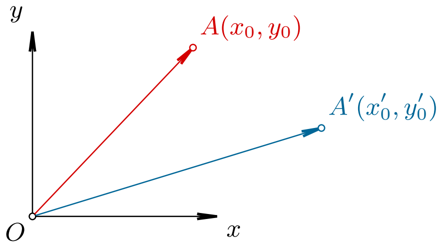
$$f(M) = M', \ f(N) = N' \iff \bar{f}(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{M'N'}.$$

Пасивно и активно гледиште



Слика 1: Пасивно гледиште

Пасивно и активно гледиште



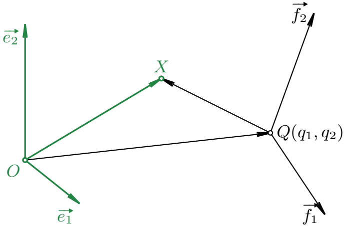
Слика 1: Активно гледиште

Трансформације координата вектора

- $e = (\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ – стара база
- $f = (\overrightarrow{f_1}, \ldots, \overrightarrow{f_n})$ – нова база
- $C = C_{e \to f}$ – матрица преласка = матрица чије су колоне координате вектора нове базе f у старој бази e, редом.

$$[\overrightarrow{v}]_e = C[\overrightarrow{v}]_f$$

Трансформације координата тачака

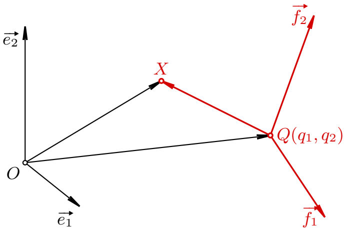


Слика 2: Трансформације координата тачака

$$\boxed{x} = Cx' + q$$

$$x = [X]_{Oe} = (x_1, x_2)^T$$

Трансформације координата тачака

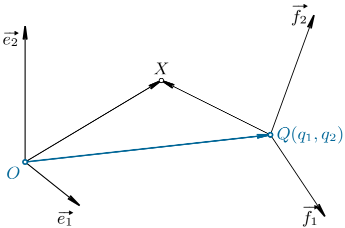


Слика 2: Трансформације координата тачака

$$x = C \boxed{x'} + q$$

$$x' = [X]_{Qf} = (x'_1, x'_2)^T$$

Трансформације координата тачака

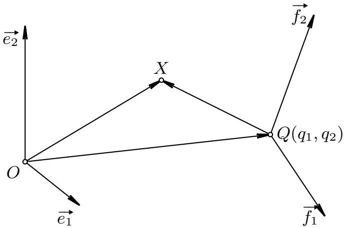


Слика 2: Трансформације координата тачака

$$x = \boxed{C}\, x' + \boxed{q}$$

$$C = C_{e \to f} \qquad q = [Q]_{Oe} = (q_1, q_2)^T$$

Трансформације координата тачака



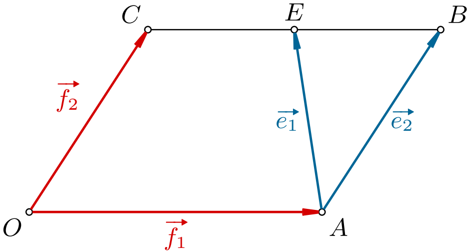
Слика 2: Трансформације координата тачака

$$x = \boxed{C}\, x' + \boxed{q}$$

линеарни део   транслаторни део

Примери

Пример 1

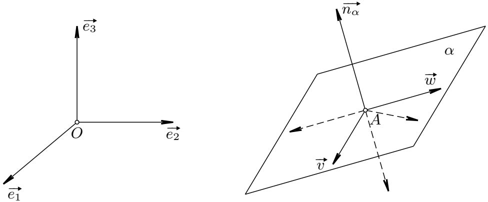


Слика 3: Одредити координате темена паралелограма у старом реперу Ae и новом реперу Of. Одредити везу између координата.

Избор координатног система везаног за раван

$$\boxed{\alpha : \ ax + by + cz + d = 0} \longrightarrow \boxed{\alpha' : \ z' = 0}$$

WCS UCS

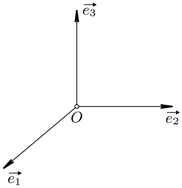


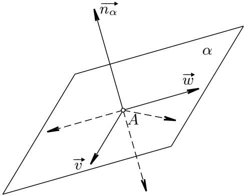
Слика 4: Координатни систем прилагођен датој равни

Избор координатног система везаног за раван

$$\boxed{\alpha : \; ax + by + cz + d = 0} \longrightarrow \boxed{\alpha' : \; z' = 0}$$

WCS UCS



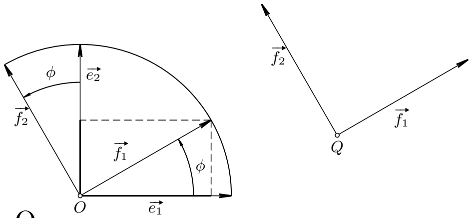


Слика 4: Координатни систем прилагођен датој равни

Пример 2

Одредити ортонормирани координатни систем (x', y', z') у односу на раван $\alpha : x - y - 2 = 0$ и написати везу тих координата са координатама (x, y, z).

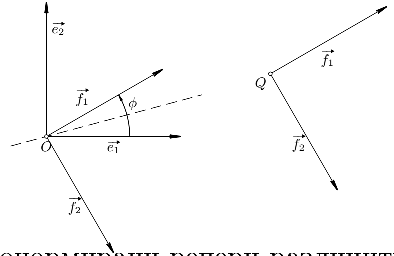
Трансформације ортонормираних репера равни



Слика 5: Ортонормирани репери истих оријентација

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\boxed{\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}}}_{\text{матрица ротације}} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}.$$

Трансформације ортонормираних репера равни



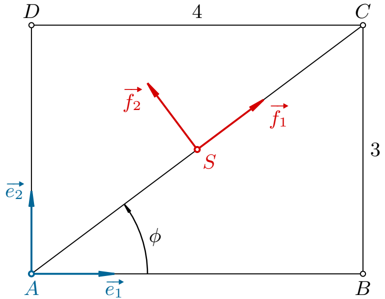
Слика 6: Ортонормирани репери различитих оријентација

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}.$$

матрица рефлексије

Примери

Пример 3



Слика 7: Одредити везу координата као и координате темена правоугаоника у новом реперу.

