

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Геометрија И–смер

део 5: Полигони и полиедри

Тијана Шукиловић

18. децембар 2017

Полигонска линија и полигон

Дефиниција 1.1

Полигонска линија $A_0 \dots A_{n-1} A_n$ је унија дужи $A_0 A_1, \dots, A_{n-1} A_n$ које називамо **ивице** полигонске линије. Тачке A_0, \dots, A_n називају се **темена** полигонске линије.

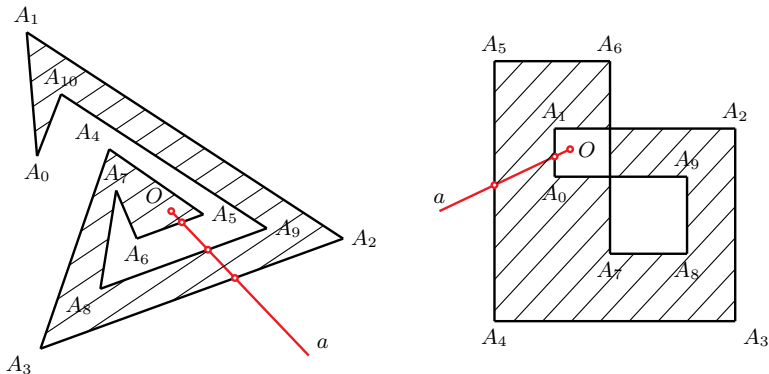
Полигонска линија и полигон

Дефиниција 1.1

Полигонска линија $A_0 \dots A_{n-1} A_n$ је унија дужи $A_0 A_1, \dots, A_{n-1} A_n$ које називамо **ивице** полигонске линије. Тачке A_0, \dots, A_n називају се **темена** полигонске линије.

- затворена полигонска линија = **полигон**
- суседна темена/ивице
- прост/сложен полигон
- дијагонала полигона
- унутрашња дијагонала полигона

Унутршњост полигона



Слика 1: Унутрашњост простог и сложеног полигона

Површина простог полигона

- Оријентисана површина полигона $P(A_0A_1 \dots A_{n-1})$

Површина простог полигона

- Оријентисана површина полигона $P(A_0A_1 \dots A_{n-1})$

Теорема 1.1

За прост полигон $A_0A_1 \dots A_{n-1}$ и произвољну тачку равни A важи:

$$P(A_0, A_1, \dots, A_{n-1}) = P(A, A_0, A_1) + \dots + P(A, A_{n-1}, A_0).$$

Површина простог полигона

- Оријентисана површина полигона $P(A_0A_1 \dots A_{n-1})$

Теорема 1.1

За прост полигон $A_0A_1 \dots A_{n-1}$ и произвољну тачку равни A важи:

$$P(A_0, A_1, \dots, A_{n-1}) = P(A, A_0, A_1) + \dots + P(A, A_{n-1}, A_0).$$

$$\begin{aligned} P(A_0, A_1, \dots, A_{n-1}) &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (x_k y_{k+1} - x_{k+1} y_k) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} x_k (y_{k+1} - y_{k-1}) \end{aligned}$$

Пример

Пример 1

У равни су дате тачке $P_0 = (1, -3)$, $P_1 = (2, -2)$,
 $P_2 = (-1, 2)$, $P_3 = (4, -1)$, $P_4 = (0, 3)$.

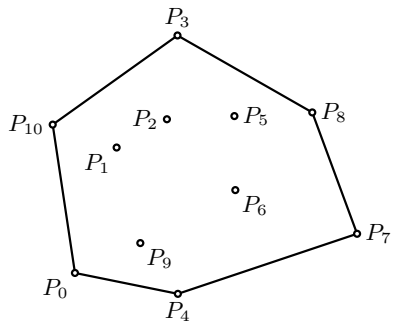
Испитати да ли је полигон $P_0P_1P_2P_3P_4$ прост.

Ако није, сортирати тачке P_0, \dots, P_4 тако да полигон буде прост.

Израчунати површину тако добијеног простог полигона.

