УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Геометрија И–смер

део 5: Полигони и полиедри

Тијана Шукиловић

23. децембар 2018

Полигонска линија и полигон

Дефиниција 1.1

Полигонска линија $A_0 \dots A_{n-1} A_n$ је унија дужи $A_0 A_1, \dots,$ $A_{n-1} A_n$ које називамо ивице полигонске линије. Тачке $A_0, \dots A_n$ називају се темена полигонске линије.

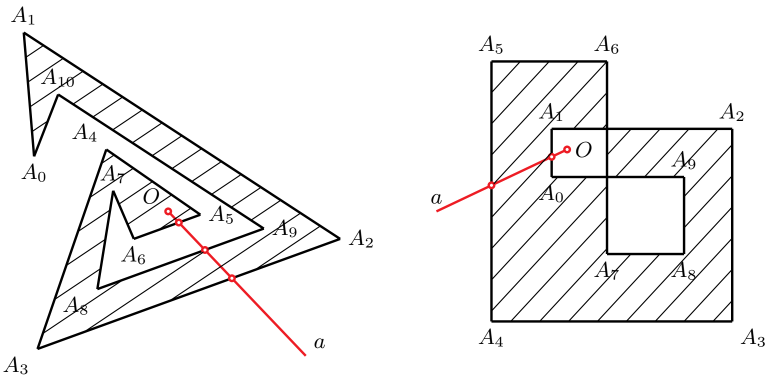
Полигонска линија и полигон

Дефиниција 1.1

Полигонска линија $A_0 \dots A_{n-1}A_n$ је унија дужи $A_0A_1, \dots, A_{n-1}A_n$ које називамо ивице полигонске линије. Тачке $A_0, \dots A_n$ називају се темена полигонске линије.

- затворена полигонска линија = полигон
- суседна темена/ивице
- прост/сложен полигон
- дијагонала полигона
- унутрашња дијагонала полигона

Унутршњост полигона



Слика 1: Унутрашњост простог и сложеног полигона

Површина простог полигона

- Оријентисана површина полигона $P(A_0 A_1 \ldots A_{n-1})$

Површина простог полигона

- Оријентисана површина полигона $P(A_0A_1\ldots A_{n-1})$

Теорема 1.1

За прост полигон $A_0A_1\ldots A_{n-1}$ и произвољну тачку равни A важи:

$$P(A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}) = P(A, A_0, A_1) + \ldots + P(A, A_{n-1}, A_0).$$

Површина простог полигона

- Оријентисана површина полигона $P(A_0 A_1 \dots A_{n-1})$

Теорема 1.1

За прост полигон $A_0 A_1 \dots A_{n-1}$ и произвољну тачку равни A важи:

$$P(A_0, A_1, \dots, A_{n-1}) = P(A, A_0, A_1) + \dots + P(A, A_{n-1}, A_0).$$

$$\begin{aligned} P(A_0, A_1, \dots, A_{n-1}) &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (x_k y_{k+1} - x_{k+1} y_k) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} x_k (y_{k+1} - y_{k-1}) \end{aligned}$$

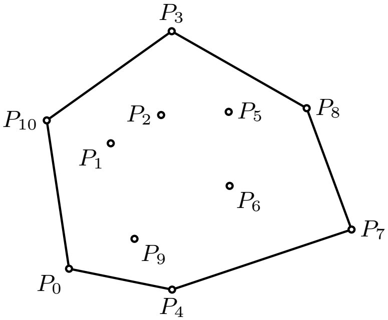
Пример

Пример 1

У равни су дате тачке $P_0 = (1, -3)$, $P_1 = (2, -2)$, $P_2 = (-1, 2)$, $P_3 = (4, -1)$, $P_4 = (0, 3)$.
Испитати да ли је полигон $P_0P_1P_2P_3P_4$ прост.
Ако није, сортирати тачке $P_0, \dots P_4$ тако да полигон буде прост.
Израчунати површину тако добијеног простог полигона.

Конвексни омотач

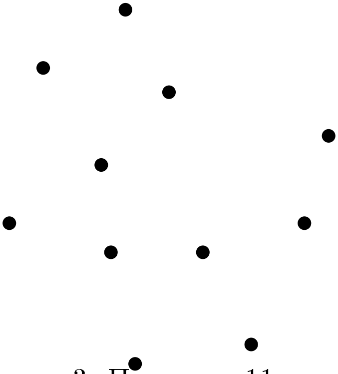
- конвексан лик
- конвексан омотач скупа тачака



Слика 2: Пример конвексног омотача скупа од 11 тачака

Алгоритам „ивичне дужи” (спори алгоритам)

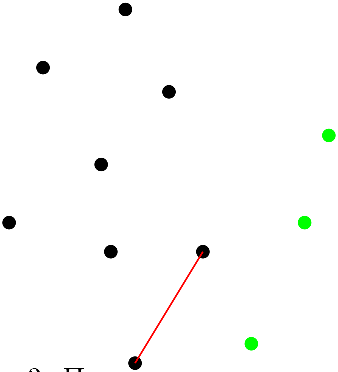
- Временска сложеност $O(n^3)$



Слика 3: Пример – 11 тачака

Алгоритам „ивичне дужи” (спори алгоритам)

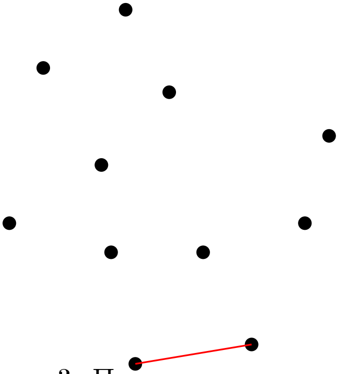
- Временска сложеност $O(n^3)$



Слика 3: Пример – унутрашња дуж

Алгоритам „ивичне дужи” (спори алгоритам)