Афина пресликавања равни

Дефиниција 3.1

Афино пресликавање равни $\mathbb{E}^2$:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \boxed{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}}, \quad \det(a_{ij}) \neq 0.$$

слике базних вектора

слика координатног почетка

Афина пресликавања равни

Дефиниција 3.1

Афино пресликавање равни $\mathbb{E}^2$:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \boxed{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}}, \quad \det(a_{ij}) \neq 0.$$

слике базних вектора

слика координатног почетка

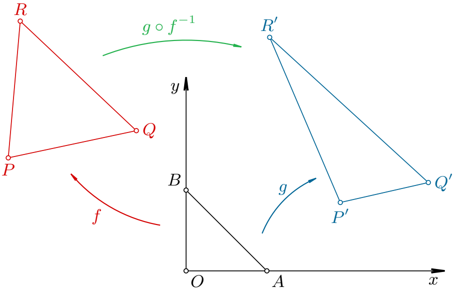
Пример 4

Одредити формуле афиног пресликавања f равни које тачке $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(0,1)$ пресликава редом у тачке $O'(2,2), A'(4,5), B'(3,1)$.

Особине афиних пресликавања

Теорема 3.1

Постоји јединствено афино пресликавање равни које пресликава три неколинеарне тачке P, Q, R у три неколинеарне тачке P', Q', R', редом.



Слика 8: Доказ теореме

Особине афиних пресликавања

Теорема 3.2 (Особине афиних пресликавања равни)

- Пресликавају праве у праве;

Особине афиних пресликавања

Теорема 3.2 (Особине афиних пресликавања равни)

- Пресликавају праве у праве;
- Чувају размеру колинеарних дужи;

Особине афиних пресликавања

Теорема 3.2 (Особине афиних пресликавања равни)

- Пресликавају праве у праве;
- Чувају размеру колинеарних дужи;
- Чувају паралелност правих;

Особине афиних пресликавања

Теорема 3.2 (Особине афиних пресликавања равни)

- Пресликавају праве у праве;
- Чувају размеру колинеарних дужи;
- Чувају паралелност правих;
- Однос површина слике и оригинала једнак је $\dfrac{P(\mathcal{F}')}{P(\mathcal{F})} = |\det(a_{ij})|$;

Особине афиних пресликавања

Теорема 3.2 (Особине афиних пресликавања равни)

- Пресликавају праве у праве;
- Чувају размеру колинеарних дужи;
- Чувају паралелност правих;
- Однос површина слике и оригинала једнак је $\dfrac{P(\mathcal{F}')}{P(\mathcal{F})} = |\det(a_{ij})|$;
- Пресликавања за која је $\det(a_{ij}) > 0$ чувају оријентацију, а за која је $\det(a_{ij}) < 0$ мењају оријентацију равни.

Примери

Пример 5

Дате су тачке $A(-1,-1)$, $B(1,-1)$, $C(1,1)$, $D(-1,1)$; $A'(4,5)$, $B'(8,7)$, $C'(6,9)$, $D'(2,7)$.

а) Одредити једначине афиног пресликавања које пресликава квадрат $ABCD$ у паралелограм $A'B'C'D'$.

б) Одредити једначину слике круга уписаног у квадрат. Која је то крива?

в) Колика је површина слике круга?

г) Да ли пресликавање чува оријентацију?

Представљање афиних пресликавања матрицама

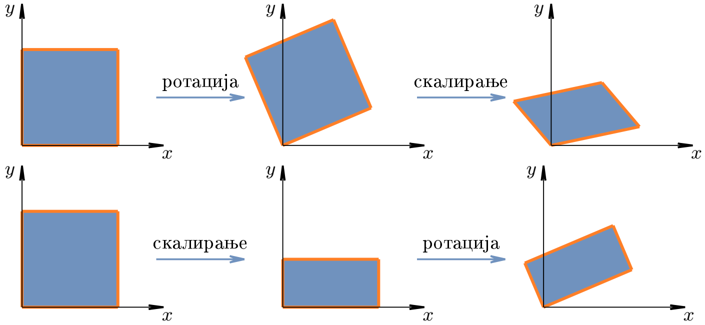
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}_{A\ \text{– линеарни део}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}}_{b\ \text{– транслаторни део}}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A_b} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Представљање афиних пресликавања матрицама

Теорема 3.3

Производ матрица A_b одговара композицији афиних пресликавања.



Слика 9: Афина пресликавања не комутирају!

Транслација

Транслација $\mathcal{T}_{\vec{b}}$ за вектор $\vec{b}(b_1, b_2)$ дата је формулама:

$$x' = x + b_1,$$
$$y' = y + b_2,$$

или у матричном облику:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Транслација

Транслација $\mathcal{T}_{\vec{b}}$ за вектор $\overrightarrow{b}(b_1, b_2)$ дата је формулама:

$$x' = x + b_1,$$
$$y' = y + b_2,$$

или у матричном облику:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

- Како се представља линеарни део транслације?

Транслација

Транслација $\mathcal{T}_{\vec{b}}$ за вектор $\vec{b}(b_1, b_2)$ дата је формулама:

$$x' = x + b_1,$$
$$y' = y + b_2,$$

или у матричном облику:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

- Како се представља линеарни део транслације?
- Шта је композиција транслација?

Транслација

Транслација $\mathcal{T}_{\vec{b}}$ за вектор $\overrightarrow{b}(b_1, b_2)$ дата је формулама:

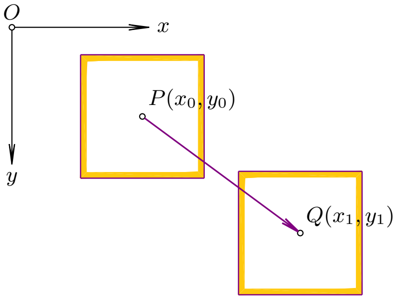
$$x' = x + b_1,$$
$$y' = y + b_2,$$

или у матричном облику:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

- Како се представља линеарни део транслације?
- Шта је композиција транслација?
- Да ли транслације комутирају?

Примери



Слика 10: „*Pan*” алатка

Пример 6

Представити као афину трансформацију „*pan*” алатку: Ако је миш притиснут у $P(x_0, y_0)$, а отпуштен у тачки $Q(x_1, y_1)$ слика се транслира из P у Q.

