

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Геометрија И–смер

део 1: Вектори и трансформације координата

Тијана Шукиловић

2. октобар 2017

Дефиниција вектора

Дефиниција 1.1

Вектор је класа еквиваленције усмерених дужи које имају **исти**

Дефиниција вектора

Дефиниција 1.1

Вектор је класа еквиваленције усмерених дужи које имају исти правац,

Дефиниција вектора

Дефиниција 1.1

Вектор је класа еквиваленције усмерених дужи које имају исти правац, смер

Дефиниција вектора

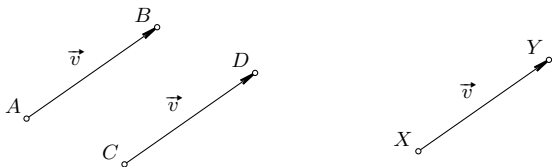
Дефиниција 1.1

Вектор је класа еквиваленције усмерених дужи које имају исти **правац**, **смер** и **интензитет**.

Дефиниција вектора

Дефиниција 1.1

Вектор је класа еквиваленције усмерених дужи које имају исти **правац**, **смер** и **интензитет**.



Слика 1: Еквивалентне усмерене дужи

Основни појмови и ознаке

- примери векторских величина: брзина, убрзање, сила, МОМЕНТ СИЛЕ...

Основни појмови и ознаке

- примери векторских величина: брзина, убрзање, сила, МОМЕНТ СИЛЕ...
- вектор представник

Основни појмови и ознаке

- примери векторских величина: брзина, убрзање, сила, МОМЕНТ СИЛЕ...
- вектор представник
- нула вектор $\vec{0}$

Основни појмови и ознаке

- примери векторских величина: брзина, убрзање, сила, МОМЕНТ СИЛЕ...
- вектор представник
- нула вектор $\vec{0}$
- супротан вектор

Основни појмови и ознаке

- примери векторских величина: брзина, убрзање, сила, МОМЕНТ СИЛЕ...
- вектор представник
- нула вектор $\vec{0}$
- супротан вектор
- колинеарни вектори

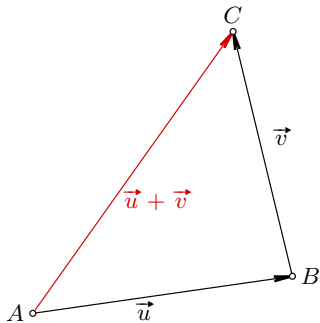
Основни појмови и ознаке

- примери векторских величина: брзина, убрзање, сила, МОМЕНТ СИЛЕ...
- вектор представник
- нула вектор $\vec{0}$
- супротан вектор
- колинеарни вектори
- копланарни вектори

Основни појмови и ознаке

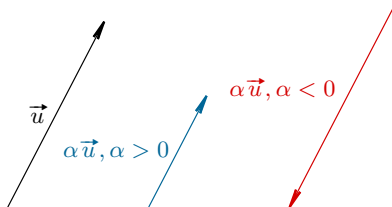
- примери векторских величина: брзина, убрзање, сила, МОМЕНТ СИЛЕ...
- вектор представник
- нула вектор $\vec{0}$
- супротан вектор
- колинеарни вектори
- копланарни вектори
- скуп свих вектора \mathbb{V} , односно \mathbb{V}^n

Операције са векторима



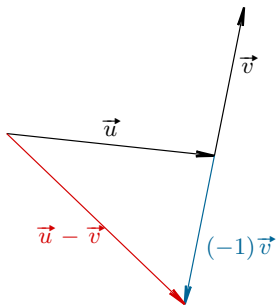
Слика 2: Сабирање вектора

Операције са векторима



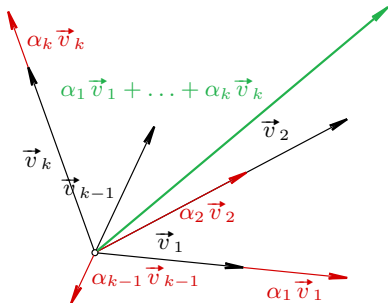
Слика 3: Множење вектора скаларом

Операције са векторима



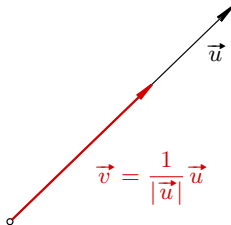
Слика 4: Разлика вектора

Операције са векторима



Слика 5: Линеарна комбинација вектора

Операције са векторима



Слика 6: Јединични вектор

Линеарна зависност и независност вектора

Дефиниција 1.2

Вектори $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ су **линеарно независни** ако релација:

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n = \vec{0}$$

важи само за $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$.

Линеарна зависност и независност вектора

Дефиниција 1.2

Вектори $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ су **линеарно независни** ако релација:

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n = \vec{0}$$

важи само за $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$.

У супротном, ако постоји и n -торка $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ у којој је бар један од бројева α_i различит од нуле, вектори се називају **линеарно зависним**.

Линеарна зависност и независност вектора

Теорема 1.1

Ненула вектори \vec{u} и \vec{v} су линеарно зависни ако и само ако су колинеарни.