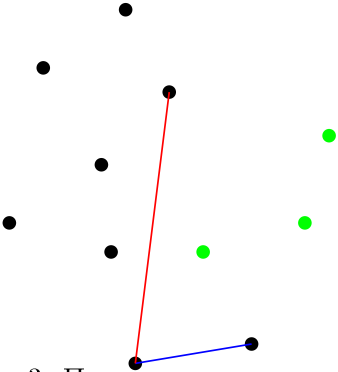
- Временска сложеност $O(n^3)$



Слика 3: Пример – ивична дуж

Алгоритам „ивичне дужи” (спори алгоритам)

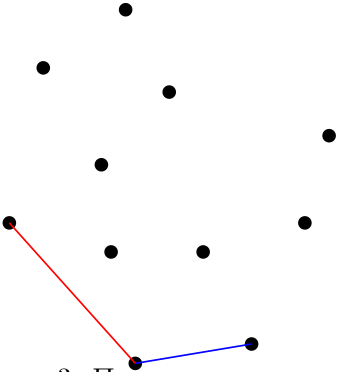
- Временска сложеност $O(n^3)$



Слика 3: Пример – унутрашња дуж

Алгоритам „ивичне дужи” (спори алгоритам)

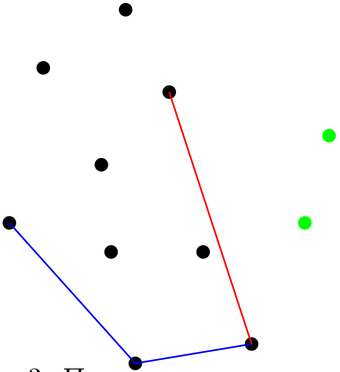
- Временска сложеност $O(n^3)$



Слика 3: Пример – ивична дуж

Алгоритам „ивичне дужи” (спори алгоритам)

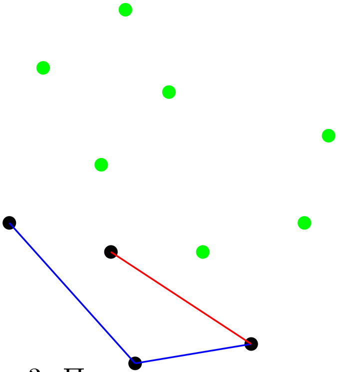
- Временска сложеност $O(n^3)$



Слика 3: Пример – унутрашња дуж

Алгоритам „ивичне дужи” (спори алгоритам)

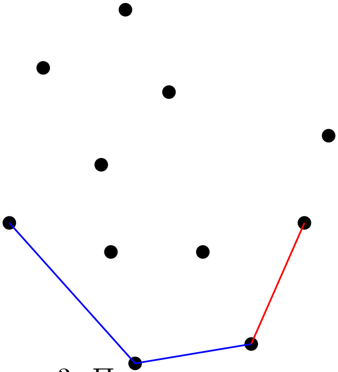
- Временска сложеност $O(n^3)$



Слика 3: Пример – унутрашња дуж

Алгоритам „ивичне дужи” (спори алгоритам)

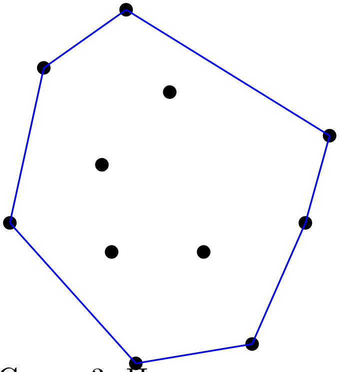
- Временска сложеност $O(n^3)$



Слика 3: Пример – ивична дуж

Алгоритам „ивичне дужи” (спори алгоритам)

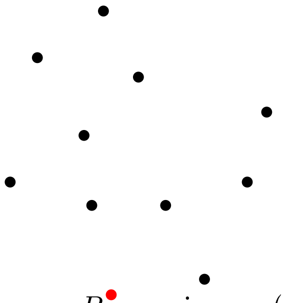
- Временска сложеност $O(n^3)$



Слика 3: Пример – омотач

Алгоритам „паковање поклона” (gift wrap)

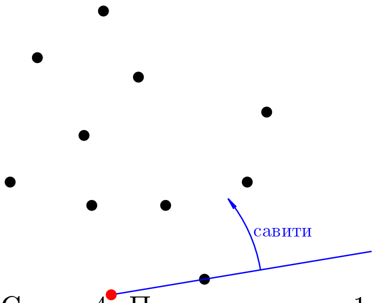
- Временска сложеност $O(n^2)$



Слика 4: Пример – P_0 = најнижа (крајња десна) тачка

Алгоритам „паковање поклона” (gift wrap)

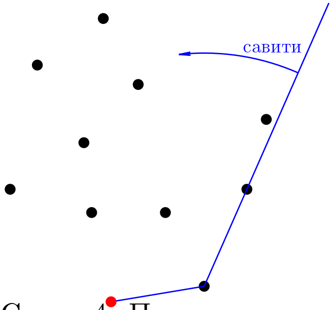
- Временска сложеност $O(n^2)$



Слика 4: Пример – корак 1

Алгоритам „паковање поклона” (gift wrap)