Ротација

Ротација око координатног почетка, за угао $\phi \in [0, 2\pi)$:

$$\mathcal{R}_\phi : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Ротација

Ротација око координатног почетка, за угао $\phi \in [0, 2\pi)$:

$$\mathcal{R}_\phi : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Ротација око произвољне тачке $Q(q_1, q_2)$ за угао ϕ:

$$\mathcal{R}_{Q,\phi} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{OQ}} \circ \mathcal{R}_\phi \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{QO}}.$$

Ротација

Ротација око координатног почетка, за угао $\phi \in [0, 2\pi)$:

$$\mathcal{R}_\phi : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Ротација око произвољне тачке $Q(q_1, q_2)$ за угао ϕ:

$$\mathcal{R}_{Q,\phi} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{OQ}} \circ \mathcal{R}_\phi \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{QO}}.$$

Пример 7

Одредити 3×3 матрицу ротације око тачке $S(1, -2)$ за угао од $\frac{2\pi}{3}$, као и формуле тог пресликавања.
У коју тачку се пресликава координатни почетак при овој ротацији?

Матрица ротације

$$R_\phi := \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$ – матрица ротације за угао ϕ.

Теорема 3.4

Особине матрице ротације:

- $(R_\phi)^{-1} = R_{-\phi} = (R_\phi)^T$;
- $\det R_\phi = 1$;
- $R_\phi R_\theta = R_{\phi+\theta} = R_\theta R_\phi$.

Рефлексија у односу на праву

Рефлексија у односу на праву p_0 кроз координатни почетак, која гради угао $\dfrac{\phi}{2}$ са x-осом:

$$\mathcal{S}_{p_0} : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Рефлексија у односу на праву

Рефлексија у односу на праву p_0 кроз координатни почетак, која гради угао $\dfrac{\phi}{2}$ са x-осом:

$$\mathcal{S}_{p_0} : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Рефлексија у односу на произвољу праву $p \parallel p_0$:

$$\mathcal{S}_p = \mathcal{T}_{\overrightarrow{OQ}} \circ \mathcal{S}_{p_0} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{QO}}.$$

Рефлексија у односу на праву

Рефлексија у односу на праву p_0 кроз координатни почетак, која гради угао $\dfrac{\phi}{2}$ са x-осом:

$$\mathcal{S}_{p_0} : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Рефлексија у односу на произвољу праву $p \parallel p_0$:

$$\mathcal{S}_p = \mathcal{T}_{\overrightarrow{OQ}} \circ \mathcal{S}_{p_0} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{QO}}.$$

Пример 8

Одредити формуле рефлексије у односу на праву:
а) $x = -1$; б) $y = 3$; в) $4x - 3y + 6 = 0$.

Матрица рефлексије

$$S_\phi := \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix}$$ – матрица рефлексије.

Теорема 3.5

Особине матрице рефлексије:

- $(S_\phi)^{-1} = (S_\phi)^T$;
- $S_\phi^2 = Id$;
- $\det S_\phi = -1$;
- $S_\phi S_\theta = R_{\phi-\theta}$.

Скалирање

Скалирање у правцу координатних оса, са центром у координатном почетку и коефицијентима $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$:

$$\mathcal{H}_{\lambda_1,\lambda_2} : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Скалирање

Скалирање у правцу координатних оса, са центром у координатном почетку и коефицијентима $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$:

$$\mathcal{H}_{\lambda_1,\lambda_2} : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Скалирање са центром у произвољној тачки:

$$\mathcal{H}_{Q,\lambda_1,\lambda_2} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{OQ}} \circ \mathcal{H}_{\lambda_1,\lambda_2} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{QO}}.$$

Примери

- За које вредности λ_1 и λ_2 је скалирање $\mathcal{H}_{\lambda_1,\lambda_2}$ рефлексија у односу на x-осу (y-осу)?

Примери

- За које вредности λ_1 и λ_2 је скалирање $\mathcal{H}_{\lambda_1,\lambda_2}$ рефлексија у односу на x-осу (y-осу)?
- За које вредности λ_1 и λ_2 је скалирање $\mathcal{H}_{Q,\lambda_1,\lambda_2}$ централна рефлексија у односу на тачку Q?

Примери

- За које вредности λ_1 и λ_2 је скалирање $\mathcal{H}_{\lambda_1,\lambda_2}$ рефлексија у односу на x-осу (y-осу)?
- За које вредности λ_1 и λ_2 је скалирање $\mathcal{H}_{Q,\lambda_1,\lambda_2}$ централна рефлексија у односу на тачку Q?
- За које вредности λ_1 и λ_2 је скалирање хомотетија?

Примери

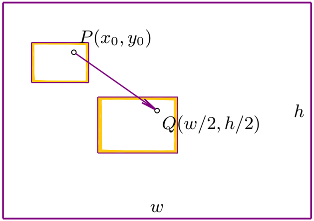
- За које вредности λ_1 и λ_2 је скалирање $\mathcal{H}_{\lambda_1,\lambda_2}$ рефлексија у односу на x-осу (y-осу)?
- За које вредности λ_1 и λ_2 је скалирање $\mathcal{H}_{Q,\lambda_1,\lambda_2}$ централна рефлексија у односу на тачку Q?
- За које вредности λ_1 и λ_2 је скалирање хомотетија?
- Да ли скалирање чува однос дужине и ширине, углове? А хомотетија?

Примери

Пример 9

Представити као афине трансформације следеће догађаје:

- „*Zoom in*": Кликом миша у тачку $P(x_0, y_0)$, слика се увећава λ пута, а тачка P постаје центар екрана резолуције $w \times h$.



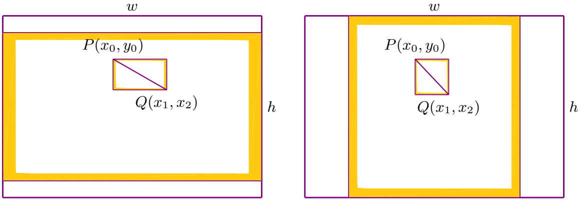
Слика 11: „*Zoom in*" алатка

Примери

Пример 9

Представити као афине трансформације следеће догађаје:

- „*Zoom to window*": Миш је притиснут у тачки $P(x_0, y_0)$, а отпуштен у тачки $Q(x_1, y_1)$. Увећати прозор са дијагоналом PQ преко целог екрана. При томе водити рачуна да се увећана слика уклопи у екран или по ширини, или по висини – у зависности од пропорција прозора. Сматрати да је екран резолуције $1920 : 1080 = 16 : 9$.