Конвексни омотач

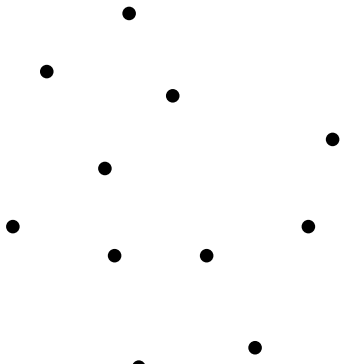
- КОНВЕКСАН ЛИК
- КОНВЕКСАН ОМОТАЧ СКУПА ТАЧАКА



Слика 2: Пример конвексног омотача скупа од 11 тачака

Алгоритам „ивичне дужи“ (спори алгоритам)

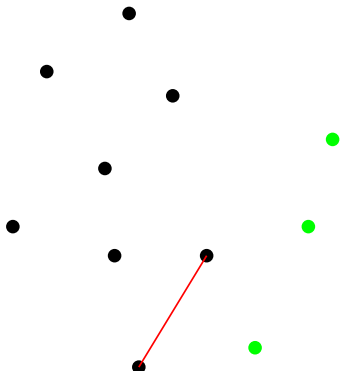
- Временска сложеност $O(n^3)$



Слика 3: Пример – 11 тачака

Алгоритам „ивичне дужи“ (спори алгоритам)

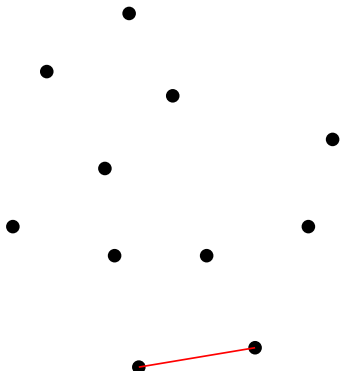
- Временска сложеност $O(n^3)$



Слика 3: Пример – унутрашња дуж

Алгоритам „ивичне дужи“ (спори алгоритам)

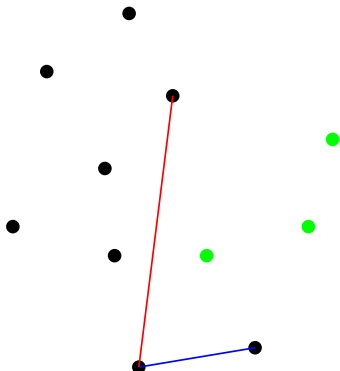
- Временска сложеност $O(n^3)$



Слика 3: Пример – ивична дуж

Алгоритам „ивичне дужи“ (спори алгоритам)

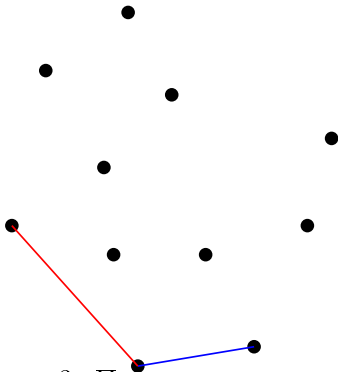
- Временска сложеност $O(n^3)$



Слика 3: Пример – унутрашња дуж

Алгоритам „ивичне дужи” (спори алгоритам)

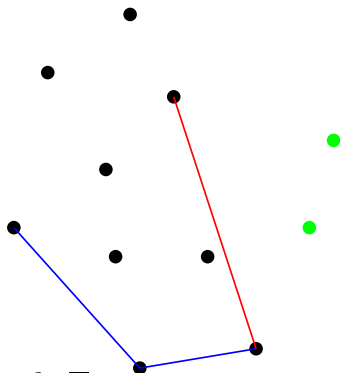
- Временска сложеност $O(n^3)$



Слика 3: Пример – ивична дуж

Алгоритам „ивичне дужи“ (спори алгоритам)

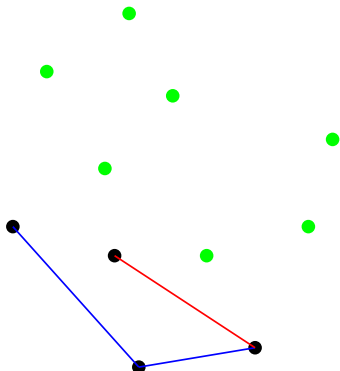
- Временска сложеност $O(n^3)$



Слика 3: Пример – унутрашња дуж

Алгоритам „ивичне дужи“ (спори алгоритам)