Линеарна зависност и независност вектора

Теорема 1.1

Ненула вектори \vec{u} и \vec{v} су линеарно зависни ако и само ако су колинеарни.

Теорема 1.2

У равни постоје два линеарно независна вектора, а свака три вектора равни су линеарно зависна.

Линеарна зависност и независност вектора

Теорема 1.1

Ненула вектори \vec{u} и \vec{v} су линеарно зависни ако и само ако су колинеарни.

Теорема 1.2

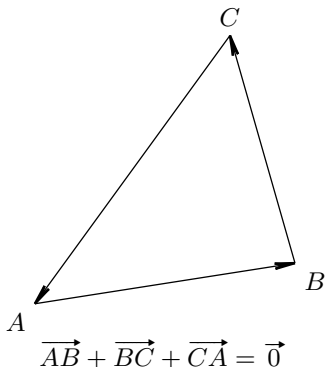
У равни постоје два линеарно независна вектора, а свака три вектора равни су линеарно зависна.

Теорема 1.3

У простору постоје три линеарно независна вектора, а свака четири вектора су линеарно зависна.

Примери

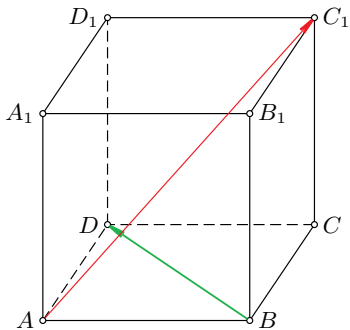
Пример 1



Слика 7: Вектори одређени страницама троугла су линеарно зависни

Примери

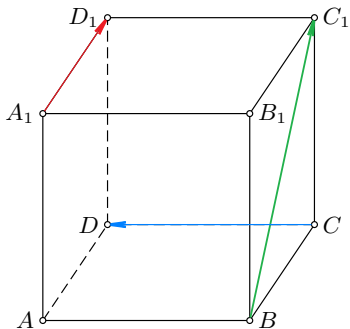
Пример 2



Слика 8: Да ли су вектори $\overrightarrow{AC_1}$ и \overrightarrow{BD} колинеарни?

Примери

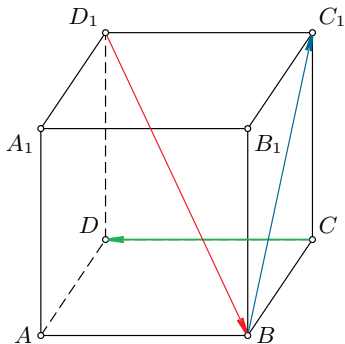
Пример 2



Слика 9: Да ли су вектори $\vec{BC_1}$, $\vec{A_1D_1}$ и \vec{CD} копланарни?

Примери

Пример 2



Слика 10: Да ли су вектори $\overrightarrow{BC_1}$, \overrightarrow{CD} и $\overrightarrow{D_1B}$ копланарни?

База и димензија векторског простора

- База векторског простора = максималан скуп линеарно независних вектора.

База и димензија векторског простора

- База векторског простора = максималан скуп линеарно независних вектора.
- Димензија векторског простора = број елемената базе.

База и димензија векторског простора

- База векторског простора = максималан скуп линеарно независних вектора.
- Димензија векторског простора = број елемената базе.

Последица 2.1

Димензија векторског простора вектора равни \mathbb{V}^2 је два.

База и димензија векторског простора

- База векторског простора = максималан скуп линеарно независних вектора.
- Димензија векторског простора = број елемената базе.

Последица 2.1

Димензија векторског простора вектора равни \mathbb{V}^2 је два. Сваки вектор $\vec{v} \in \mathbb{V}^2$ може да се напише у облику:

$$\vec{v} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2,$$

где је $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ база векторског простора \mathbb{V}^2 .

База и димензија векторског простора

- База векторског простора = максималан скуп линеарно независних вектора.
- Димензија векторског простора = број елемената базе.

Последица 2.1

Димензија векторског простора вектора равни \mathbb{V}^2 је два. Сваки вектор $\vec{v} \in \mathbb{V}^2$ може да се напише у облику:

$$\vec{v} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2,$$

где је $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ база векторског простора \mathbb{V}^2 .

Последица линеарне независности вектора базе је да су бројеви $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ јединствени.

Координате вектора

- База $e = (e_1, e_2)$ векторског простора \mathbb{V}^2 .
- Координате вектора $\vec{v} \in \mathbb{V}^2$ у бази e :

$$[\vec{v}]_e = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Координате вектора

- База $e = (e_1, e_2)$ векторског простора \mathbb{V}^2 .
- Координате вектора $\vec{v} \in \mathbb{V}^2$ у бази e :

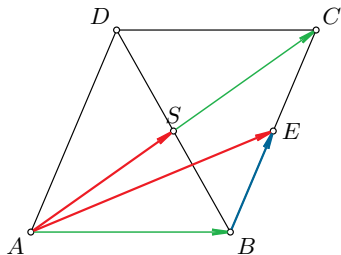
$$[\vec{v}]_e = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

- Лако се уопштава на произвољну димензију.