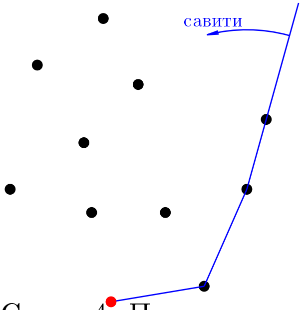
- Временска сложеност $O(n^2)$



Слика 4: Пример – корак 2

Алгоритам „паковање поклона" (gift wrap)

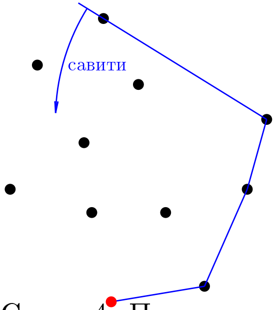
- Временска сложеност $O(n^2)$



Слика 4: Пример – корак 3

Алгоритам „паковање поклона” (gift wrap)

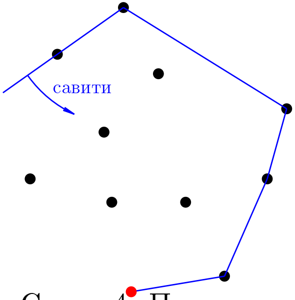
- Временска сложеност $O(n^2)$



Слика 4: Пример – корак 4

Алгоритам „паковање поклона” (gift wrap)

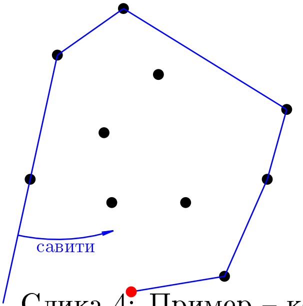
- Временска сложеност $O(n^2)$



Слика 4: Пример – корак 5

Алгоритам „паковање поклона” (gift wrap)

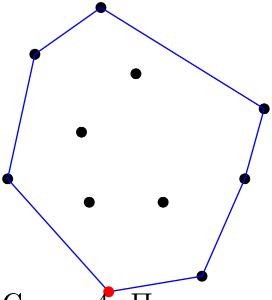
- Временска сложеност $O(n^2)$



Слика 4: Пример – корак 6

Алгоритам „паковање поклона” (gift wrap)

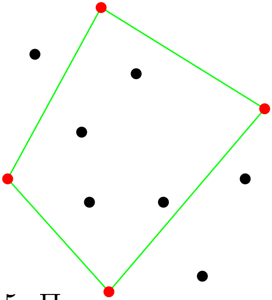
- Временска сложеност $O(n^2)$



Слика 4: Пример – омотач

„Брзи" алгоритам (quickhull)

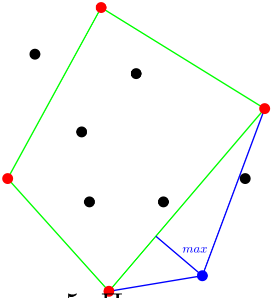
- Временска сложеност $O(n \log n)$



Слика 5: Пример – почетни четвороугао

„Брзи” алгоритам (quickhull)

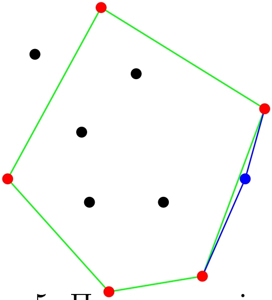
- Временска сложеност $O(n \log n)$



Слика 5: Пример – доњи десни

„Брзи” алгоритам (quickhull)

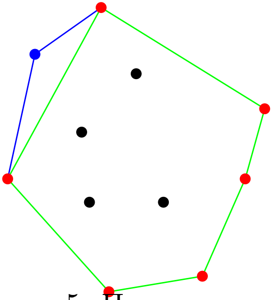
- Временска сложеност $O(n \log n)$



Слика 5: Пример – најдаља од нове

„Брзи” алгоритам (quickhull)

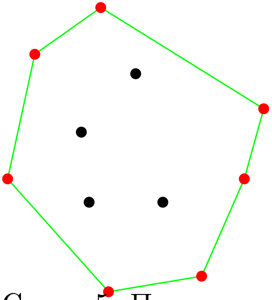
- Временска сложеност $O(n \log n)$



Слика 5: Пример – горњи леви

„Брзи” алгоритам (quickhull)

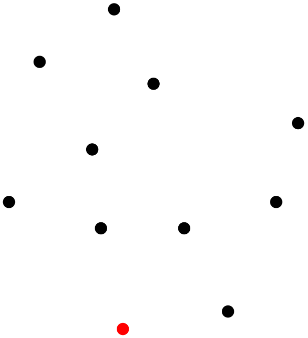
- Временска сложеност $O(n \log n)$



Слика 5: Пример – омотач

Грахамов алгоритам

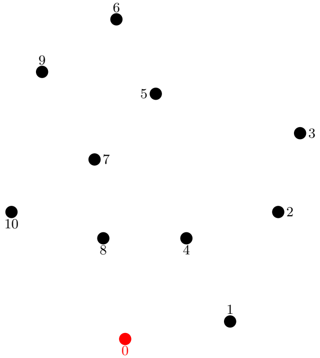
- Временска сложеност $O(n \log n)$



Слика 6: Пример – $P_0 =$ најнижа (крајња десна) тачка

Грахамов алгоритам

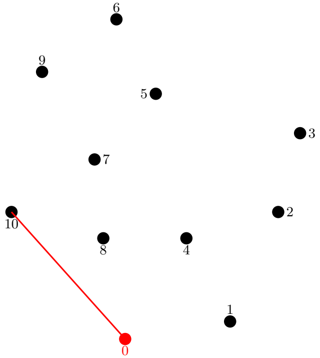
- Временска сложеност $O(n \log n)$



Слика 6: Пример – сортиране тачке (према углу)

