УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

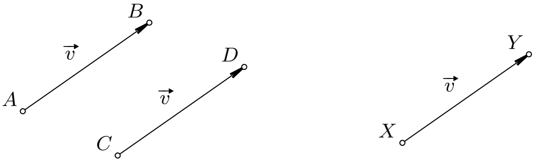
Геометрија И–смер

део 1: Вектори и трансформације координата

Тијана Шукиловић

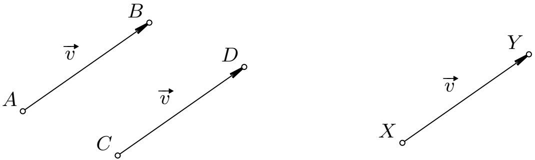
3. oктобар 2018

Основни појмови – обнављање



Слика 1: Еквивалентне усмерене дужи

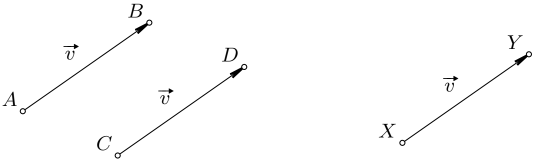
Основни појмови – обнављање



Слика 1: Еквивалентне усмерене дужи

- примери векторских и скаларних величина

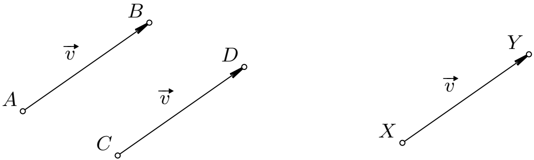
Основни појмови – обнављање



Слика 1: Еквивалентне усмерене дужи

- примери векторских и скаларних величина
- вектор представник

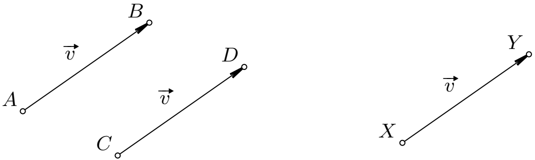
Основни појмови – обнављање



Слика 1: Еквивалентне усмерене дужи

- примери векторских и скаларних величина
- вектор представник
- нула вектор $\vec{0}$

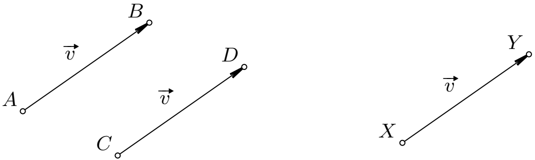
Основни појмови – обнављање



Слика 1: Еквивалентне усмерене дужи

- примери векторских и скаларних величина
- вектор представник
- нула вектор $\vec{0}$
- супротан вектор

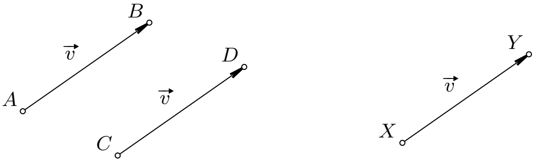
Основни појмови – обнављање



Слика 1: Еквивалентне усмерене дужи

- примери векторских и скаларних величина
- вектор представник
- нула вектор $\vec{0}$
- супротан вектор
- колинеарни вектори

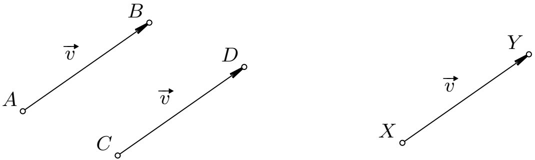
Основни појмови – обнављање



Слика 1: Еквивалентне усмерене дужи

- примери векторских и скаларних величина
- вектор представник
- нула вектор $\overrightarrow{0}$
- супротан вектор
- колинеарни вектори
- копланарни вектори

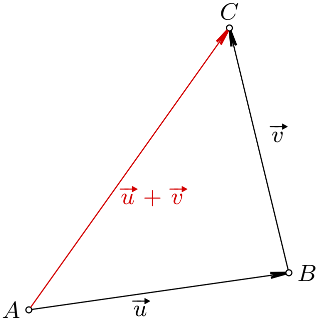
Основни појмови – обнављање



Слика 1: Еквивалентне усмерене дужи

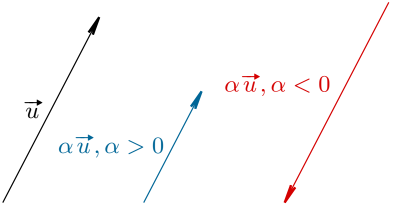
- примери векторских и скаларних величина
- вектор представник
- нула вектор $\vec{0}$
- супротан вектор
- колинеарни вектори
- копланарни вектори
- скуп свих вектора $\mathbb{V}$, односно $\mathbb{V}^n$