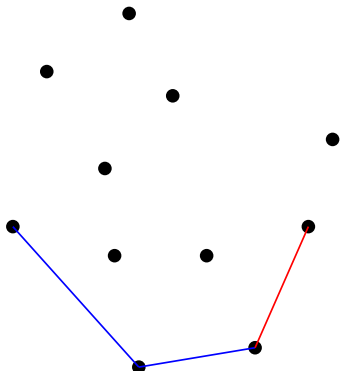
- Временска сложеност $O(n^3)$



Слика 3: Пример – унутрашња дуж

Алгоритам „ивичне дужи” (спори алгоритам)

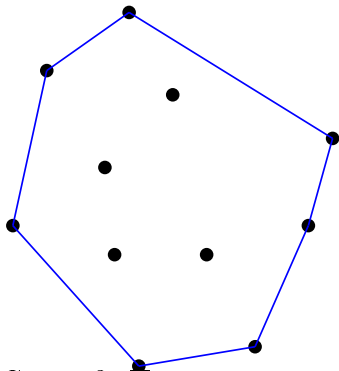
- Временска сложеност $O(n^3)$



Слика 3: Пример – ивична дуж

Алгоритам „ивичне дужи“ (спори алгоритам)

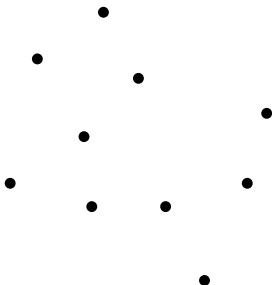
- Временска сложеност $O(n^3)$



Слика 3: Пример – омотач

Алгоритам „паковање поклона” (gift wrap)

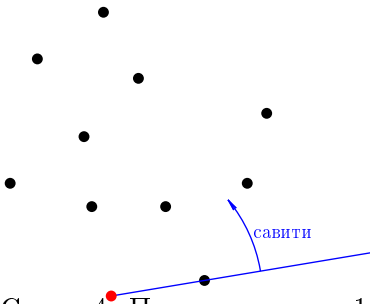
- Временска сложеност $O(n^2)$



Слика 4: Пример – P_0 = најнижа (крајња десна) тачка

Алгоритам „паковање поклона” (gift wrap)

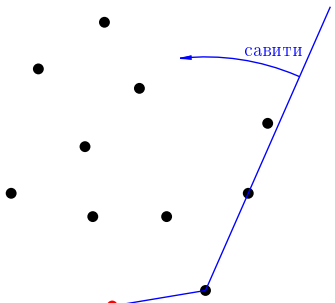
- Временска сложеност $O(n^2)$



Слика 4: Пример – корак 1

Алгоритам „паковање поклона” (gift wrap)

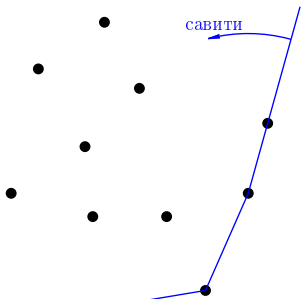
- Временска сложеност $O(n^2)$



Слика 4: Пример – корак 2

Алгоритам „паковање поклона” (gift wrap)

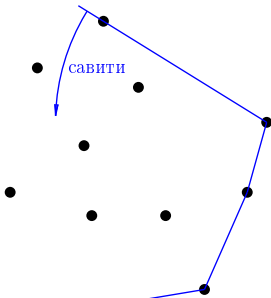
- Временска сложеност $O(n^2)$



Слика 4: Пример – корак 3

Алгоритам „паковање поклона” (gift wrap)

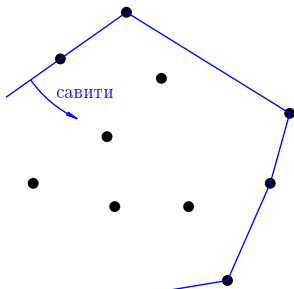
- Временска сложеност $O(n^2)$



Слика 4: Пример – корак 4

Алгоритам „паковање поклона” (gift wrap)

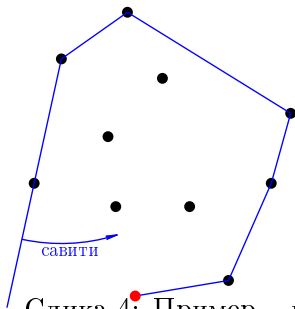
- Временска сложеност $O(n^2)$



Слика 4: Пример – корак 5

Алгоритам „паковање поклона” (gift wrap)