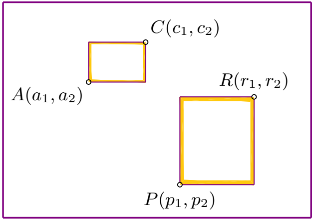
Слика 11: „*Zoom to window*" алатка

Примери

Пример 9

Представити као афине трансформације следеће догађаје:

- Пресликати прозор чије су лево-доње теме $A(a_1, a_2)$ и горње-десно теме $C(c_1, c_2)$ у прозор одређен дијагоналним теменима $P(p_1, p_2)$ и $R(r_1, r_2)$.



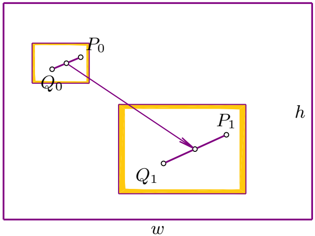
Слика 11: Прозор

Примери

Пример 9

Представити као афине трансформације следеће догађаје:

- „*Pinch to zoom*": У почетном тренутку додир једног прста је регистрован у тачки P_0 а другог у тачки Q_0. У следећем тренутку први прст се налази у тачки P_1, а други у тачки Q_1. Увећати слику за однос дужина $\lambda = P_1Q_1 : P_0Q_0$, при чему се средиште дужи P_0Q_0 пресликава у средиште дужи P_1Q_1.



Слика 11: „*Pinch to zoom*" алатка

Смицање

Смицање са коефицијентом λ у правцу x-осе:

$$\mathcal{S}_x(\lambda) : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Смицање

Смицање са коефицијентом λ у правцу x-осе:

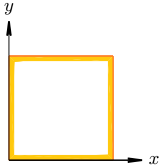
$$\mathcal{S}_x(\lambda) : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Смицање са коефицијентом λ у правцу y-осе:

$$\mathcal{S}_y(\lambda) : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Реализација ротације помоћу смицање

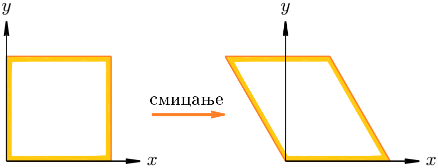
$$\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\cos\phi - 1}{\sin\phi} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sin\phi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\cos\phi - 1}{\sin\phi} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Слика 12: Реализација ротације помоћу три смицања

Реализација ротације помоћу смицање

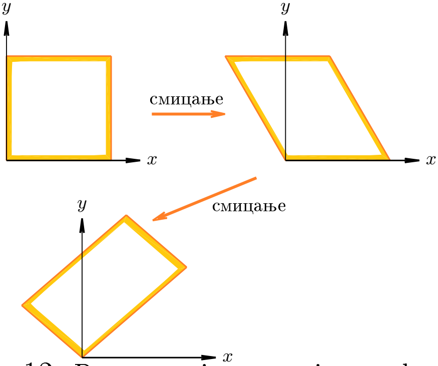
$$\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\cos\phi - 1}{\sin\phi} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sin\phi & 1 \end{pmatrix} \color{red}{\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\cos\phi - 1}{\sin\phi} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$



Слика 12: Реализација ротације помоћу три смицања

Реализација ротације помоћу смицање

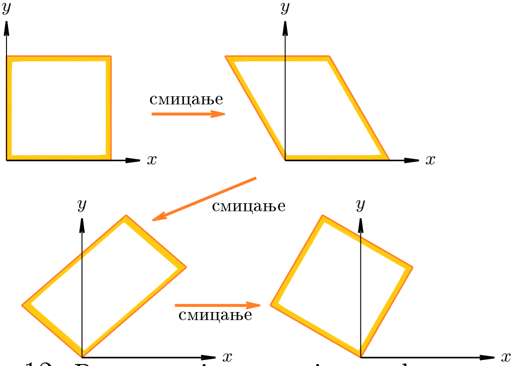
$$\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\cos\phi - 1}{\sin\phi} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sin\phi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\cos\phi - 1}{\sin\phi} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Слика 12: Реализација ротације помоћу три смицања

Реализација ротације помоћу смицање

$$\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\cos\phi - 1}{\sin\phi} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sin\phi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\cos\phi - 1}{\sin\phi} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Слика 12: Реализација ротације помоћу три смицања

Изометрије

Дефиниција 3.2

Пресликавања која чувају дужину у еуклидском простору $\mathbb{E}$ произвољне димензије називају се изометрије.

Изометрије

Дефиниција 3.2

Пресликавања која чувају дужину у еуклидском простору $\mathbb{E}$ произвољне димензије називају се изометрије.
Изометрије које чувају оријентацију зову се кретања.

Изометрије

Дефиниција 3.2

Пресликавања која чувају дужину у еуклидском простору $\mathbb{E}$ произвољне димензије називају се изометрије.
Изометрије које чувају оријентацију зову се кретања.

Теорема 3.6

Транслација, ротација око произвољне тачке и рефлексија у односу на произвољну праву су изометрије равни.

Изометрије

Дефиниција 3.2

Пресликавања која чувају дужину у еуклидском простору $\mathbb{E}$ произвољне димензије називају се изометрије.
Изометрије које чувају оријентацију зову се кретања.

Теорема 3.6

Транслација, ротација око произвољне тачке и рефлексија у односу на произвољну праву су изометрије равни.

Које трансформације равни су кретања?

Афина пресликавања простора

Анимација: Афине трансформације простора

Тачка $M(x, y, z)$ простора се пресликава у тачку $M'(x', y', z')$ по правилу:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad \det(a_{ij}) \neq 0.$$

Афина пресликавања простора

Анимација: Афине трансформације простора

Тачка $M(x, y, z)$ простора се пресликава у тачку $M'(x', y', z')$ по правилу:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad \det(a_{ij}) \neq 0.$$

Пресликавање се представља 4×4 матрицом:

$$A_b := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Изометрије простора

Теорема 4.1

Свака изометрија простора $\mathbb{E}^n$ је афино пресликавање.

Изометрије простора

Теорема 4.1

Свака изометрија простора $\mathbb{E}^n$ је афино пресликавање.