Операције са векторима – обнављање



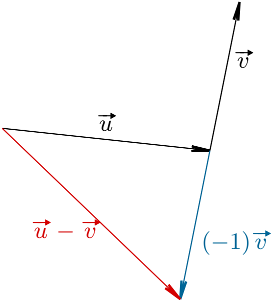
Слика 2: Сабирање вектора

Операције са векторима – обнављање



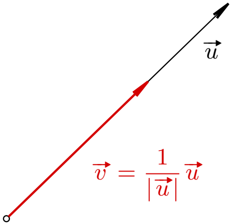
Слика 3: Множење вектора скаларом

Операције са векторима – обнављање



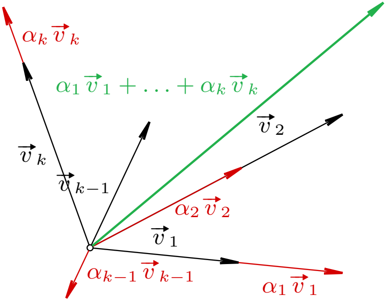
Слика 4: Разлика вектора

Операције са векторима – обнављање



Слика 5: Јединични вектор

Операције са векторима – обнављање



Слика 6: Линеарна комбинација вектора

Линеарна (не)зависност вектора – обнављање

- линеарно независни вектори

$$\alpha_1 \overrightarrow{v_1} + \cdots + \alpha_n \overrightarrow{v_n} = \overrightarrow{0} \implies \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$$

Линеарна (не)зависност вектора – обнављање

- линеарно независни вектори

$$\alpha_1 \overrightarrow{v_1} + \cdots + \alpha_n \overrightarrow{v_n} = \overrightarrow{0} \implies \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$$

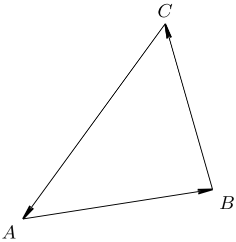
- линеарно зависни вектори

Линеарна (не)зависност вектора – обнављање

- линеарно независни вектори

$$\alpha_1\overrightarrow{v_1} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{v_n} = \overrightarrow{0} \implies \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$$

- линеарно зависни вектори



$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{0}$$

Слика 7: Вектори одређени страницама троугла су линеарно зависни

Линеарна зависност и независност вектора

Теорема 1.1

Ненула вектори $\vec{u}$ и $\vec{v}$ су линеарно зависни ако и само ако су колинеарни.

Линеарна зависност и независност вектора

Теорема 1.1

Ненула вектори $\vec{u}$ и $\vec{v}$ су линеарно зависни ако и само ако су колинеарни.

Теорема 1.2

У равни постоје два линеарно независна вектора, а свака три вектора равни су линеарно зависна.

Линеарна зависност и независност вектора

Теорема 1.1

Ненула вектори $\vec{u}$ и $\vec{v}$ су линеарно зависни ако и само ако су колинеарни.

Теорема 1.2

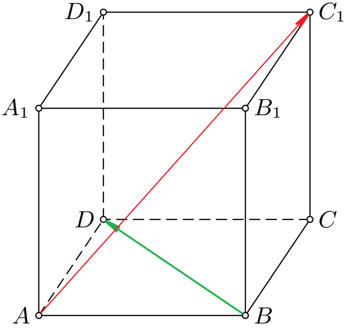
У равни постоје два линеарно независна вектора, а свака три вектора равни су линеарно зависна.

Теорема 1.3

У простору постоје три линеарно независна вектора, а свака четири вектора су линеарно зависна.

Примери

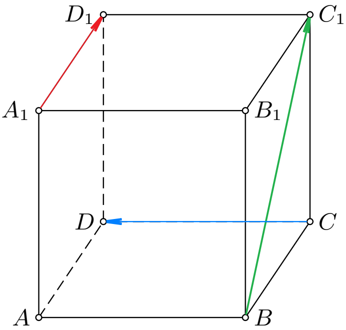
Пример 1



Слика 8: Да ли су вектори $\overrightarrow{AC_1}$ и $\overrightarrow{BD}$ колинеарни?

Примери

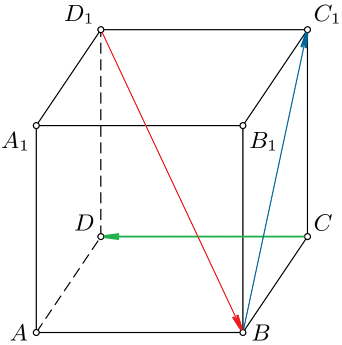
Пример 1



Слика 9: Да ли су вектори $\overrightarrow{BC_1}$, $\overrightarrow{A_1D_1}$ и $\overrightarrow{CD}$ копланарни?

Примери

Пример 1



Слика 10: Да ли су вектори $\overrightarrow{BC_1}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{D_1B}$ копланарни?

База и димензија векторског простора

- Векторски простор

База и димензија векторског простора

- Векторски простор
- База векторског простора = максималан скуп линеарно независних вектора.

База и димензија векторског простора

- Векторски простор
- База векторског простора = максималан скуп линеарно независних вектора.
- Димензија векторског простора = број елемената базе.

База и димензија векторског простора

- Векторски простор
- База векторског простора = максималан скуп линеарно независних вектора.
- Димензија векторског простора = број елемената базе.

Последица 2.1

Димензија векторског простора вектора равни $\mathbb{V}^2$ је два.

База и димензија векторског простора

- Векторски простор
- База векторског простора = максималан скуп линеарно независних вектора.
- Димензија векторског простора = број елемената базе.

Последица 2.1

Димензија векторског простора вектора равни $\mathbb{V}^2$ је два. Сваки вектор $\vec{v} \in \mathbb{V}^2$ може да се напише у облику:

$$\vec{v} = x_1\,\vec{e_1} + x_2\,\vec{e_2},$$

где је $e = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$ база векторског простора $\mathbb{V}^2$.

База и димензија векторског простора

- Векторски простор
- База векторског простора = максималан скуп линеарно независних вектора.
- Димензија векторског простора = број елемената базе.