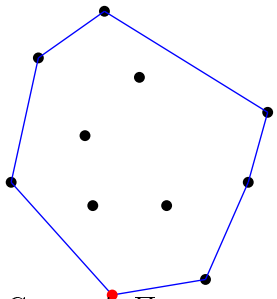
- Временска сложеност $O(n^2)$



Слика 4: Пример – корак 6

Алгоритам „паковање поклона” (gift wrap)

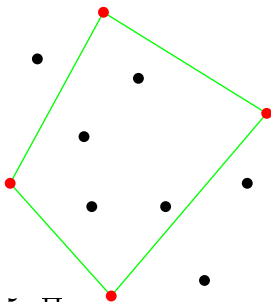
- Временска сложеност $O(n^2)$



Слика 4: Пример – омотач

„Брзи” алгоритам (quickhull)

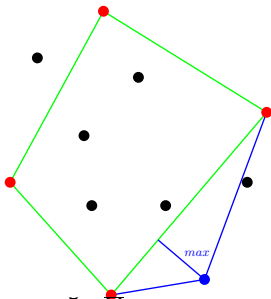
- Временска сложеност $O(n \log n)$



Слика 5: Пример – почетни четвороугао

„Брзи” алгоритам (quickhull)

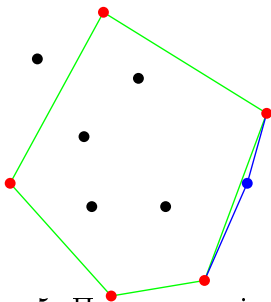
- Временска сложеност $O(n \log n)$



Слика 5: Пример – доњи десни

„Брзи” алгоритам (quickhull)

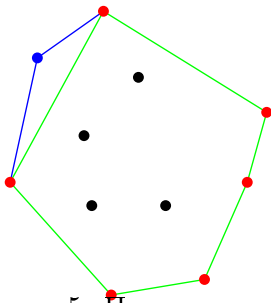
- Временска сложеност $O(n \log n)$



Слика 5: Пример – најдаља од нове

„Брзи” алгоритам (quickhull)

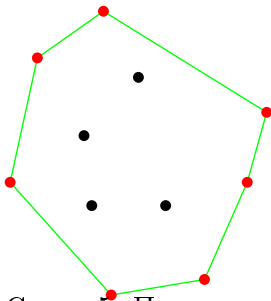
- Временска сложеност $O(n \log n)$



Слика 5: Пример – горњи леви

„Брзи” алгоритам (quickhull)

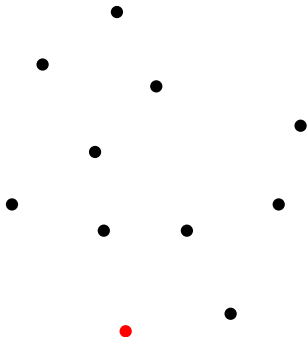
- Временска сложеност $O(n \log n)$



Слика 5: Пример – омотач

Грахамов алгоритам

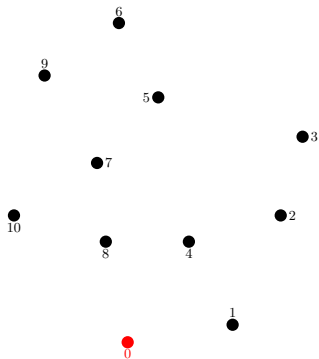
- Временска сложеност $O(n \log n)$



Слика 6: Пример – P_0 = најнижа (крајња десна) тачка

Грахамов алгоритам

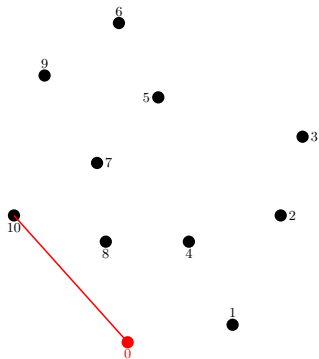
- Временска сложеност $O(n \log n)$



Слика 6: Пример – сортиране тачке (према углу)