Грахамов алгоритам

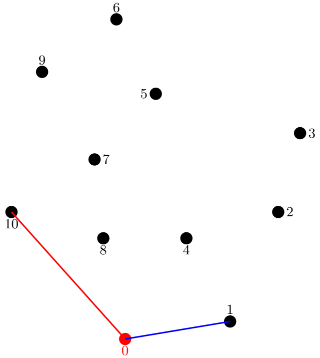
- Временска сложеност $O(n \log n)$



Слика 6: Пример – стек: [10 0]

Грахамов алгоритам

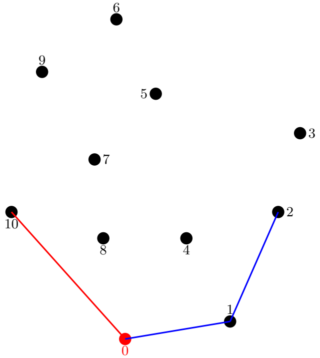
- Временска сложеност $O(n \log n)$



Слика 6: Пример – стек: [10 0 1]

Грахамов алгоритам

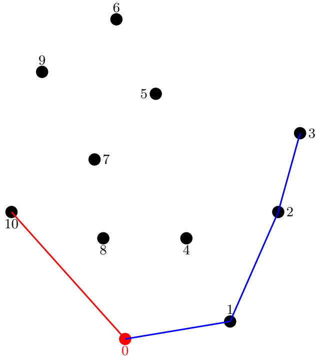
- Временска сложеност $O(n \log n)$



Слика 6: Пример – стек: [10 0 1 2]

Грахамов алгоритам

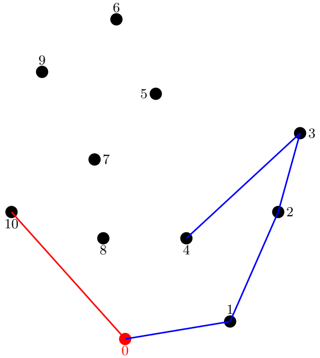
- Временска сложеност $O(n \log n)$



Слика 6: Пример – стек: [10 0 1 2 3]

Грахамов алгоритам

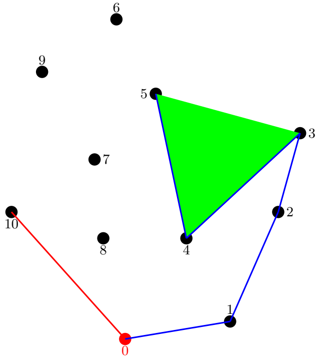
- Временска сложеност $O(n \log n)$



Слика 6: Пример – стек: [10 0 1 2 3 4]

Грахамов алгоритам

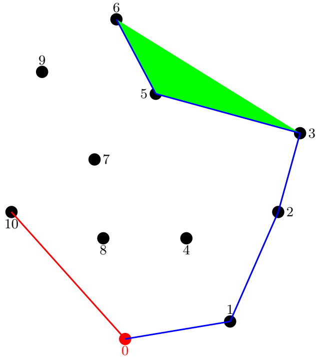
- Временска сложеност $O(n \log n)$



Слика 6: Пример – стек: [10 0 1 2 3 $\cancel{4}$ 5]

Грахамов алгоритам

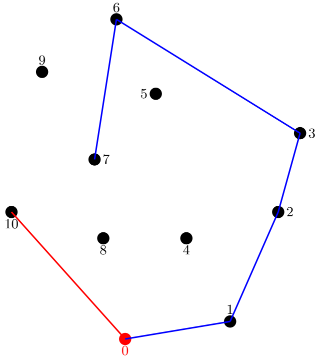
- Временска сложеност $O(n \log n)$



Слика 6: Пример – стек: [10 0 1 2 3 ~~5~~ 6]

Грахамов алгоритам

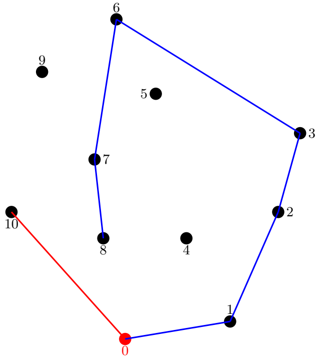
- Временска сложеност $O(n \log n)$



Слика 6: Пример – стек: [10 0 1 2 3 6 7]

Грахамов алгоритам

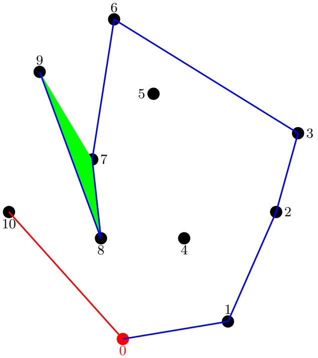
- Временска сложеност $O(n \log n)$



Слика 6: Пример – стек: [10 0 1 2 3 6 7 8]

Грахамов алгоритам

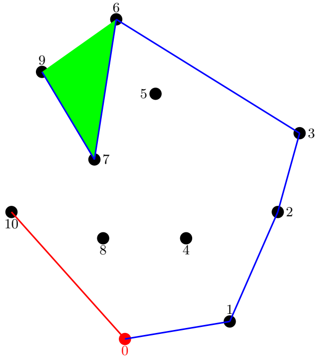
- Временска сложеност $O(n \log n)$



Слика 6: Пример – стек: [10 0 1 2 3 6 7 ~~8~~ 9]