Последица 2.1

Димензија векторског простора вектора равни $\mathbb{V}^2$ је два. Сваки вектор $\vec{v} \in \mathbb{V}^2$ може да се напише у облику:

$$\vec{v} = x_1\,\vec{e_1} + x_2\,\vec{e_2},$$

где је $e = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$ база векторског простора $\mathbb{V}^2$.

$\vec{e_1}, \vec{e_2}$ – линеарно независни $\Longrightarrow$ $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ – јединствени.

Координате вектора

- База $e = (e_1, e_2)$ векторског простора $\mathbb{V}^2$.
- Координате вектора $\overrightarrow{v} \in \mathbb{V}^2$ у бази e:

$$[\overrightarrow{v}]_e = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Координате вектора

- База $e = (e_1, e_2)$ векторског простора $\mathbb{V}^2$.
- Координате вектора $\vec{v} \in \mathbb{V}^2$ у бази e:

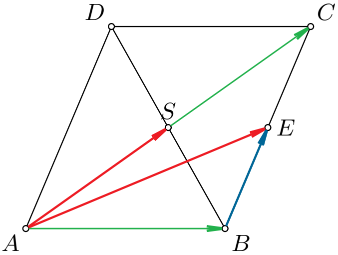
$$[\vec{v}]_e = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

- Лако се уопштава на произвољну димензију.

Пример

Пример 2

Дат је паралелограм $ABCD$. Нека је E средиште странице BC и S пресек дијагонала AC и BD. Одредити координате вектора $\overrightarrow{BE}$ у бази $e = \left(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AS}\right)$.



Слика 11: $\left[\overrightarrow{BE}\right]_e = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Координате тачке

- База $e = (e_1, \dots, e_n)$ векторског простора $\mathbb{V}$.
- Фиксирана тачка $O \in \mathbb{E}$ назива се координатни почетак.
- O_e се назива координатним системом или репером простора $\mathbb{E}$.

Координате тачке

- База $e = (e_1, \ldots, e_n)$ векторског простора $\mathbb{V}$.
- Фиксирана тачка $O \in \mathbb{E}$ назива се координатни почетак.
- O_e се назива координатним системом или репером простора $\mathbb{E}$.

Дефиниција 2.1

Координате тачке $X \in \mathbb{E}$ у реперу Oe дефинишемо као координате вектора $\overrightarrow{OX}$ у бази e:

$$[X]_{Oe} := [\overrightarrow{OX}]_e. \tag{1}$$

Веза координата вектора и тачака

У пракси се често користи чињеница да се координате вектора $\overrightarrow{MN}$ добијају „одузимањем координате тачке M од координата тачке N."

Веза координата вектора и тачака

У пракси се често користи чињеница да се координате вектора $\overrightarrow{MN}$ добијају „одузимањем координате тачке M од координата тачке N."
Коректност:

$$\begin{aligned}[\overrightarrow{MN}]_e &= [\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON}]_e\\ &= [\overrightarrow{ON}]_e - [\overrightarrow{OM}]_e\\ &= [N]_{Oe} - [M]_{Oe}.\end{aligned}$$

Веза координата вектора и тачака

У пракси се често користи чињеница да се координате вектора $\overrightarrow{MN}$ добијају „одузимањем координате тачке M од координата тачке N."
Коректност:

$$\begin{aligned}[\overrightarrow{MN}]_e &= [\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON}]_e \\ &= [\overrightarrow{ON}]_e - [\overrightarrow{OM}]_e \\ &= [N]_{Oe} - [M]_{Oe}.\end{aligned}$$

Пример 3

Одредити координате темена паралелограма из Примера 2 у реперу Ae.

Скаларни производ – обнављање

Дефиниција 3.1 (Скаларни производ)

$$\vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{V}: \quad \vec{v} \cdot \vec{u} := |\vec{v}|\,|\vec{u}| \cos \angle(\vec{v}, \vec{u}),$$

Скаларни производ – обнављање

Дефиниција 3.1 (Скаларни производ)

$$\vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{V}: \quad \vec{v} \cdot \vec{u} := |\vec{v}|\,|\vec{u}| \cos \angle(\vec{v}, \vec{u}),$$

Примене скаларног производа:

- Дужине:

$$|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}};$$

- Углови:

$$\angle(\vec{v}, \vec{u}) = \arccos \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{|\vec{v}|\,|\vec{u}|}$$

Скаларни производ у ортонормираној бази

- Особине скаларног производа

Скаларни производ у ортонормираној бази

- Особине скаларног производа
- Ортонормирана база $=$ база $e = (\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n}) : \ \overrightarrow{e_i} \cdot \overrightarrow{e_j} = \delta_{ij}.$

Скаларни производ у ортонормираној бази

- Особине скаларног производа
- Ортонормирана база = база $e = (\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n}) : \ \overrightarrow{e_i} \cdot \overrightarrow{e_j} = \delta_{ij}$.
- $\overrightarrow{v} = v_1 e_1 + v_2 e_2 + \ldots + v_n e_n, \ \overrightarrow{u} = u_1 e_1 + u_2 e_2 + \ldots + u_n e_n$:

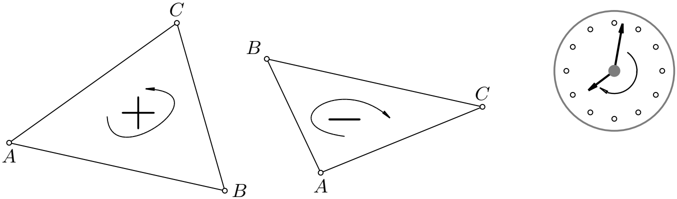
$$\begin{aligned} \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} &= v_1 u_1 + v_2 u_2 + \ldots + v_n u_n \\ &= (v_1, \ldots, v_n) \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = [\overrightarrow{v}]_e^T \cdot [\overrightarrow{u}]_e \end{aligned}$$

Оријентација равни

- Појам оријентације уводимо интуитивно.
  Ствар је договора шта називамо позитивном, а шта негативном оријентацијом.