Теорема 4.2

Афино пресликавање f је изометрија акко $AA^T = A^T A = E$.

Изометрије простора

Теорема 4.1

Свака изометрија простора $\mathbb{E}^n$ је афино пресликавање.

Теорема 4.2

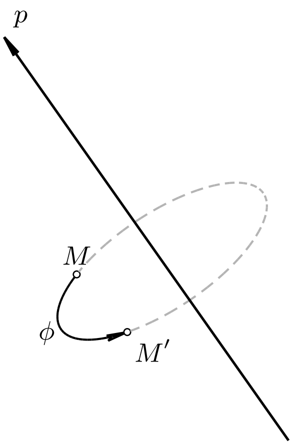
Афино пресликавање f је изометрија акко $AA^T = A^T A = E$.

Теорема 4.3 (Особине изометрија простора)

Следећа тврђења су еквивалентна за $f : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$:

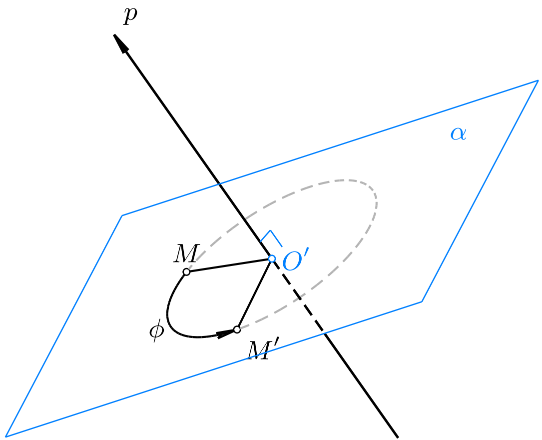
- f је изометрија (чува дужине);
- f чува скаларни производ;
- f пресликава ортонормирану базу у ортонормирану базу.

Ротације око праве у простору



Слика 13: Ротација око праве p за угао ϕ

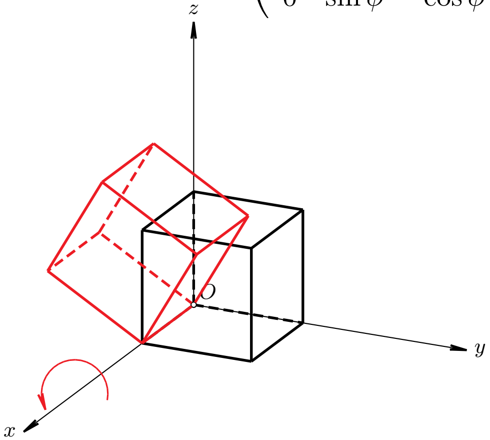
Ротације око праве у простору



Слика 13: Ротација око праве p за угао ϕ

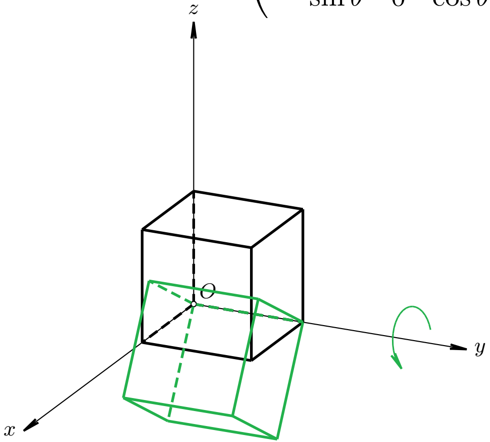
Ротација око координатних оса

$$[\mathcal{R}_{Ox}(\phi)]_e = R_x(\phi) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$



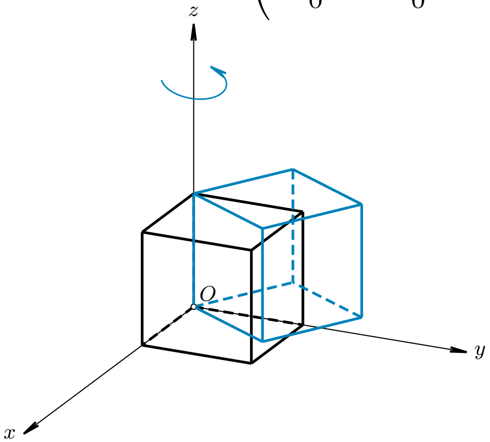
Ротација око координатних оса

$$[\mathcal{R}_{Oy}(\theta)]_e = R_y(\theta) := \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$



Ротација око координатних оса

$$[\mathcal{R}_{Oz}(\psi)]_e = R_z(\psi) := \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Формуле ротације око праве у простору

Теорема 4.4 (Формула Родригеза)

Матрица ротације $[\mathcal{R}_p(\phi)]_e$, у стандардној бази e, за угао ϕ око праве p_0 која садржи координатни почетак је:

$$[\mathcal{R}_{p_0}(\phi)]_e = \; pp^T + \cos\phi\,(E - pp^T) + \sin\phi\, p_\times,$$

где је $p_\times$ матрица векторског множења јединичним вектором p:

$$p_\times := \begin{pmatrix} 0 & -p_3 & p_2 \\ p_3 & 0 & -p_1 \\ -p_2 & p_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ротација око произвољне праве

Ротација око произвољне праве $p \parallel p_0$, $P \in p$:

$$\mathcal{R}_p(\phi) = \mathcal{T}_{\overrightarrow{OP}} \circ \mathcal{R}_{p_0}(\phi) \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{PO}}.$$

Ротација око произвољне праве

Ротација око произвољне праве $p \parallel p_0$, $P \in p$:

$$\mathcal{R}_p(\phi) = \mathcal{T}_{\overrightarrow{OP}} \circ \mathcal{R}_{p_0}(\phi) \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{PO}}.$$

Пример 10

Одредити формуле ротације за угао $\phi = \dfrac{3\pi}{2}$ око праве p у простору која садржи тачку $Q(1,0,0)$ и има вектор правца $\overrightarrow{p} = (1,2,2)$.