Пример

Пример 3

Дат је паралелограм $ABCD$. Нека је E средиште странице BC и S пресек дијагонала AC и BD . Одредити координате вектора \overrightarrow{BE} у бази $e = (\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AS})$.



Слика 11: $[\overrightarrow{BE}]_e = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Координате тачке

- База $e = (e_1, \dots, e_n)$ векторског простора \mathbb{V} .
- Фиксирана тачка $O \in \mathbb{E}$ назива се **координатни почетак**.
- O_e се назива **координатним системом** или **репером** простора \mathbb{E} .

Координате тачке

- База $e = (e_1, \dots, e_n)$ векторског простора \mathbb{V} .
- Фиксирана тачка $O \in \mathbb{E}$ назива се **координатни почетак**.
- O_e се назива **координатним системом** или **репером** простора \mathbb{E} .

Дефиниција 2.1

Координате тачке $X \in \mathbb{E}$ у реперу O_e дефинишемо као координате вектора \overrightarrow{OX} у бази e :

$$[X]_{O_e} := [\overrightarrow{OX}]_e. \quad (1)$$

Веза координата вектора и тачака

У пракси се често користи чињеница да се координате вектора \overrightarrow{MN} добијају „одузимањем координате тачке M од координата тачке N .“

Веза координата вектора и тачака

У пракси се често користи чињеница да се координате вектора \overrightarrow{MN} добијају „одузимањем координате тачке M од координата тачке N .“

Коректност:

$$\begin{aligned} [\overrightarrow{MN}]_e &= [\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON}]_e \\ &= [\overrightarrow{ON}]_e - [\overrightarrow{OM}]_e \\ &= [N]_{Oe} - [M]_{Oe}. \end{aligned}$$

Веза координата вектора и тачака

У пракси се често користи чињеница да се координате вектора \overrightarrow{MN} добијају „одузимањем координате тачке M од координата тачке N .“

Коректност:

$$\begin{aligned} [\overrightarrow{MN}]_e &= [\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON}]_e \\ &= [\overrightarrow{ON}]_e - [\overrightarrow{OM}]_e \\ &= [N]_{Oe} - [M]_{Oe}. \end{aligned}$$

Пример 4

Одредити координате темена паралелограма из Примера 3 у реперу Ae .

Скаларни производ

Дефиниција 3.1 (Скаларни производ)

$$\vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{V}: \quad \vec{v} \cdot \vec{u} := |\vec{v}| |\vec{u}| \cos \angle(\vec{v}, \vec{u}),$$

Скаларни производ

Дефиниција 3.1 (Скаларни производ)

$$\vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{V}: \quad \vec{v} \cdot \vec{u} := |\vec{v}| |\vec{u}| \cos \angle(\vec{v}, \vec{u}),$$

Примене скаларног производа:

- Дужине:

$$|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}};$$

- Углови:

$$\angle(\vec{v}, \vec{u}) = \arccos \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{|\vec{v}| |\vec{u}|}$$

Скаларни производ у ортонормираној бази

- Ортонормирана база = база $e = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) : \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$.

Скаларни производ у ортонормираној бази

- Ортонормирана база = база $e = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) : \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$.
- $\vec{v} = v_1 e_1 + v_2 e_2 + \dots + v_n e_n, \vec{u} = u_1 e_1 + u_2 e_2 + \dots + u_n e_n$:

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \vec{u} &= v_1 u_1 + v_2 u_2 + \dots + v_n u_n \\ &= (v_1, \dots, v_n) \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = [\vec{v}]_e^T \cdot [\vec{u}]_e\end{aligned}$$

Скаларни производ у ортонормираној бази

- Ортонормирана база = база $e = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) : \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$.
- $\vec{v} = v_1 e_1 + v_2 e_2 + \dots + v_n e_n$, $\vec{u} = u_1 e_1 + u_2 e_2 + \dots + u_n e_n$:

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \vec{u} &= v_1 u_1 + v_2 u_2 + \dots + v_n u_n \\ &= (v_1, \dots, v_n) \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = [\vec{v}]_e^T \cdot [\vec{u}]_e\end{aligned}$$

Пример 5

Дати су вектори $\vec{v} = (1, -2, 2)$ и $\vec{u} = (-3, 0, 4)$ из \mathbb{V}^3 својим координатама у ортонормираној бази. Одредити:

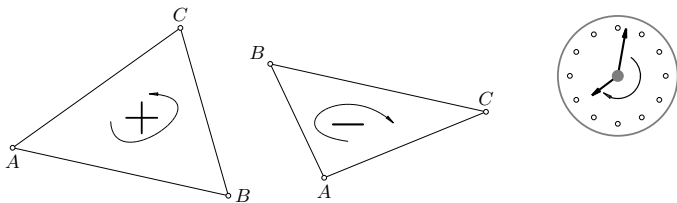
(а) $|\vec{v}|$; (б) $\angle(\vec{v}, \vec{u})$.