Оријентација равни

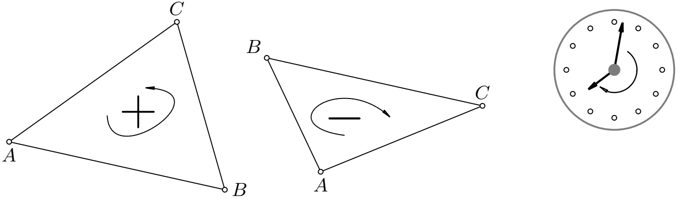
- Појам оријентације уводимо интуитивно.
  Ствар је договора шта називамо позитивном, а шта негативном оријентацијом.



Слика 12: Троугао позитивне и негативне оријентације

Оријентација равни

- Појам оријентације уводимо интуитивно.
  Ствар је договора шта називамо позитивном, а шта негативном оријентацијом.



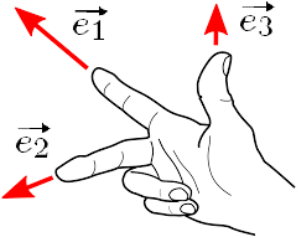
Слика 12: Троугао позитивне и негативне оријентације

- База $e = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ је позитивне оријентације, ако је троугао OAB позитивне оријентације.

Оријентација простора

Базе $e = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ је позитивне оријентације ако важи правило руке:

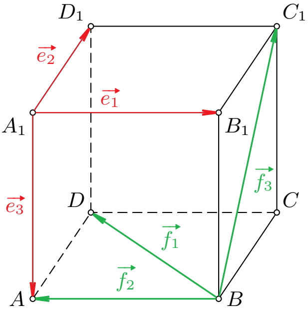
> „ако испружени кажипрст руке представља вектор $\overrightarrow{e_1}$, средњи прст вектор $\overrightarrow{e_2}$, а палац вектор $\overrightarrow{e_3}$, онда је база $e = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ позитивне оријентације".



Пример

Пример 4

Дата је коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Одредити оријентацију ортонормиране базе $e = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, $\vec{e_1} = \overrightarrow{A_1B_1}$, $\vec{e_2} = \overrightarrow{A_1D_1}$, $\vec{e_3} = \overrightarrow{A_1A}$ ако је база $f = \left(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC_1}\right)$ позитивне оријентације.



Слика 13: Оријентација простора

Векторски производ – обнављање

Дефиниција 3.2 (Векторски производ)

$\vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{V}^3 : \quad \vec{v} \times \vec{u} := \vec{w}$, где је $\vec{w}$ вектор који има:

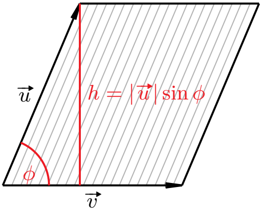
- Интензитет: $|\vec{w}| = |\vec{v}|\,|\vec{u}| \sin \angle(\vec{v}, \vec{u})$;
- Правац: $\vec{w} \perp \vec{v},\ \vec{u}$;
- Смер: База $(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$ је позитивне оријентације.

Векторски производ – обнављање

Дефиниција 3.2 (Векторски производ)

$\vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{V}^3 : \quad \vec{v} \times \vec{u} := \vec{w}$, где је $\vec{w}$ вектор који има:

- Интензитет: $|\vec{w}| = |\vec{v}|\ |\vec{u}| \sin\angle(\vec{v}, \vec{u})$;
- Правац: $\vec{w} \perp \vec{v},\ \vec{u}$;
- Смер: База $(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$ је позитивне оријентације.



Слика 14: $|\vec{v} \times \vec{u}| = P_{(\vec{v},\vec{u})}$

Векторски производ у ортонормираној бази

- Особине векторског производа

Векторски производ у ортонормираној бази

- Особине векторског производа
- $e = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ – ортонормирана база позитивне оријентације

$\times$	$\overrightarrow{e_1}$	$\overrightarrow{e_2}$	$\overrightarrow{e_3}$
$\overrightarrow{e_1}$	$\overrightarrow{0}$	$\overrightarrow{e_3}$	$-\overrightarrow{e_2}$
$\overrightarrow{e_2}$	$-\overrightarrow{e_3}$	$\overrightarrow{0}$	$\overrightarrow{e_1}$
$\overrightarrow{e_3}$	$\overrightarrow{e_2}$	$-\overrightarrow{e_1}$	$\overrightarrow{0}$

Векторски производ у ортонормираној бази

- Особине векторског производа
- $e = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ – ортонормирана база позитивне оријентације