Грахамов алгоритам

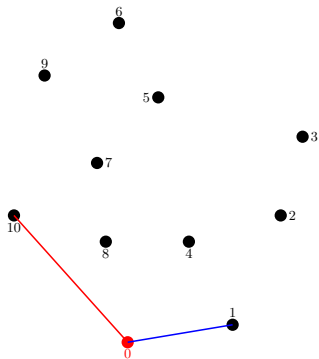
- Временска сложеност $O(n \log n)$



Слика 6: Пример – стек: [10 0]

Грахамов алгоритам

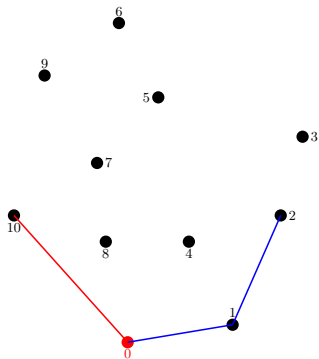
- Временска сложеност $O(n \log n)$



Слика 6: Пример – стек: [10 0 1]

Грахамов алгоритам

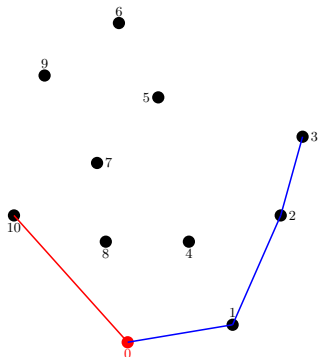
- Временска сложеност $O(n \log n)$



Слика 6: Пример – стек: [10 0 1 2]

Грахамов алгоритам

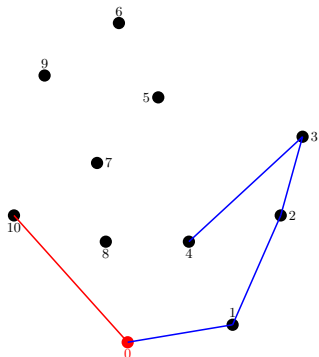
- Временска сложеност $O(n \log n)$



Слика 6: Пример – стек: [10 0 1 2 3]

Грахамов алгоритам

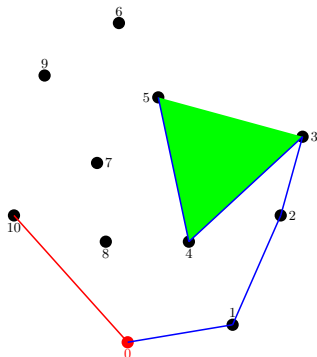
- Временска сложеност $O(n \log n)$



Слика 6: Пример – стек: [10 0 1 2 3 4]

Грахамов алгоритам

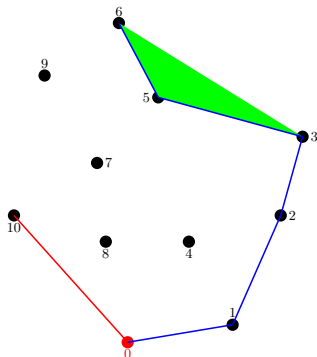
- Временска сложеност $O(n \log n)$



Слика 6: Пример – стек: [10 0 1 2 3 ~~4~~ 5]

Грахамов алгоритам

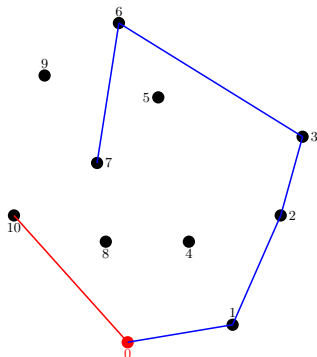
- Временска сложеност $O(n \log n)$



Слика 6: Пример – стек: $[10\ 0\ 1\ 2\ 3\ \cancel{6}]$

Грахамов алгоритам

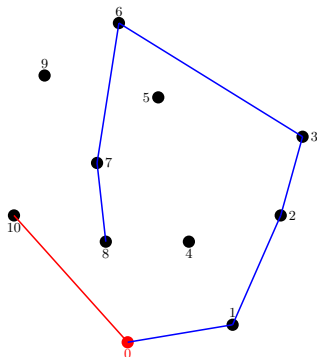
- Временска сложеност $O(n \log n)$



Слика 6: Пример – стек: [10 0 1 2 3 6 7]