Оријентација равни

- Појам оријентације уводимо интуитивно.
Ствар је договора шта називамо позитивном, а шта негативном оријентацијом.

Оријентација равни

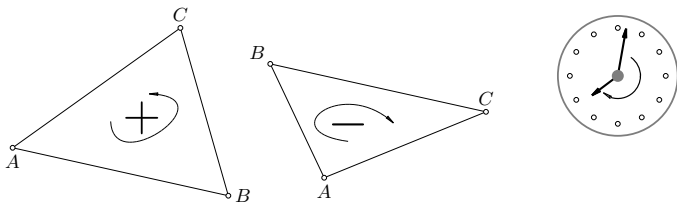
- Појам оријентације уводимо интуитивно.
Ствар је договора шта називамо позитивном, а шта негативном оријентацијом.



Слика 12: Троугао позитивне и негативне оријентације

Оријентација равни

- Појам оријентације уводимо интуитивно.
Ствар је договора шта називамо позитивном, а шта негативном оријентацијом.



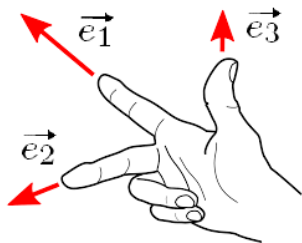
Слика 12: Троугао позитивне и негативне оријентације

- База $e = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ је позитивне оријентације, ако је троугао OAB позитивне оријентације.

Оријентација простора

Базе $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ је позитивне оријентације ако важи правило руке:

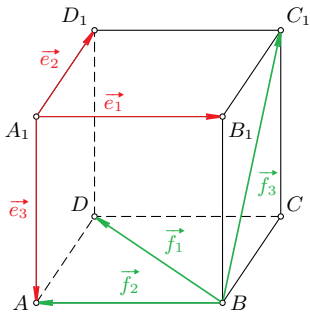
„ако испружени кажипрст руке представља вектор \vec{e}_1 , средњи прст вектор \vec{e}_2 , а палац вектор \vec{e}_3 , онда је база $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ позитивне оријентације”.



Пример

Пример 6

Дата је коцка $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Одредити оријентацију ортонормиране базе $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{A_1 B_1}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{A_1 D_1}$, $\vec{e}_3 = \overrightarrow{A_1 A}$ ако је база $f = (\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC_1})$ позитивне оријентације.



Слика 13: Оријентација простора

Векторски производ

Дефиниција 3.2 (Векторски производ)

$\vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{V}^3$: $\vec{v} \times \vec{u} := \vec{w}$, где је \vec{w} вектор који има:

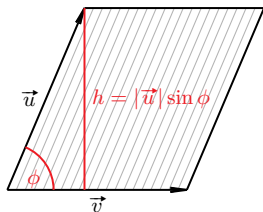
- Интензитет: $|\vec{w}| = |\vec{v}| |\vec{u}| \sin \angle(\vec{v}, \vec{u})$;
- Правац: $\vec{w} \perp \vec{v}, \vec{u}$;
- Смер: База $(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$ је позитивне оријентације.

Векторски производ

Дефиниција 3.2 (Векторски производ)

$\vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{V}^3$: $\vec{v} \times \vec{u} := \vec{w}$, где је \vec{w} вектор који има:

- Интензитет: $|\vec{w}| = |\vec{v}| |\vec{u}| \sin \angle(\vec{v}, \vec{u})$;
- Правац: $\vec{w} \perp \vec{v}, \vec{u}$;
- Смер: База $(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$ је позитивне оријентације.



Слика 14: $|\vec{v} \times \vec{u}| = P(\vec{v}, \vec{u})$

Векторски производ у ортонормираној бази

- $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ – ортонормирана база позитивне оријентације

\times	\vec{e}_1	\vec{e}_2	\vec{e}_3
\vec{e}_1	$\vec{0}$	\vec{e}_3	$-\vec{e}_2$
\vec{e}_2	$-\vec{e}_3$	$\vec{0}$	\vec{e}_1
\vec{e}_3	\vec{e}_2	$-\vec{e}_1$	$\vec{0}$

Векторски производ у ортонормираној бази

- $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ – ортонормирана база позитивне оријентације

\times	\vec{e}_1	\vec{e}_2	\vec{e}_3
\vec{e}_1	$\vec{0}$	\vec{e}_3	$-\vec{e}_2$
\vec{e}_2	$-\vec{e}_3$	$\vec{0}$	\vec{e}_1
\vec{e}_3	\vec{e}_2	$-\vec{e}_1$	$\vec{0}$

- $\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + v_3\vec{e}_3$, $\vec{u} = u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2 + u_3\vec{e}_3$

$$\begin{aligned}\vec{v} \times \vec{u} &= (v_2u_3 - v_3u_2)\vec{e}_1 + (v_3u_1 - v_1u_3)\vec{e}_2 + (v_1u_2 - v_2u_1)\vec{e}_3 \\ &= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

Матрична репрезентација векторског множења

- Множење вектором \vec{p} , $[\vec{p}]_e = (p_1, p_2, p_3)$:

$$\begin{aligned}\vec{p} \times \vec{v} &:= p_{\times} \cdot [\vec{v}]_e \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -p_3 & p_2 \\ p_3 & 0 & -p_1 \\ -p_2 & p_1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Примене векторског производа