Грахамов алгоритам

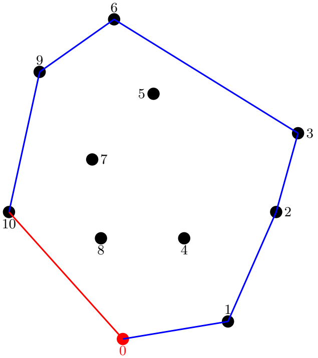
- Временска сложеност $O(n \log n)$



Слика 6: Пример – стек: [10 0 1 2 3 6 ~~7~~ 9]

Грахамов алгоритам

- Временска сложеност $O(n \log n)$



Слика 6: Пример – омотач [10 0 1 2 3 6 9]

Примери

Пример 2

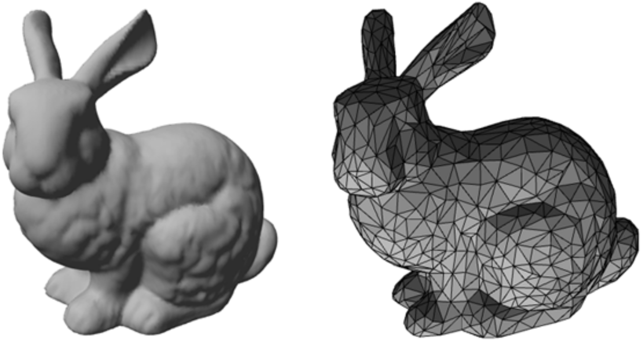
Одредити конвексни омотач скупа тачака $P_0 = (1,3)$, $P_1 = (-2,0)$, $P_2 = (-3,5)$, $P_3 = (4,2)$, $P_4 = (1,1)$, $P_5 = (6,4)$, $P_6 = (2,-3)$, $P_7 = (5,5)$, $P_8 = (5,-1)$.

Задатак решити:

а) Цртањем.

б) Грахамовим алгоритмом.

Полиедарски модел глатке површи



Слика: ”Stanford bunny“

Примене полиедарских модела у архитектури

Слика: MVRDV / 2004, Serpentine Gallery Pavillion[1]

[1] Слика је преузете из презентације доц Радомира Којића, одржане 8.12.2017.

Полиедарска површ

Дефиниција 3.1

Полиедарска површ $\mathcal{M}$ је објекат простора који је унија коначно много пљосни:

1. Пљосни су конвексни полигони;
2. Свака ивица припада највише двема пљоснима (унутрашње и рубне ивице);
3. Пресек две пљосни може бити само ивица.

Полиедарска површ

Дефиниција 3.1

Полиедарска површ $\mathcal{M}$ је објекат простора који је унија коначно много пљосни:

1. Пљосни су конвексни полигони;
2. Свака ивица припада највише двема пљоснима (унутрашње и рубне ивице);
3. Пресек две пљосни може бити само ивица.

- апстрактна полиедарска површ

Полиедарска површ

Дефиниција 3.1

Полиедарска површ $\mathcal{M}$ је објекат простора који је унија коначно много пљосни:

1. Пљосни су конвексни полигони;
2. Свака ивица припада највише двема пљоснима (унутрашње и рубне ивице);
3. Пресек две пљосни може бити само ивица.

- апстрактна полиедарска површ
- полиедар

Полиедарска површ

Дефиниција 3.1

Полиедарска површ $\mathcal{M}$ је објекат простора који је унија коначно много пљосни:

1. Пљосни су конвексни полигони;
2. Свака ивица припада највише двема пљоснима (унутрашње и рубне ивице);
3. Пресек две пљосни може бити само ивица.

- апстрактна полиедарска површ
- полиедар
- повезана површ

Табела темена и повезаности

- Табела темена
- Табела повезаности

Табела темена и повезаности

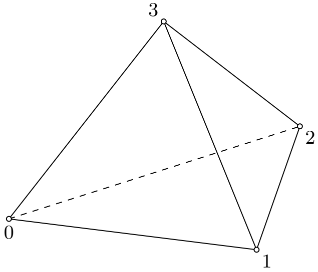
- Табела темена
- Табела повезаности

Табела темена и повезаности

- Табела темена
- Табела повезаности

Пример 3

Одредити табелу повезаности тетраедра.



Слика 9: Тетраедар

Примери

Пример 4

а) Из табеле повезаности одредити скуп ивица.
б) Нацртати слику.
в) Проверити да ли та табела повезаности задаје апстрактну полиедарску површ.
г) У случају потврдног одговора под в) проверити да ли је та полиедарска површ повезана.
д) Одредити руб те површи и број компонената руба.
за следеће табеле повезаности:

1) $\mathcal{T} = \{T_0, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5\}$, $\mathcal{P} = \{p_0, p_1, p_2, p_3\}$,
$p_0 = \langle 0, 1, 2 \rangle$, $p_1 = \langle 0, 2, 4, 5 \rangle$, $p_2 = \langle 3, 2, 0 \rangle$, $p_3 = \langle 1, 0, 3 \rangle$.

Примери

Пример 4

а) Из табеле повезаности одредити скуп ивица.
б) Нацртати слику.
в) Проверити да ли та табела повезаности задаје апстрактну полиедарску површ.
г) У случају потврдног одговора под в) проверити да ли је та полиедарска површ повезана.
д) Одредити руб те површи и број компонената руба.
за следеће табеле повезаности:

2) $\mathcal{T} = \{T_0, T_1, \ldots, T_9, T_{10}\}$, $\mathcal{P} = \{p_0, p_1, p_2, p_3, p_4\}$,
$p_0 = \langle 0, 1, 7, 4\rangle$, $p_1 = \langle 1, 2, 6, 7\rangle$, $p_2 = \langle 2, 3, 5, 6\rangle$, $p_3 = \langle 3, 0, 4, 5\rangle$,
$p_4 = \langle 8, 9, 10\rangle$.