Грахамов алгоритам

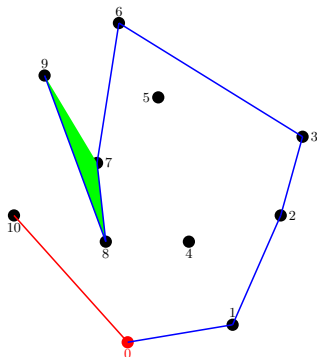
- Временска сложеност $O(n \log n)$



Слика 6: Пример – стек: $[10\ 0\ 1\ 2\ 3\ 6\ 7\ 8]$

Грахамов алгоритам

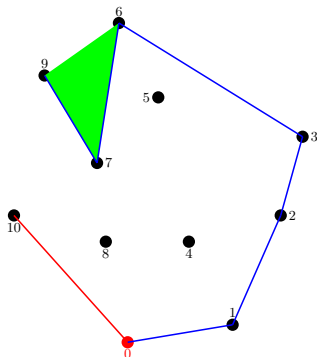
- Временска сложеност $O(n \log n)$



Слика 6: Пример – стек: [10 0 1 2 3 6 7 ~~9~~]

Грахамов алгоритам

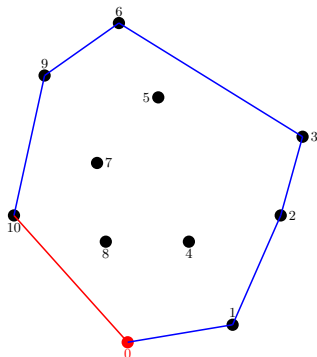
- Временска сложеност $O(n \log n)$



Слика 6: Пример – стек: [10 0 1 2 3 6 ~~7~~ 9]

Грахамов алгоритам

- Временска сложеност $O(n \log n)$



Слика 6: Пример – омотач [10 0 1 2 3 6 9]

Примери

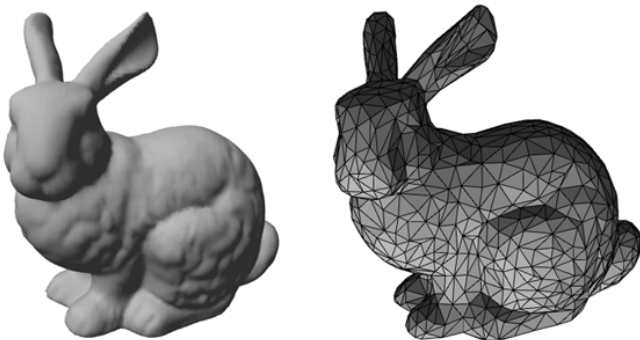
Пример 2

Одредити конвексни омотач скупа тачака $P_0 = (1, 3)$,
 $P_1 = (-2, 0)$, $P_2 = (-3, 5)$, $P_3 = (4, 2)$, $P_4 = (1, 1)$, $P_5 = (6, 4)$,
 $P_6 = (2, -3)$, $P_7 = (5, 5)$, $P_8 = (5, -1)$.

Задатак решити:

- а) Цртањем.
- б) Грехамовим алгоритмом.

Полиедарски модел глатке површи



Слика: "Stanford bunny"

Примене полиедарских модела у архитектури



Слика: MVRDV / 2004, Serpentine Gallery Pavillion¹

¹ Слика је преузета из презентације доц Радомира Којића, [кодржане 8.12.2017.](#)

Полиедарска површ

Дефиниција 3.1

Полиедарска површ M је објекат простора који је унија коначно много пљосни:

- 1 Пљосни су конвексни полигони;
- 2 Свака ивица припада највише двама пљоснима (унутрашње и рубне ивице);
- 3 Пресек две пљосни може бити само ивица.

Полиедарска површ

Дефиниција 3.1

Полиедарска површ M је објекат простора који је унија коначно много пљосни:

- 1 Пљосни су конвексни полигони;
- 2 Свака ивица припада највише двама пљоснима (унутрашње и рубне ивице);
- 3 Пресек две пљосни може бити само ивица.

- апстрактна полиедарска површ

Полиедарска површ

Дефиниција 3.1

Полиедарска површ M је објекат простора који је унија коначно много пљосни:

- 1 Пљосни су конвексни полигони;
- 2 Свака ивица припада највише двама пљоснима (унутрашње и рубне ивице);
- 3 Пресек две пљосни може бити само ивица.