$A, B, C \in \mathbb{E}^2$: $A(a_1, a_2, 0)$, $B(b_1, b_2, 0)$, $C(c_1, c_2, 0)$:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 \end{vmatrix} \vec{e}_3 =: D_{ABC} \vec{e}_3.$$

Важи:

Примене векторског производа

$A, B, C \in \mathbb{E}^2$: $A(a_1, a_2, 0)$, $B(b_1, b_2, 0)$, $C(c_1, c_2, 0)$:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 \end{vmatrix} \vec{e}_3 =: D_{ABC} \vec{e}_3.$$

Важи:

- $P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |D_{ABC}|$;

Примене векторског производа

$A, B, C \in \mathbb{E}^2$: $A(a_1, a_2, 0)$, $B(b_1, b_2, 0)$, $C(c_1, c_2, 0)$:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 \end{vmatrix} \vec{e}_3 =: D_{ABC} \vec{e}_3.$$

Важи:

- $P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |D_{ABC}|$;
- A, B, C – колинеарне $\iff D_{ABC} = 0$;

Примене векторског производа

$A, B, C \in \mathbb{E}^2$: $A(a_1, a_2, 0)$, $B(b_1, b_2, 0)$, $C(c_1, c_2, 0)$:

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 \end{vmatrix} \vec{e}_3 =: D_{ABC} \vec{e}_3.$$

Важи:

- $P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |D_{ABC}|$;
- A, B, C – колинеарне $\iff D_{ABC} = 0$;
- $\triangle ABC$ – позитивно оријентисан ако $D_{ABC} > 0$.

Примене векторског производа

$A, B, C \in \mathbb{E}^2$: $A(a_1, a_2, 0)$, $B(b_1, b_2, 0)$, $C(c_1, c_2, 0)$:

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 \end{vmatrix} \vec{e}_3 =: D_{ABC} \vec{e}_3.$$

Важи:

- $P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |D_{ABC}|$;
- A, B, C – колинеарне $\iff D_{ABC} = 0$;
- $\triangle ABC$ – позитивно оријентисан ако $D_{ABC} > 0$.

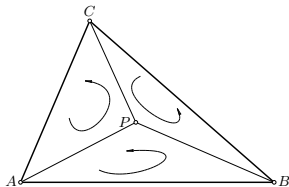
Пример 7

Одредити површину $\triangle ABC$, $A(1, 3)$, $B(4, 0)$, $C(2, 3)$. Да ли је троугао позитивне оријентације?

Примене векторског производа

Теорема 3.1

Тачка P припада троуглу ABC ако и само ако:
 $\text{sign}(D_{ABP}) = \text{sign}(D_{BCP}) = \text{sign}(D_{CAP})$.

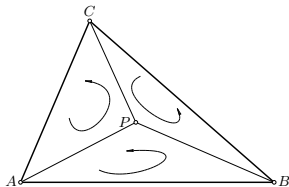


Слика 15: Тачка унутар троугла

Примене векторског производа

Теорема 3.1

Тачка P припада троуглу ABC ако и само ако:
 $\text{sign}(D_{ABP}) = \text{sign}(D_{BCP}) = \text{sign}(D_{CAP})$.



Слика 15: Тачка унутар троугла

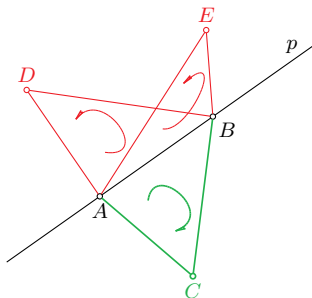
Пример 8

Да ли тачка $P(3, 2)$ припада $\triangle ABC$ из Примера 7?

Примене векторског производа

Тачке C и D са исте стране праве p ако и само ако су троуглови ABC и ABD , $A, B \in p$, истих оријентација:

$$\text{sign}(D_{ABC}) = \text{sign}(D_{ABD}).$$

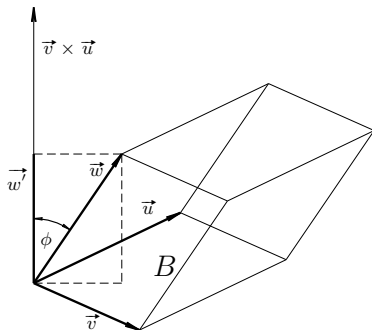


Слика 16: Тачке са исте/разних стране праве

Мешовити производ

Дефиниција 3.3 (Мешовити производ)

$$\vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \in \mathbb{V}^3 : \quad [\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] := (\vec{v} \times \vec{u}) \cdot \vec{w}.$$



Слика 17: $||[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}]|| = V(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$

Рачунање и примене мешовитог производа

Мешовити производ у ортонормираној бази:

$$[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Рачунање и примене мешовитог производа