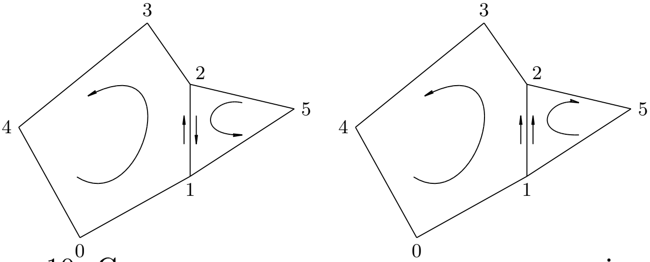
Примери

Пример 4

а) Из табеле повезаности одредити скуп ивица.
б) Нацртати слику.
в) Проверити да ли та табела повезаности задаје апстрактну полиедарску површ.
г) У случају потврдног одговора под в) проверити да ли је та полиедарска површ повезана.
д) Одредити руб те површи и број компонената руба.
за следеће табеле повезаности:

3) $\mathcal{T} = \{T_0, T_1, \ldots, T_7\}$, $\mathcal{P} = \{p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$,
$p_0 = \langle 0, 1, 3 \rangle$, $p_1 = \langle 0, 1, 5, 4 \rangle$, $p_2 = \langle 1, 2, 6, 5 \rangle$, $p_3 = \langle 5, 6, 7 \rangle$,
$p_4 = \langle 7, 4, 0, 3 \rangle$, $p_5 = \langle 2, 6, 7, 3 \rangle$.

Оријентабилност полиедарске површи



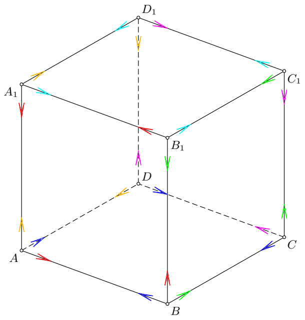
Слика 10: Суседне пљосни исте и различите оријентације

$\mathcal{M}$ – оријентабилна ако су сваке две суседне пљосни исте оријентације.

Оријентабилност

Пример 5

Коцка је оријентабилна.



Слика 11: Усклађивање оријентације коцке

Оријентабилност

Теорема 3.1

Полиедарски модели неке глатке површи су или сви оријентабилни или сви неоријентабилни.

Оријентабилност

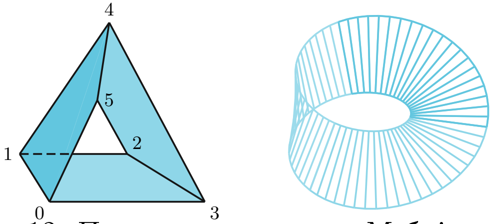
Теорема 3.1

Полиедарски модели неке глатке површи су или сви оријентабилни или сви неоријентабилни.

Теорема 3.2

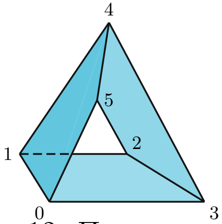
Сваки прост полиедар је оријентабилна површ.

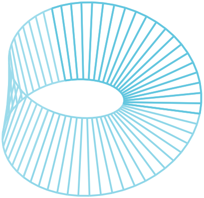
Мебијусова трака



Слика 12: Полиедарски модели Мебијусове траке

Мебијусова трака





Слика 12: Полиедарски модели Мебијусове траке

Пример 6

Полиедарски модел Мебијусове траке је неоријентабилан.

Мебијусова трака – особине

- Једнострана је – могуће ју је сасвим обојити без скидања четкице са папира.
  Кретање по Мебијусовој траци

Мебијусова трака – особине

- Једнострана је – могуће ју је сасвим обојити без скидања четкице са папира.
- Када је пресечемо уздужно добијамо два пута уврнуту једну траку.

Анимације: Бојан Васиљевић (167/2014)

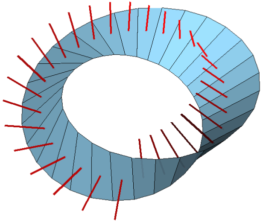
Мебијусова трака – особине

- Једнострана је – могуће ју је сасвим обојити без скидања четкице са папира.
- Када је пресечемо уздужно добијамо два пута уврнуту једну траку. Када и ту траку пресечемо добијамо две уланчане траке.

Анимације: Бојан Васиљевић (167/2014)

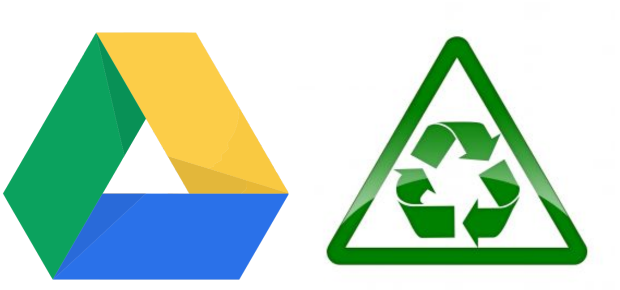
Мебијусова трака – особине

- Једнострана је – могуће ју је сасвим обојити без скидања четкице са папира.
- Када је пресечемо уздужно добијамо два пута уврнуту једну траку. Када и ту траку пресечемо добијамо две уланчане траке.
- Немогуће је дефинисати непрекидну нормалу на Мебијусовој траци.