- апстрактна полиедарска површ
- полиедар

Полиедарска површ

Дефиниција 3.1

Полиедарска површ M је објекат простора који је унија коначно много пљосни:

- 1 Пљосни су конвексни полигони;
- 2 Свака ивица припада највише двама пљоснима (унутрашње и рубне ивице);
- 3 Пресек две пљосни може бити само ивица.

- апстрактна полиедарска површ
- полиедар
- повезана површ

Табела темена и повезаности

- Табела темена

- Табела повезаности

Табела темена и повезаности

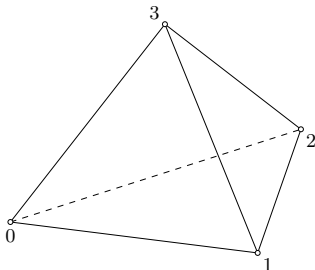
- Табела темена
- Табела повезаности

Табела темена и повезаности

- Табела темена
- Табела повезаности

Пример 3

Одредити табелу повезаности тетраедра.



Слика 9: Тетраедар

Примери

Пример 4

- а) Из табеле повезаности одредити скуп ивица.
 - б) Нацртати слику.
 - в) Проверити да ли та табела повезаности задаје апстрактну полиедарску површ.
 - г) У случају потврдног одговора под в) проверити да ли је та полиедарска површ повезана.
 - д) Одредити руб те површи и број компонената руба.
- за следеће табеле повезаности:

$$1) \mathcal{T} = \{T_0, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5\}, \mathcal{P} = \{p_0, p_1, p_2, p_3\},$$
$$p_0 = \langle 0, 1, 2 \rangle, p_1 = \langle 0, 2, 4, 5 \rangle, p_2 = \langle 3, 2, 0 \rangle, p_3 = \langle 1, 0, 3 \rangle.$$

Примери

Пример 4

- Из табеле повезаности одредити скуп ивица.
- Нацртати слику.
- Проверити да ли та табела повезаности задаје апстрактну полиедарску површ.
- У случају потврдног одговора под в) проверити да ли је та полиедарска површ повезана.
- Одредити руб те површи и број компонената руба.
за следеће табеле повезаности:

$$2) \mathcal{T} = \{T_0, T_1, \dots, T_9, T_{10}\}, \mathcal{P} = \{p_0, p_1, p_2, p_3, p_4\},$$
$$p_0 = \langle 0, 1, 7, 4 \rangle, p_1 = \langle 1, 2, 6, 7 \rangle, p_2 = \langle 2, 3, 5, 6 \rangle, p_3 = \langle 3, 0, 4, 5 \rangle,$$
$$p_4 = \langle 8, 9, 10 \rangle.$$

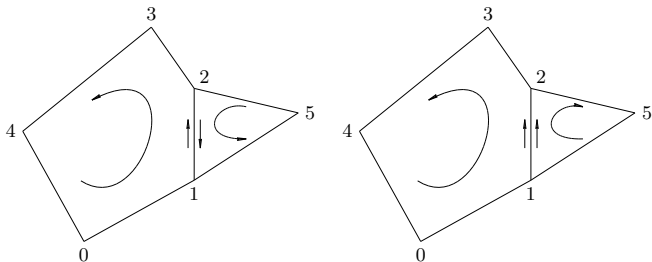
Примери

Пример 4

- Из табеле повезаности одредити скуп ивица.
- Нацртати слику.
- Проверити да ли та табела повезаности задаје апстрактну полиедарску површ.
- У случају потврдног одговора под в) проверити да ли је та полиедарска површ повезана.
- Одредити руб те површи и број компонената руба.
за следеће табеле повезаности:

$$\begin{aligned} 3) \mathcal{T} &= \{T_0, T_1, \dots, T_7\}, \mathcal{P} = \{p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}, \\ p_0 &= \langle 0, 1, 3 \rangle, p_1 = \langle 0, 1, 5, 4 \rangle, p_2 = \langle 1, 2, 6, 5 \rangle, p_3 = \langle 5, 6, 7 \rangle, \\ p_4 &= \langle 7, 4, 0, 3 \rangle, p_5 = \langle 2, 6, 7, 3 \rangle. \end{aligned}$$

Оријентабилност полиедарске површи



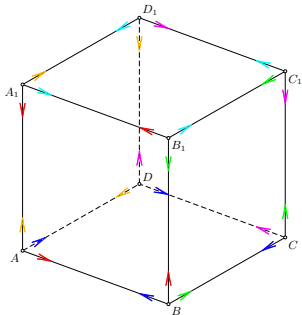
Слика 10: Суседне пљосни исте и различите оријентације

M – оријентабилна ако су сваке две суседне пљосни исте оријентације.