Мешовити производ у ортонормираној бази:

$$[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Последица 3.1

Вектори $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}$ су линеарно независни ако и само ако:

$$[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] \neq 0.$$

Рачунање и примене мешовитог производа

Мешовити производ у ортонормираној бази:

$$[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Последица 3.1

Вектори $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}$ су линеарно независни ако и само ако:

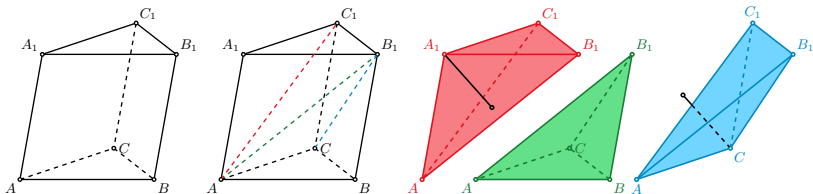
$$[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] \neq 0.$$

Последица 3.2

Вектори $(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$ простора, чине базу позитивне оријентације ако је $[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] > 0$, а негативне оријентације ако је $[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] < 0$.

Примене мешовитог производа

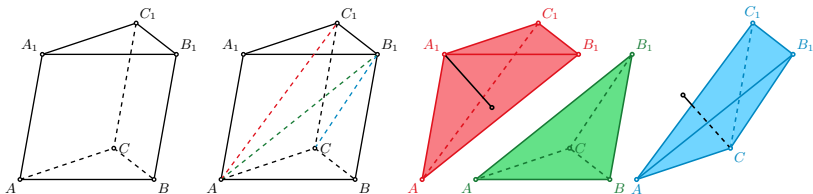
Запремина тетраедра $ABCA_1$ једнака је шестини запремине паралелепипеда одређеног векторима \vec{AB} , \vec{AC} и $\vec{AA_1}$.



Слика 18: Подела тростране призме на три пирамиде истих запремина

Примене мешовитог производа

Запремина тетраедра $ABCA_1$ једнака је шестини запремине паралелепипеда одређеног векторима \vec{AB} , \vec{AC} и $\vec{AA_1}$.

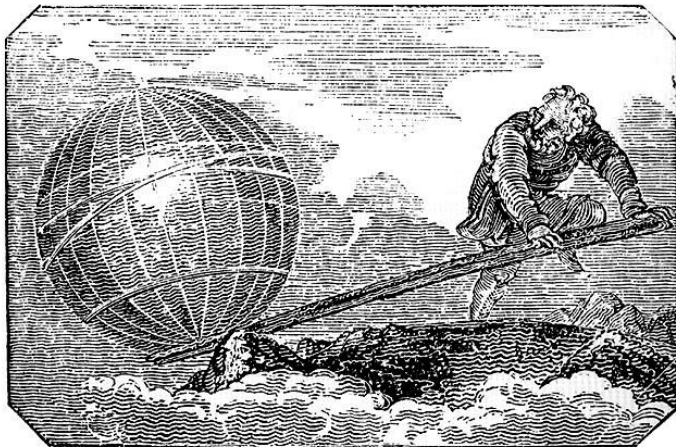


Слика 18: Подела тростране призме на три пирамиде истих запремина

Пример 9

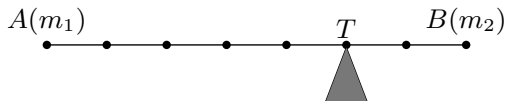
Одредити запремину тетраедра чија су темена $A(1, 0, 0)$, $B(3, 4, 6)$, $C(0, 1, 0)$, $D(1, 1, 3)$.

Архимедов закон полуге



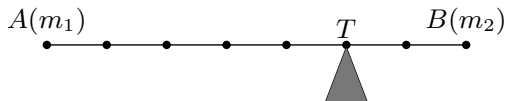
Центар маса тачака

$$|AT| : |TB| = m_2 : m_1 \iff m_1 \overrightarrow{TA} + m_2 \overrightarrow{TB} = \vec{0}$$



Центар маса тачака

$$|AT| : |TB| = m_2 : m_1 \iff m_1 \overrightarrow{TA} + m_2 \overrightarrow{TB} = \vec{0}$$



O – произвољна тачка

Центар маса тачака $A(m_1)$ и $B(m_2)$:

$$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{m_1 + m_2} (m_1 \overrightarrow{OA} + m_2 \overrightarrow{OB})$$

Тежиште и центар масе троугла

- $A(m_1), B(m_2), C(m_3)$

Тежиште и центар масе троугла

- $A(m_1), B(m_2), C(m_3)$
- A_1 – центар маса тачака B, C :
 AA_1 – тежишна дуж (из A)

Тежиште и центар масе троугла

- $A(m_1), B(m_2), C(m_3)$
- A_1 – центар маса тачака B, C :
 AA_1 – тежишна дуж (из A)
- T – центар маса тачака A, B, C :

$$\vec{OT} = \frac{1}{m_1 + m_2 + m_3} (m_1 \vec{OA} + m_2 \vec{OB} + m_3 \vec{OC})$$

Тежиште и центар масе троугла

- $A(m_1), B(m_2), C(m_3)$
- A_1 – центар маса тачака B, C :
 AA_1 – тежишна дуж (из A)
- T – центар маса тачака A, B, C :

$$\vec{OT} = \frac{1}{m_1 + m_2 + m_3} (m_1 \vec{OA} + m_2 \vec{OB} + m_3 \vec{OC})$$

Теорема 4.1

Тежишне дужи се секу у центру маса.