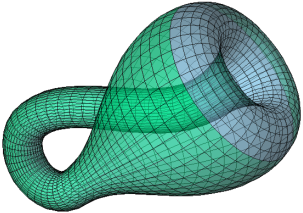
Слика: Нормале на Мебијусову траку

Примери Мебијусове траке



Слика: Лого за Google Drive (лево) и међународни симбол за рециклажу (десно)

Клајнова боца

Слика: Клајнова боца

Вожња бицикла по Клајновој боци

Ојлерова карактеристика и род површи

Ојлерова карактеристика полиедарске површи $\mathcal{M}$ је број

$$\chi(\mathcal{M}) = \underbrace{\boxed{T}}_{\text{темена}} - \underbrace{\boxed{I}}_{\text{ивице}} + \underbrace{\boxed{P}}_{\text{пљосни}}$$

Ојлерова карактеристика и род површи

Ојлерова карактеристика полиедарске површи $\mathcal{M}$ је број

$$\chi(\mathcal{M}) = \boxed{T} - \boxed{I} + \boxed{P}$$

темена ивице пљосни

Теорема 3.3

Сви полиедарски модели неке глатке површи имају исту Ојлерову карактеристику.

Ојлерова карактеристика и род површи

Ојлерова карактеристика полиедарске површи $\mathcal{M}$ је број

$$\chi(\mathcal{M}) = \underbrace{\boxed{T}}_{\text{темена}} - \underbrace{\boxed{I}}_{\text{ивице}} + \underbrace{\boxed{P}}_{\text{пљосни}}$$

Теорема 3.3

Сви полиедарски модели неке глатке површи имају исту Ојлерову карактеристику.

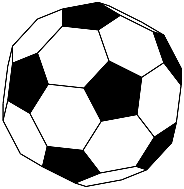
За полиедре важи:

$$\chi(\mathcal{M}) = 2 - 2\underbrace{\boxed{r}}_{\text{род полиедра}}$$

Примери

Пример 7

Ако је $\mathcal{M}$ полиедарски модел сфере, тада је $\chi(\mathcal{M}) = 2$.



Слика 16: Полиедарски модел сфере

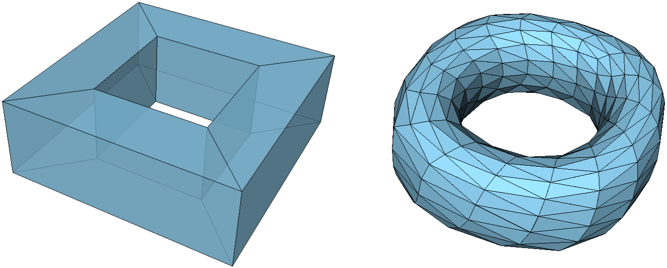
Пример 8

Ојлерова карактеристика Мебијусове траке је нула.

Примери

Пример 9

Род торуса је 1.



Слика: Полиедарски модели торуса

Примери

Пример 10

Дата је полиедарска површ:

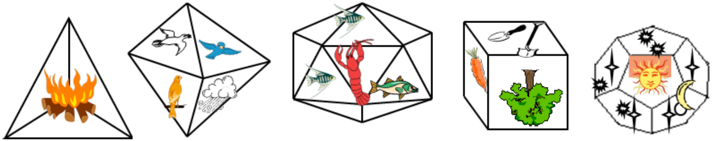
$$
\begin{aligned}
p_0 &= \langle 0,1,4,3\rangle, & p_5 &= \langle 4,5,8,7\rangle,\\
p_1 &= \langle 1,2,5,4\rangle, & p_6 &= \langle 8,7,1,2\rangle,\\
p_2 &= \langle 2,0,3,5\rangle, & p_7 &= \langle 0,1,7,6\rangle\\
p_3 &= \langle 6,8,5,3\rangle, & p_8 &= \langle 0,6,8,2\rangle.\\
p_4 &= \langle 6,3,4,7\rangle
\end{aligned}
$$

а) Доказати да је она полиедар, тј. да нема руб.
б) Израчунати њену Ојлерову карактериску и род.

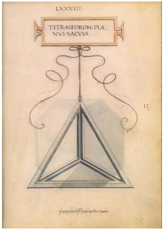
Платонова тела

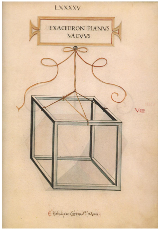
Платон (457 – 347 п.н.е.), „Тимај" или „О метафизици"

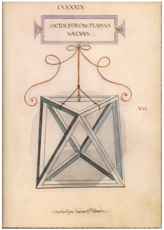
- тетраедар = сувоћа ватре
- октаедар = покретљивост ваздуха
- икосаедар = влажност воде
- хексаедар (коцка) = стабилност земље
- додекаедар = Универзум

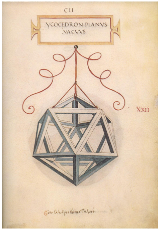


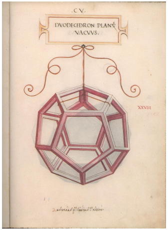
Леонардо да Винчи (1452 – 1519)



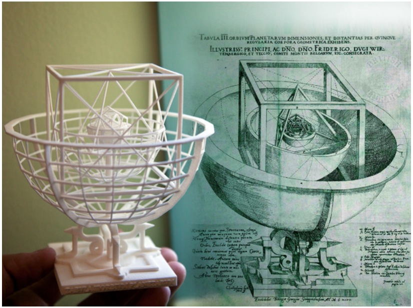






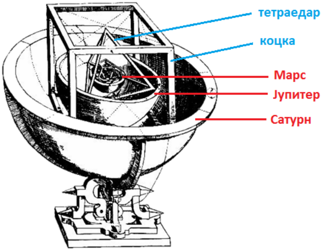


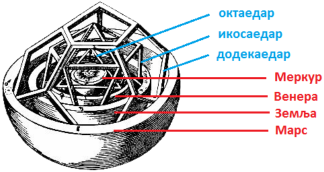
Јохан Кеплер (1571 – 1630)



Слика: Кеплеров модел Соларног система (Joaquin Baldwin 3D Printed Designs)

Јохан Кеплер (1571 – 1630)





Слика: Кеплеров Соларни систем

Платонова тела

Теорема 3.4

Постоји тачно пет Платонових тела.