Рефлексија у односу на раван

Теорема 4.5

Матрица рефлексије $[\mathcal{S}_\alpha]_e$, у стандардној бази e, у односу на раван α која садржи координатни почетак O, и чији јединични нормални вектор има колону координата p, је дата са:

$$[\mathcal{S}_\alpha]_e = E - 2pp^T.$$

Рефлексија у односу на раван

Теорема 4.5

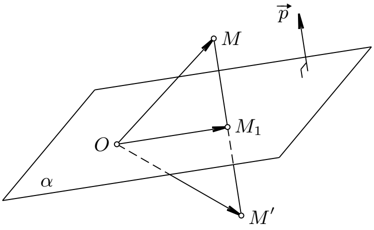
Матрица рефлексије $[\mathcal{S}_\alpha]_e$, у стандардној бази e, у односу на раван α која садржи координатни почетак O, и чији јединични нормални вектор има колону координата p, је дата са:

$$[\mathcal{S}_\alpha]_e = E - 2pp^T.$$

Ако раван $\beta \parallel \alpha$ не садржи координатни почетак, него неку тачку B, тада се рефлексија S_β представља са:

$$\mathcal{S}_\beta = \mathcal{T}_{\overrightarrow{OB}} \circ \mathcal{S}_\alpha \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{BO}}.$$

Примери



Слика 15: Рефлексија у односу на раван кроз O

Пример 11

Одредити формуле рефлексије у односу на раван
$\alpha : 2x - y + 2z = 0.$

Ојлерове теореме

Теорема 4.6 (I Ојлерова)

Свако кретање f простора $\mathbb{E}^3$ које има фиксну неку тачку O' је ротација око неке оријентисане праве p која садржи O', за угао $\phi \in [0, 2\pi)$.

Ојлерове теореме

Теорема 4.6 (I Ојлерова)

Свако кретање f простора $\mathbb{E}^3$ које има фиксну неку тачку O' је ротација око неке оријентисане праве p која садржи O', за угао $\phi \in [0, 2\pi)$.

Теорема 4.7 (II Ојлерова)

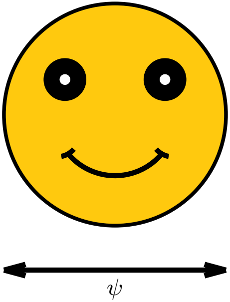
Свако кретање f простора $\mathbb{E}^3$ које чува координатни почетак може се представити као композиција три сопствене ротације око координатних оса:

$$f = \mathcal{R}_{Ox_2}(\phi) \circ \mathcal{R}_{Oy_1}(\theta) \circ \mathcal{R}_{Oz}(\psi),$$

где су $\psi, \phi \in [0, 2\pi), \theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, тзв. Ојлерови или Тејт-Брајанови углови.

Ојлерови углови

ψ – угао скретања (енг. yaw)



Слика 16: Скретање

Ојлерови углови

ψ – угао скретања (енг. yaw)

θ – угао пропињања (енг. pitch)

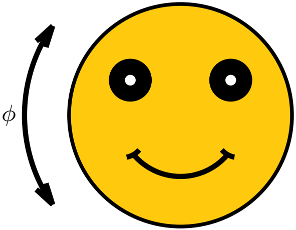
Слика 16: Пропињање

Ојлерови углови

ψ – угао скретања (енг. yaw)

θ – угао пропињања (енг. pitch)

ϕ – угао ваљања (енг. roll)



Слика 16: Ваљање

Веза сопствених и светских ротација

Анимација: Ојлерови углови

Веза сопствених и светских ротација

Анимација: Ојлерови углови

Пажња!!!

У II Ојлеровој теореми ротације се изводе у сопственом координатном систему (везаном за објекат).

Веза сопствених и светских ротација

Анимација: Ојлерови углови

Пажња!!!
У II Ојлеровој теореми ротације се изводе у сопственом координатном систему (везаном за објекат).

Теорема 4.8 (Веза сопствених и светских ротација)

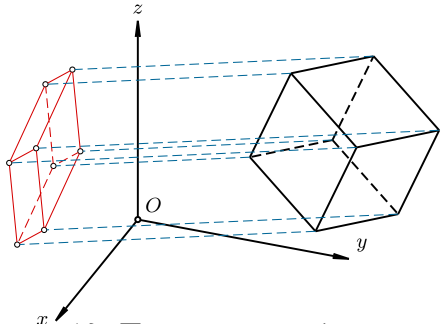
$$[\mathcal{R}_{Ox_2}(\phi) \circ \mathcal{R}_{Oy_1}(\theta) \circ \mathcal{R}_{Oz}(\psi)]_e = [f]_e = R_z(\psi) R_y(\theta) R_x(\phi).$$

Пројектовање

Слика: Алтамира, Шпанија

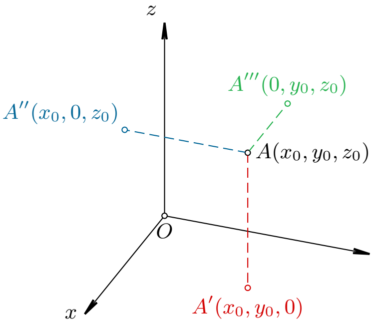
Паралелно пројектовање

- $f : \mathbb{E}^3 \longrightarrow \mathbb{E}^2$
  - паралелно пројектовање (специјално: ортогонална пројекција)



Слика 18: Паралелно пројектовање

Ортогонална пројекција на координатне равни

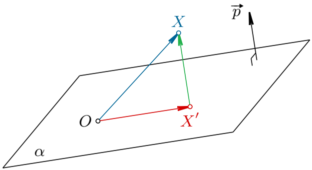


Слика 19: Ортогонална пројекција

Пример 12

Одредити ортогоналну пројекцију квадрата $ABCD$, $A(1, 2, -1)$, $B(-1, 0, 2)$, $D(3, 1, 1)$, на xy-раван.

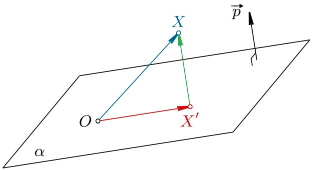
Ортогонална пројекција на произвољну раван



Слика 20: Ортогонална пројекција

$$X' = (E - pp^T)X, \quad p = [\vec{p}], \ \vec{p} - \text{јединични}$$

Ортогонална пројекција на произвољну раван



Слика 20: Ортогонална пројекција

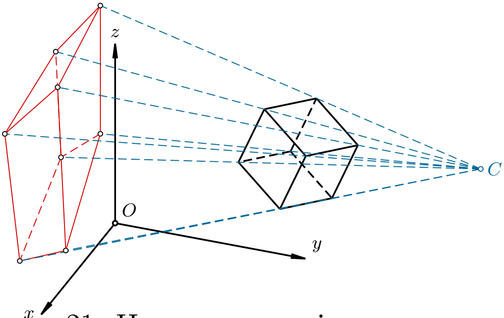
$$X' = (E - pp^T)X, \quad p = [\vec{p}], \ \vec{p} \text{ – јединични}$$

Пример 13

Одредити ортогоналну пројекцију квадрата из Примера 14 на раван $\alpha : 3y - z = 0$.