$\times$	$\vec{e_1}$	$\vec{e_2}$	$\vec{e_3}$
$\vec{e_1}$	$\vec{0}$	$\vec{e_3}$	$-\vec{e_2}$
$\vec{e_2}$	$-\vec{e_3}$	$\vec{0}$	$\vec{e_1}$
$\vec{e_3}$	$\vec{e_2}$	$-\vec{e_1}$	$\vec{0}$

- $\vec{v} = v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3, \ \vec{u} = u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3$

$$\vec{v} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}.$$

Матрична репрезентација векторског множења

- Множење вектором $\overrightarrow{p}$, $[\overrightarrow{p}]_e = (p_1, p_2, p_3)$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{p} \times \overrightarrow{v} &:= p_{\times} \cdot [\overrightarrow{v}]_e \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -p_3 & p_2 \\ p_3 & 0 & -p_1 \\ -p_2 & p_1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Примене векторског производа

$$A, B, C \in \mathbb{E}^2 : \quad A(a_1, a_2, 0), \;\; B(b_1, b_2, 0), \;\; C(c_1, c_2, 0):$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 \end{vmatrix} \vec{e_3} =: D_{ABC}\, \vec{e_3}.$$

Важи:

Примене векторског производа

$$A, B, C \in \mathbb{E}^2: \quad A(a_1, a_2, 0),\ B(b_1, b_2, 0),\ C(c_1, c_2, 0):$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 \end{vmatrix} \vec{e_3} =: D_{ABC}\, \vec{e_3}.$$

Важи:

- $P_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}\,|D_{ABC}|;$

Примене векторског производа

$$A, B, C \in \mathbb{E}^2 : \quad A(a_1, a_2, 0),\ B(b_1, b_2, 0),\ C(c_1, c_2, 0):$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 \end{vmatrix} \vec{e_3} =: D_{ABC}\, \vec{e_3}.$$

Важи:

- $P_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} |D_{ABC}|$;
- A, B, C – колинеарне $\iff$ $D_{ABC} = 0$;

Примене векторског производа

$$A, B, C \in \mathbb{E}^2 : \quad A(a_1, a_2, 0),\ B(b_1, b_2, 0),\ C(c_1, c_2, 0):$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 \end{vmatrix} \vec{e_3} =: D_{ABC}\, \vec{e_3}.$$

Важи:

- $P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |D_{ABC}|$;
- A, B, C – колинеарне $\iff$ $D_{ABC} = 0$;
- $\triangle ABC$ – позитивно оријентисан ако $D_{ABC} > 0$.

Примене векторског производа

$$A, B, C \in \mathbb{E}^2 : \quad A(a_1, a_2, 0),\ B(b_1, b_2, 0),\ C(c_1, c_2, 0):$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 \end{vmatrix} \vec{e_3} =: D_{ABC}\, \vec{e_3}.$$

Важи:

- $P_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} |D_{ABC}|;$
- A, B, C – колинеарне $\iff D_{ABC} = 0;$
- $\triangle ABC$ – позитивно оријентисан ако $D_{ABC} > 0.$

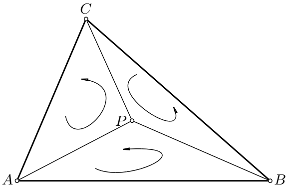
Пример 5

Одредити површину $\triangle ABC$, $A(1, 3)$, $B(4, 0)$, $C(2, 3)$. Да ли је троугао позитивне оријентације?

Примене векторског производа

Теорема 3.1

Тачка P припада троуглу ABC ако и само ако:
$\mathrm{sign}(D_{ABP}) = \mathrm{sign}(D_{BCP}) = \mathrm{sign}(D_{CAP})$.

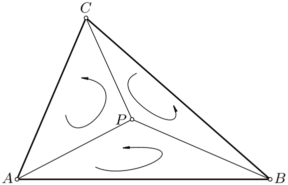


Слика 15: Тачка унутар троугла

Примене векторског производа

Теорема 3.1

Тачка P припада троуглу ABC ако и само ако: $\operatorname{sign}(D_{ABP}) = \operatorname{sign}(D_{BCP}) = \operatorname{sign}(D_{CAP})$.



Слика 15: Тачка унутар троугла

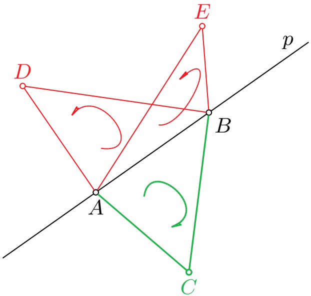
Пример 6

Да ли тачка $P(3,2)$ припада $\triangle ABC$ из Примера 5?

Примене векторског производа

Тачке C и D са исте стране праве p ако и само ако су троуглови ABC и ABD, $A, B \in p$, истих оријентација:

$$\operatorname{sign}(D_{ABC}) = \operatorname{sign}(D_{ABD}).$$

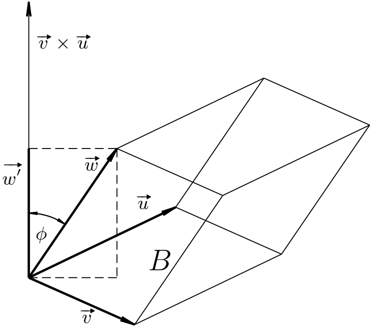


Слика 16: Тачке са исте/разних стране праве

Мешовити производ – обнављање

Дефиниција 3.3 (Мешовити производ)

$$\vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \in \mathbb{V}^3 : \quad [\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] := (\vec{v} \times \vec{u}) \cdot \vec{w}.$$