Платонова тела

Теорема 3.4

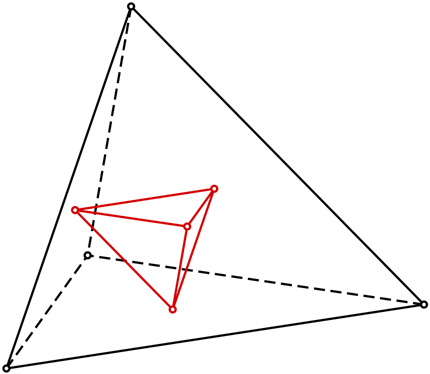
Постоји тачно пет Платонових тела.

полиедар	p	q	T	I	P
тетраедар	3	3	4	6	4
коцка (хексаедар)	3	4	8	12	6
октаедар	4	3	6	12	8
додекаедар	3	5	20	30	12
икосаедар	5	3	12	30	20

p - број ивица из једног темена;

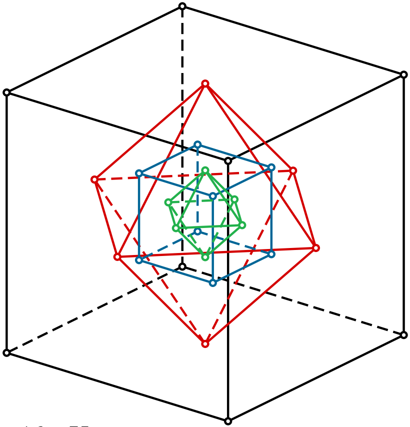
q - број ивица једне пљосни.

Дуалност Платонових тела



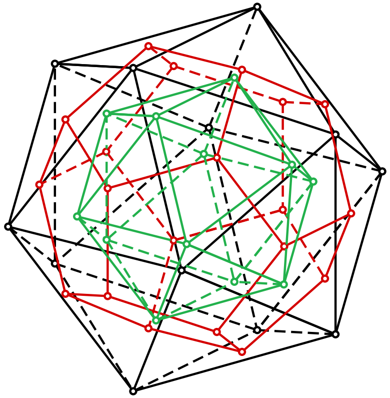
Слика 19: Тетраедар је дуалан самом себи

Дуалност Платонових тела



Слика 19: Хексаедар и октаедар су дуални

Дуалност Платонових тела



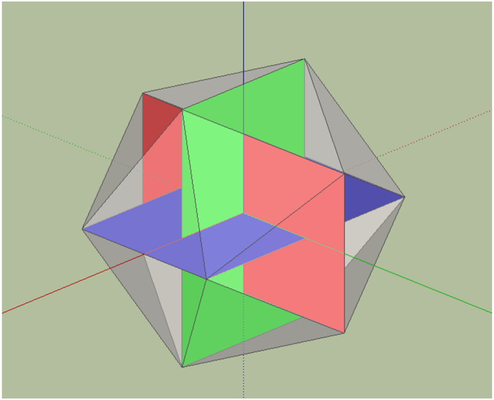
Слика 19: Икосаедар и додекаедар су дуални

Конструкција Платонових тела

Конструкције:

- тетраедар;
- октаедар;
- додекаедар;
- икосаедар.

Конструкција Платонових тела



Слика: Конструкција икосаедра коришћењем „златних правоугаоника”

Конструкција Платонових тела

Еуклидова конструкција додекаедра[2]

[2] анимација проф. Зорана Лучића

Триангулација полигона

- Триангулација је разлагање неког лика на троуглове.

Триангулација полигона

- Триангулација је разлагање неког лика на троуглове.
- Триангулација простог полигона је разлагање његове унутрашњости унутрашњим дијагоналама које се међусобно не секу.

Триангулација полигона

- Триангулација је разлагање неког лика на троуглове.
- Триангулација простог полигона је разлагање његове унутрашњости унутрашњим дијагоналама које се међусобно не секу.

Лема 4.1

Сваки прост полигон са више од 3 темена има унутрашњу дијагоналу.

Триангулација полигона

- Триангулација је разлагање неког лика на троуглове.
- Триангулација простог полигона је разлагање његове унутрашњости унутрашњим дијагоналама које се међусобно не секу.

Лема 4.1

Сваки прост полигон са више од 3 темена има унутрашњу дијагоналу.

Теорема 4.1

Сваки прост полигон допушта триангулацију и свака триангулација полигона са n темена се састоји од тачно $n-2$ троугла.

Примери

Пример 11

Од датих тачака у равни формирати прост полигон, а затим га триангулисати.

а) $P_0 = (0,0)$, $P_1 = (5,-1)$, $P_2 = (3,2)$, $P_3 = (6,4)$, $P_4 = (-1,3)$.

б) $P_0 = (-1,3)$, $P_1 = (2,1)$, $P_2 = (0,0)$, $P_3 = (4,-1)$, $P_4 = (5,3)$, $P_5 = (3,4)$.

Алгоритми за триангулацију полигона

- унутрашњим дијагоналама
- „завртањем ушију”
- триангулација монотоних полигона и монотоних планина
- Делонијева триангулација
- триангулација у линеарном времену