Тежиште и центар масе троугла

- $A(m_1), B(m_2), C(m_3)$
- A_1 – центар маса тачака B, C :
 AA_1 – тежишна дуж (из A)
- T – центар маса тачака A, B, C :

$$\vec{OT} = \frac{1}{m_1 + m_2 + m_3} (m_1 \vec{OA} + m_2 \vec{OB} + m_3 \vec{OC})$$

Теорема 4.1

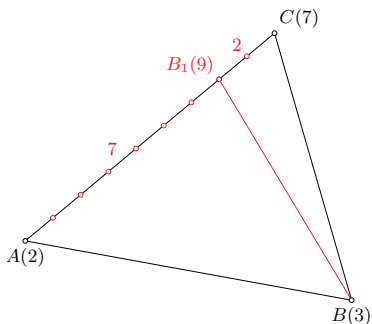
Тежишне дужи се секу у центру маса.

За $m_1 = m_2 = m_3 = m$: центар маса = тежиште троугла!

Примери

Пример 10

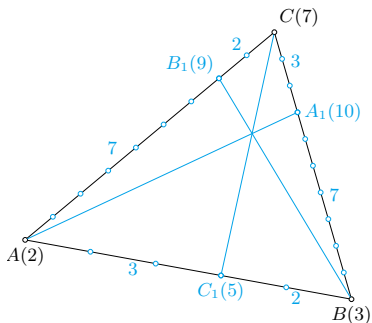
Дате су тачке са масама $A(2)$, $B(3)$, $C(7)$. Одредити у ком односу центар масе дели тежишне дужи $\triangle ABC$.



Примери

Пример 10

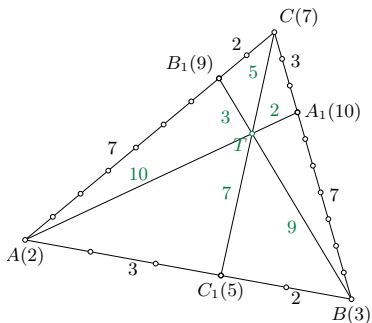
Дате су тачке са масама $A(2)$, $B(3)$, $C(7)$. Одредити у ком односу центар масе дели тежишне дужи $\triangle ABC$.



Примери

Пример 10

Дате су тачке са масама $A(2)$, $B(3)$, $C(7)$. Одредити у ком односу центар масе дели тежишне дужи $\triangle ABC$.

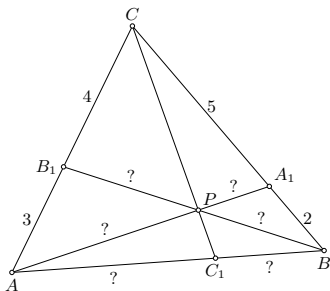


Примери

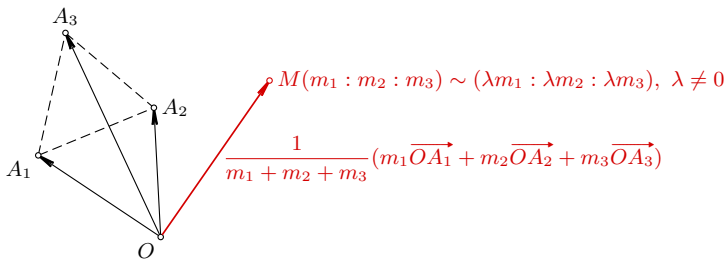
Пример 11

Дат је $\triangle ABC$ и на његовим ивицама тачке A_1 и B_1 такве да $|AB_1| : |B_1C| = 3 : 4$, $|BA_1| : |A_1C| = 2 : 5$.

- а) Ако је $\{P\} = AA_1 \cap BB_1$, у ком односу P дели AA_1 и BB_1 ?
б) Ако је $\{C_1\} = CP \cap AB$, у ком односу C_1 дели AB ?

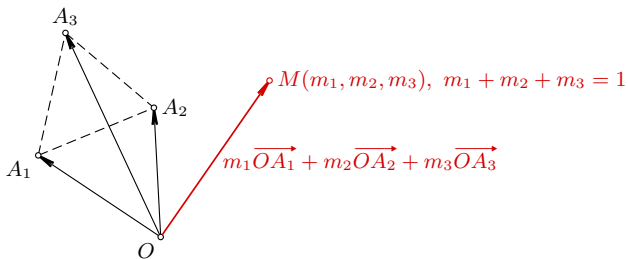


Барицентричке координате



Слика 19: Хомогене барицентричке координате

Барицентричке координате



Слика 19: Нехомогене барицентричке координате

Смисао барицентричких координата

Одредити барицентричке координате тачке M значи одредити масе које треба ставити у темена $\triangle A_1A_2A_3$ да би центар масе тог система била тачка M .