Слика 17: $|[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}]| = V_{(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})}$

Рачунање и примене мешовитог производа

Мешовити производ у ортонормираној бази:

$$[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Рачунање и примене мешовитог производа

Мешовити производ у ортонормираној бази:

$$[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

- Особине мешовитог производа

Рачунање и примене мешовитог производа

Мешовити производ у ортонормираној бази:

$$[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

- Особине мешовитог производа

Последица 3.1

Вектори $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}$ су линеарно независни ако и само ако:

$$[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] \neq 0.$$

Рачунање и примене мешовитог производа

Мешовити производ у ортонормираној бази:

$$[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

- Особине мешовитог производа

Последица 3.1

Вектори $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}$ су линеарно независни ако и само ако:

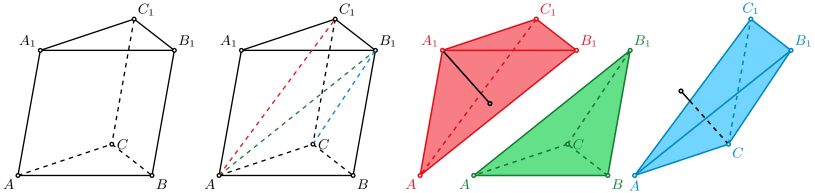
$$[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] \neq 0.$$

Последица 3.2

Вектори $(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$ простора, чине базу позитивне оријентације ако је $[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] > 0$, а негативне оријентације ако је $[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] < 0$.

Примене мешовитог производа

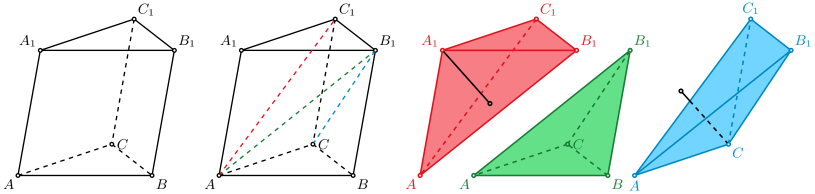
Запремина тетраедра $ABCA_1$ једнака је шестини запремине паралелепипеда одређеног векторима $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AA_1}$.



Слика 18: Подела тростране призме на три пирамиде истих запремина

Примене мешовитог производа

Запремина тетраедра $ABCA_1$ једнака је шестини запремине паралелепипеда одређеног векторима $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AA_1}$.

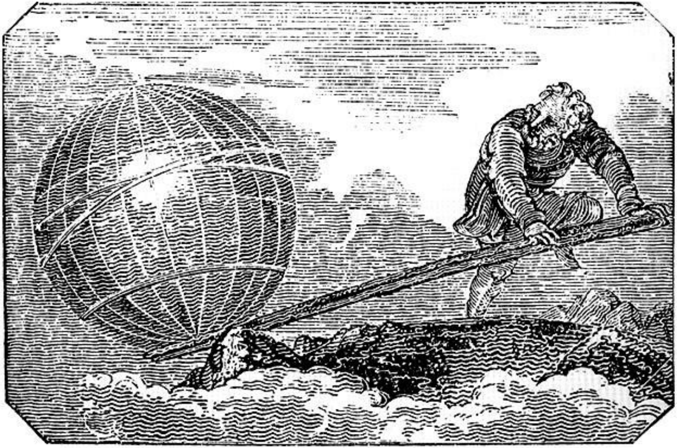


Слика 18: Подела тростране призме на три пирамиде истих запремина

Пример 7

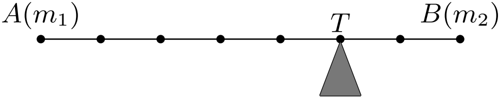
Одредити запремину тетраедра чија су темена $A(1, 0, 0)$, $B(3, 4, 6)$, $C(0, 1, 0)$, $D(1, 1, 3)$.

Архимедов закон полуге



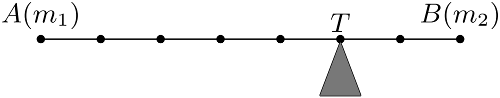
Центар маса тачака

$$|AT| : |TB| = m_2 : m_1 \quad \Longleftrightarrow \quad m_1\overrightarrow{TA} + m_2\overrightarrow{TB} = \vec{0}$$



Центар маса тачака

$$|AT| : |TB| = m_2 : m_1 \quad \Longleftrightarrow \quad m_1\overrightarrow{TA} + m_2\overrightarrow{TB} = \overrightarrow{0}$$



O – произвољна тачка

Центар маса тачака $A(m_1)$ и $B(m_2)$:

$$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{m_1 + m_2}\left(m_1\overrightarrow{OA} + m_2\overrightarrow{OB}\right)$$

Тежиште и центар масе троугла

- $A(m_1), B(m_2), C(m_3)$

Тежиште и центар масе троугла

- $A(m_1), B(m_2), C(m_3)$
- A_1 – центар маса тачака B, C:
  AA_1 – тежишна дуж (из A)

Тежиште и центар масе троугла

- $A(m_1), B(m_2), C(m_3)$
- A_1 – центар маса тачака B, C:
  AA_1 – тежишна дуж (из A)
- T – центар маса тачака A, B, C:

$$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{m_1 + m_2 + m_3}\left(m_1\overrightarrow{OA} + m_2\overrightarrow{OB} + m_3\overrightarrow{OC}\right)$$

Тежиште и центар масе троугла

- $A(m_1), B(m_2), C(m_3)$
- A_1 – центар маса тачака B, C:
  AA_1 – тежишна дуж (из A)
- T – центар маса тачака A, B, C:

$$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{m_1 + m_2 + m_3}\left(m_1\overrightarrow{OA} + m_2\overrightarrow{OB} + m_3\overrightarrow{OC}\right)$$

Теорема 4.1

Тежишне дужи се секу у центру маса.