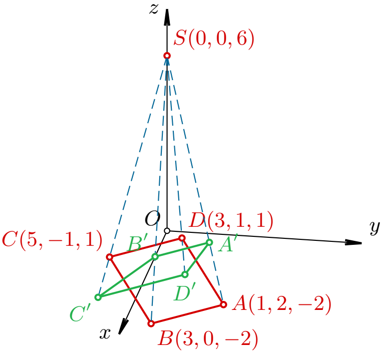
Централно пројектовање

- $f\,:\,\mathbb{E}^3 \longrightarrow \mathbb{E}^2$
  - централно пројектовање



Слика 21: Централно пројектовање

Централна пројекција



Слика 22: Централна пројекција

Пример 14

Одредити централну пројекцију квадрата $ABCD$, $A(1, 2, -2)$, $B(3, 0, -2)$, $D(3, 1, 1)$, из тачке $S(0, 0, 6)$ на xy-раван.

Пројектовање

- $f: \mathbb{E}^3 \longrightarrow \mathbb{E}^2$
  - паралелно пројектовање (специјално: ортогонална пројекција)
  - централно пројектовање

Пројектовање

- $f: \mathbb{E}^3 \longrightarrow \mathbb{E}^2$
  - паралелно пројектовање (специјално: ортогонална пројекција)
  - централно пројектовање
- Да ли је f бијекција?

Пројектовање

- $f: \mathbb{E}^3 \longrightarrow \mathbb{E}^2$
  - паралелно пројектовање (специјално: ортогонална пројекција)
  - централно пројектовање

- Да ли је f бијекција?
- Да ли је f изометрија?

Пројектовање

- $f: \mathbb{E}^3 \longrightarrow \mathbb{E}^2$
  - паралелно пројектовање (специјално: ортогонална пројекција)
  - централно пројектовање

- Да ли је f бијекција?
- Да ли је f изометрија?
- Да ли f чува колинеарност, паралелност, углове, средиште дужи?

Пројекција сфере на раван

- Шта све може бити ортогонална пројекција сфере на раван?

Пројекција сфере на раван

- Шта све може бити ортогонална пројекција сфере на раван?
- Шта све може бити централна пројекција сфере на раван?

Пројекција сфере на раван

- Шта све може бити ортогонална пројекција сфере на раван?
- Шта све може бити централна пројекција сфере на раван?

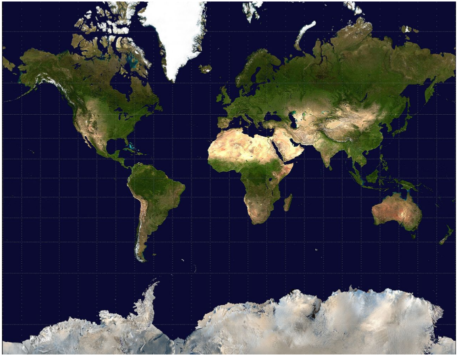
- Картографске пројекције:

Пројекција сфере на раван

- Шта све може бити ортогонална пројекција сфере на раван?
- Шта све може бити централна пројекција сфере на раван?

- Картографске пројекције:
  - конформне (чувају углове)
  - еквивалентне (чувају однос површина)
  - еквидистантне (чувају растојања)

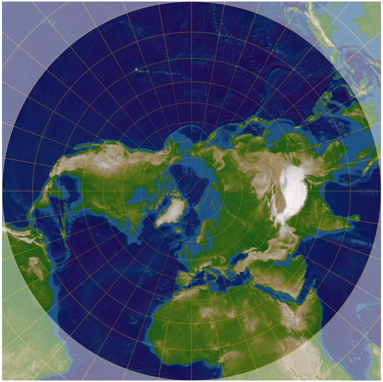
Конформне пројекције



Слика: Меркаторова пројекција

извор слика: Wikipedia

Конформне пројекције



Слика: Стереографска пројекција

извор слика: Wikipedia

Конформне пројекције

Слика: Ламбертова пројекција (конусна)

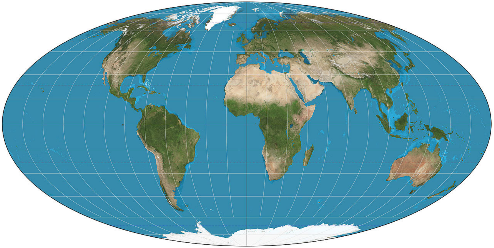
извор слика: Wikipedia

Еквивалентне пројекције

Слика: Бонеова пројекција

извор слика: Wikipedia

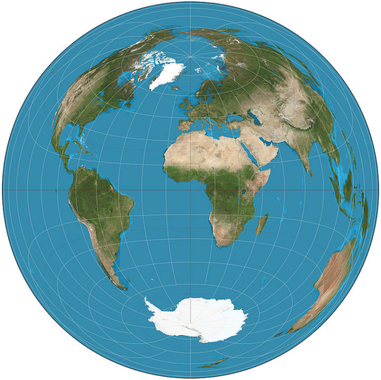
Еквивалентне пројекције



Слика: Молвеиде пројекција

извор слика: Wikipedia

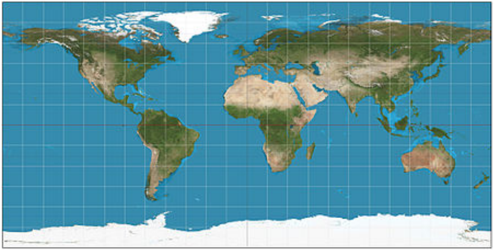
Еквивалентне пројекције



Слика: Ламбертова пројекција (азимутална)