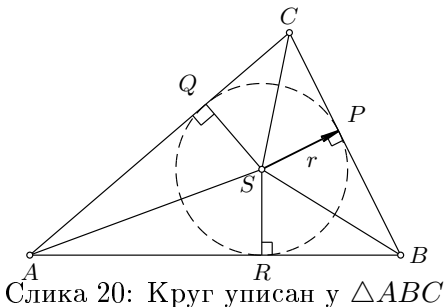
Пример 12

За $\triangle ABC$ барицентричке координате тежишта су $T(1 : 1 : 1)$ (хомогене), тј. $T\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ (нехомогене).

Пример - центар уписаног круга

Пример 13

Одредити координате центра уписаног круга у $\triangle ABC$.

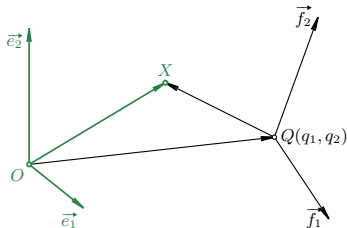


Трансформације координата вектора

- $e = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ – стара база
- $f = (\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n)$ – нова база
- $C = C_{e \rightarrow f}$ – матрица преласка = матрица чије су колоне координате вектора нове базе f у старој бази e , редом.

$$[\vec{v}]_e = C[\vec{v}]_f$$

Трансформације координата тачака

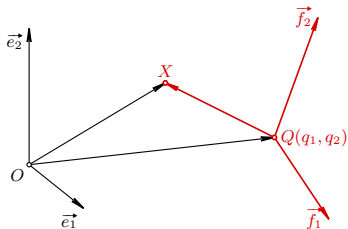


Слика 21: Трансформације координата тачака

$$\boxed{x} = Cx' + q$$

$$x = [X]_{Oe} = (x_1, x_2)^T$$

Трансформације координата тачака

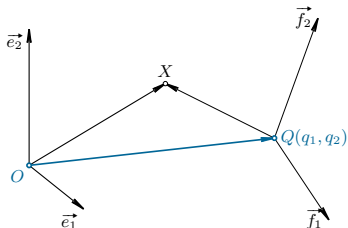


Слика 21: Трансформације координата тачака

$$x = C \boxed{x'} + q$$

$$x' = [X]_{Qf} = (x'_1, x'_2)^T$$

Трансформације координата тачака

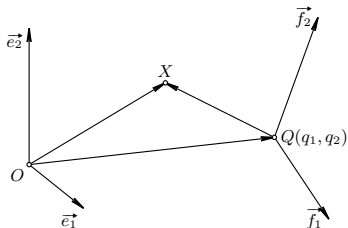


Слика 21: Трансформације координата тачака

$$x = Cx' + q$$

$$C = C_{e \rightarrow f} \quad q = [Q]_{Oe} = (q_1, q_2)^T$$

Трансформације координата тачака



Слика 21: Трансформације координата тачака

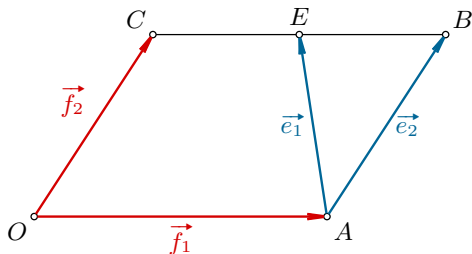
$$x = Cx' + q$$

линеарни део

транслаторни део

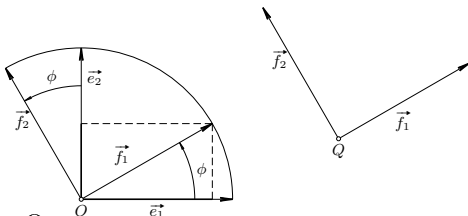
Примери

Пример 14



Слика 22: Одредити координате темена паралелограма у старом реперу Ae и новом реперу Of .
Одредити везу између координата.

Трансформације ортонормираних репера равни

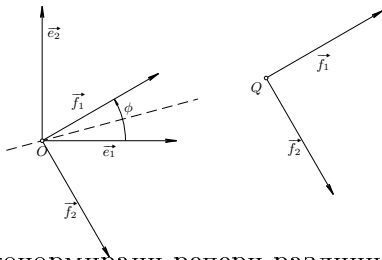


Слика 23: Ортонормирани реперы истих оријентација

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}.$$

матрица ротације

Трансформације ортонормираних репера равни



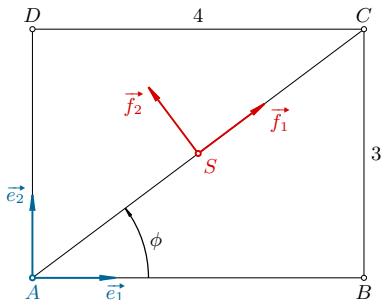
Слика 24: Ортонормирани репери различитих оријентација

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ \sin \phi & -\cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}.$$

матрица рефлексije

Примери

Пример 15



Слика 25: Одредити везу координата као и координате темена правоугаоника у новом реперу.