Тежиште и центар масе троугла

- $A(m_1), B(m_2), C(m_3)$
- A_1 – центар маса тачака B, C:
  AA_1 – тежишна дуж (из A)
- T – центар маса тачака A, B, C:

$$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{m_1 + m_2 + m_3}\left(m_1\overrightarrow{OA} + m_2\overrightarrow{OB} + m_3\overrightarrow{OC}\right)$$

Теорема 4.1

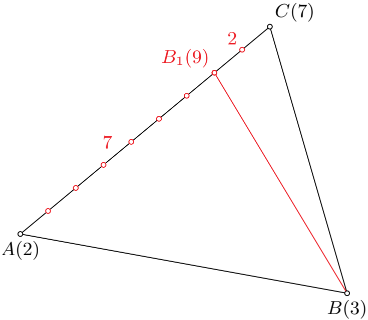
Тежишне дужи се секу у центру маса.

За $m_1 = m_2 = m_3 = m$: центар маса $=$ тежиште троугла!

Примери

Пример 8

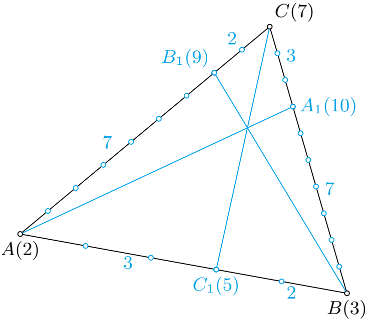
Дате су тачке са масама $A(2), B(3), C(7)$. Одредити у ком односу центар масе дели тежишне дужи $\triangle ABC$.



Примери

Пример 8

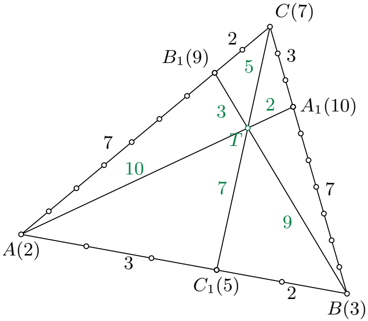
Дате су тачке са масама $A(2), B(3), C(7)$. Одредити у ком односу центар масе дели тежишне дужи $\triangle ABC$.



Примери

Пример 8

Дате су тачке са масама $A(2), B(3), C(7)$. Одредити у ком односу центар масе дели тежишне дужи $\triangle ABC$.



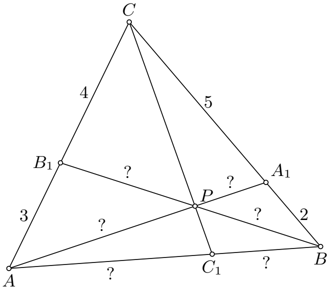
Примери

Пример 9

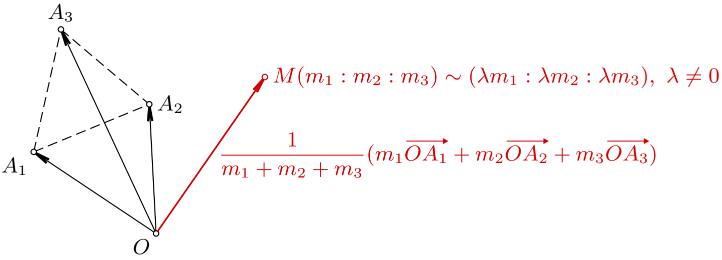
Дат је $\triangle ABC$ и на његовим ивицама тачке A_1 и B_1 такве да $|AB_1| : |B_1C| = 3 : 4$, $|BA_1| : |A_1C| = 2 : 5$.

а) Ако је $\{P\} = AA_1 \cap BB_1$, у ком односу P дели AA_1 и BB_1?

б) Ако је $\{C_1\} = CP \cap AB$, у ком односу C_1 дели AB?



Барицентричке координате

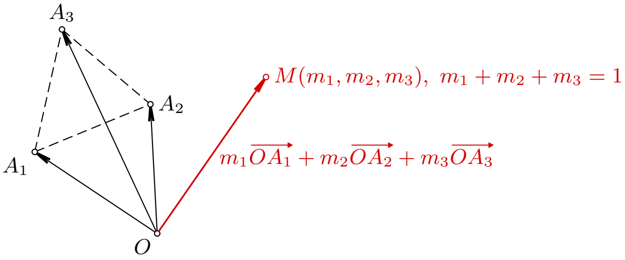


$$M(m_1 : m_2 : m_3) \sim (\lambda m_1 : \lambda m_2 : \lambda m_3),\ \ \lambda \neq 0$$

$$\frac{1}{m_1+m_2+m_3}(m_1\overrightarrow{OA_1}+m_2\overrightarrow{OA_2}+m_3\overrightarrow{OA_3})$$

Слика 19: Хомогене барицентричке координате

Барицентричке координате



Слика 19: Нехомогене барицентричке координате

Смисао барицентричких координата

Одредити барицентричке координате тачке M значи одредити масе које треба ставити у темена $\triangle A_1A_2A_3$ да би центар масе тог система била тачка M.