извор слика: Wikipedia

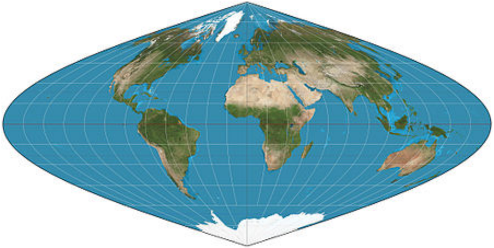
Еквидистантне пројекције



Слика: Географска пројекција (чува растојања дуж меридијана)

извор слика: Wikipedia

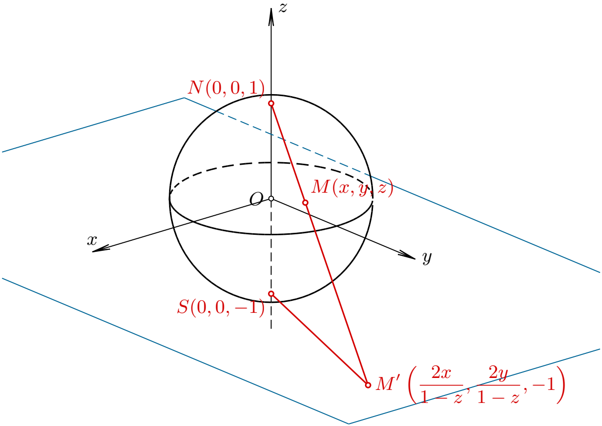
Еквидистантне пројекције



Слика: Синусоидална пројекција (чува растојања дуж паралела)

извор слика: Wikipedia

Стереографска пројекција



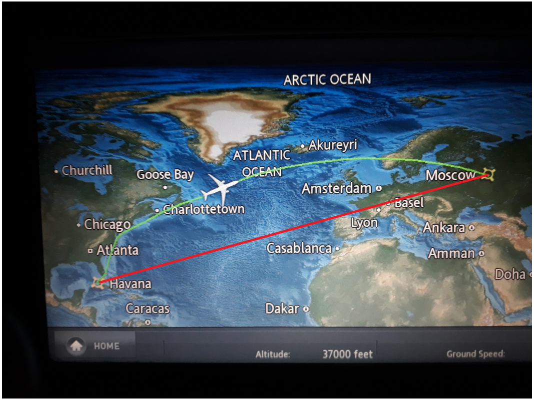
Слика 26: Стереографска пројекција са северног пола на раван $z = -1$

Особине стереографске пројекције

- Шта је слика круга који припада сфери, а садржи северни пол?
- Специјално, у шта се сликају паралеле?
- Шта је слика меридијана?
- Да ли се чувају углови?
- Да ли се чува однос површина?
- Да ли се чувају растојања дуж меридијана? А дуж паралела?

Неки интересантни проблеми на сфери

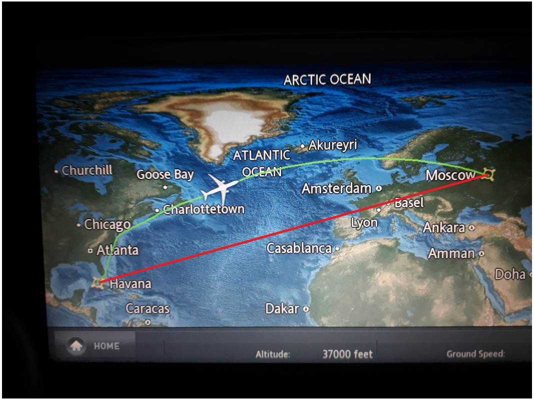
- Најкраћи пут између две тачке на сфери.



Слика: Најкраћи пут између Хаване и Москве

Неки интересантни проблеми на сфери

- Најкраћи пут између две тачке на сфери.
  - Колика је дужина зеленог пута? А црвеног?



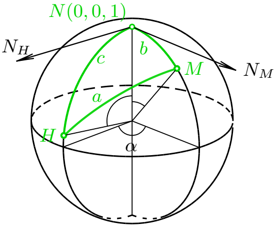
Слика: Најкраћи пут између Хаване и Москве

Неки интересантни проблеми на сфери

- Најкраћи пут између две тачке на сфери.

  - Москва (55.8° N, 37.6° E), Хавана (23.1° N, 82.4° W)
    Основна формула сферне геометрије

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$



Слика 27: Најкраће растојање на сфери

Неки интересантни проблеми на сфери

- Најкраћи пут између две тачке на сфери.

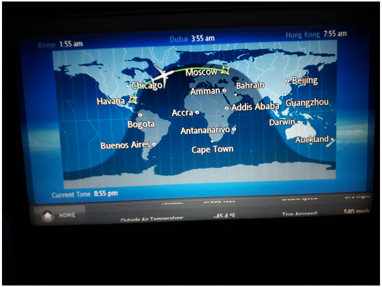
Слика: Геодезијска линија

Неки интересантни проблеми на сфери

- Ако је у Београду јун, око $2h$ ујутро, осенчити на карти делове у којима је ноћ.

Неки интересантни проблеми на сфери

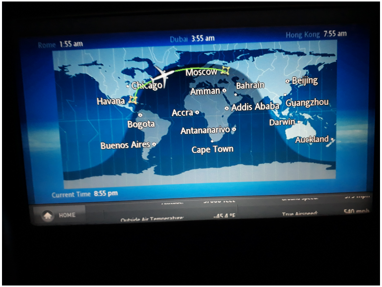
- Ако је у Београду јун, око $2h$ ујутро, осенчити на карти делове у којима је ноћ.



Слика: Летњи изглед расподеле дана и ноћи

Неки интересантни проблеми на сфери

- Ако је у Београду јун, око $2h$ ујутро, осенчити на карти делове у којима је ноћ.

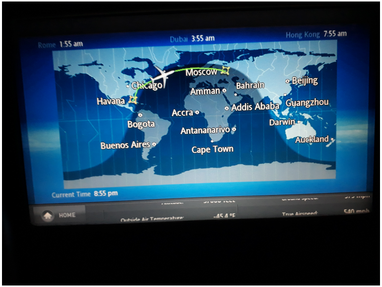


Слика: Летњи изглед расподеле дана и ноћи

- Како ова слика изгледа у септембру?

Неки интересантни проблеми на сфери

- Ако је у Београду јун, око $2h$ ујутро, осенчити на карти делове у којима је ноћ.



Слика: Летњи изглед расподеле дана и ноћи

- Како ова слика изгледа у септембру?
- Како би слика изгледала да се користи стереографска пројекција?