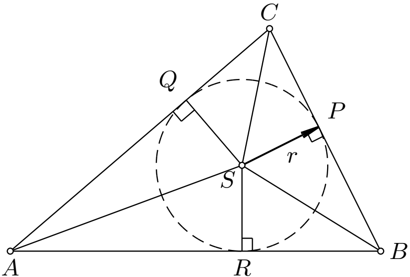
Пример 10

За $\triangle ABC$ барицентричке координате тежишта су $T(1:1:1)$ (хомогене), тј. $T\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ (нехомогене).

Пример - центар уписаног круга

Пример 11

Одредити координате центра уписаног круга у $\triangle ABC$.



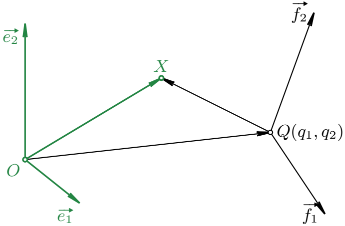
Слика 20: Круг уписан у $\triangle ABC$

Трансформације координата вектора

- $e = (\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ – стара база
- $f = (\overrightarrow{f_1}, \ldots, \overrightarrow{f_n})$ – нова база
- $C = C_{e \to f}$ – матрица преласка = матрица чије су колоне координате вектора нове базе f у старој бази e, редом.

$$[\overrightarrow{v}]_e = C[\overrightarrow{v}]_f$$

Трансформације координата тачака

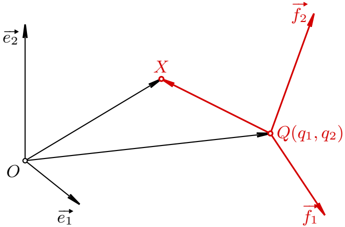


Слика 21: Трансформације координата тачака

$$\boxed{x} = Cx' + q$$

$$x = [X]_{Oe} = (x_1, x_2)^T$$

Трансформације координата тачака

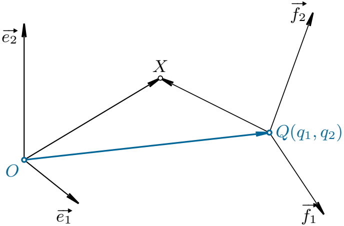


Слика 21: Трансформације координата тачака

$$x = C\,\boxed{x'} + q$$

$$x' = [X]_{Qf} = (x_1', x_2')^T$$

Трансформације координата тачака

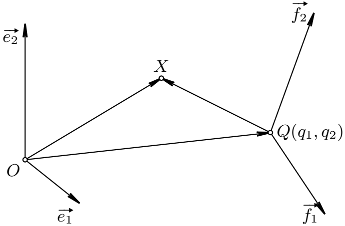


Слика 21: Трансформације координата тачака

$$x = \boxed{C}\, x' + \boxed{q}$$

$$C = C_{e\to f} \qquad q = [Q]_{Oe} = (q_1, q_2)^T$$

Трансформације координата тачака



Слика 21: Трансформације координата тачака

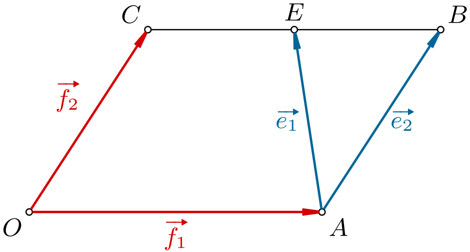
$$x = \boxed{C}\,x' + \boxed{q}$$

линеарни део

транслаторни део

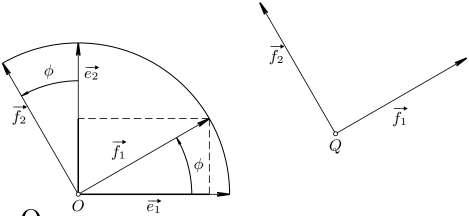
Примери

Пример 12



Слика 22: Одредити координате темена паралелограма у старом реперу Ae и новом реперу Of. Одредити везу између координата.

Трансформације ортонормираних репера равни

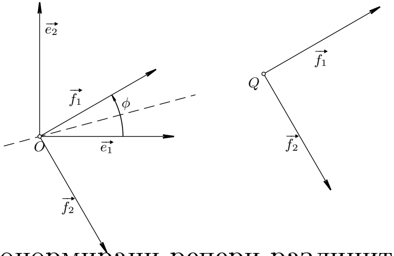


Слика 23: Ортонормирани репери истих оријентација

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}.$$

матрица ротације

Трансформације ортонормираних репера равни

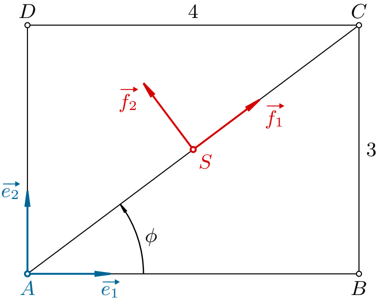


Слика 24: Ортонормирани репери различитих оријентација

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\boxed{\begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix}}}_{\text{матрица рефлексије}} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}.$$

Примери

Пример 13



Слика 25: Одредити везу координата као и координате темена правоугаоника у новом реперу.