Оријентабилност

Пример 5

Коцка је оријентабилна.



Слика 11: Усклађивање оријентације коцке

Оријентабилност

Теорема 3.1

Полиедарски модели неке глатке површи су или сви оријентабилни или сви неоријентабилни.

Оријентабилност

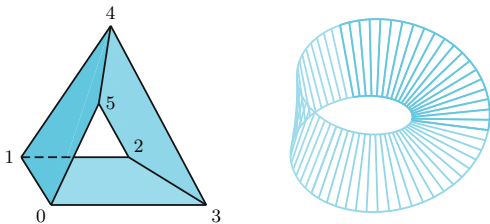
Теорема 3.1

Полиедарски модели неке глатке површи су или сви оријентабилни или сви неоријентабилни.

Теорема 3.2

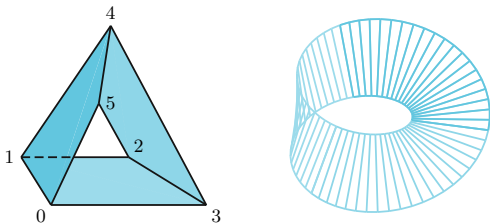
Сваки прост полиедар је оријентабилна површ.

Мебијусова трака



Слика 12: Полиедарски модели Мебијусове траке

Мебијусова трака



Слика 12: Полиедарски модели Мебијусове траке

Пример 6

Полиедарски модел Мебијусове траке је неоријентабилан.

Мебијусова трака – особине

- Једнострана је – могуће ју је сасвим обојити без скидања четкице са папира.
Кретање по Мебијусовој траци

Мебијусова трака – особине

- Једнострана је – могуће ју је сасвим обојити без скидања четкице са папира.
- Када је пресечемо уздужно добијамо два пута уврнуту једну траку.

Анимације: Бојан Васиљевић (167/2014)

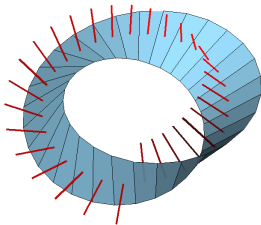
Мебијусова трака – особине

- Једнострана је – могуће ју је сасвим обојити без скидања четкице са папира.
- Када је пресечемо уздужно добијамо два пута уврнуту једну траку. Када и ту траку пресечемо добијамо две уланчане траке.

Анимације: Бојан Васиљевић (167/2014)

Мебијусова трака – особине

- Једнострана је – могуће ју је сасвим обојити без скидања четкице са папира.
- Када је пресечемо уздужно добијамо два пута уврнуту једну траку. Када и ту траку пресечемо добијамо две уланчане траке.
- Немогуће је дефинисати непрекидну нормалу на Мебијусовој траци.



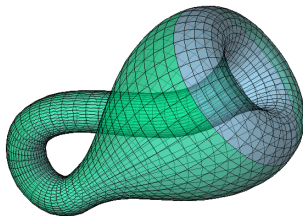
Слика: Нормале на Мебијусову траку

Примери Мебијусове траке



Слика: Лого за Google Drive (лево) и међународни симбол за рециклажу (десно)

Клајнова боца



Слика: Клајнова боца

Вожња бицикла по Клајновој боци

Ојлерова карактеристика и род површи

Ојлерова карактеристика полиедарске површи \mathcal{M} је број

$$\chi(\mathcal{M}) = T - I + P$$

темена ивице пљосни

Ојлерова карактеристика и род површи

Ојлерова карактеристика полиедарске површи \mathcal{M} је број

$$\chi(\mathcal{M}) = T - I + P$$

темена ивице пљосни

Теорема 3.3

Сви полиедарски модели неке глатке површи имају исту Ојлерову карактеристику.

Ојлерова карактеристика и род површи

Ојлерова карактеристика полиедарске површи \mathcal{M} је број

$$\chi(\mathcal{M}) = T - I + P$$

темена ивице пљосни

Теорема 3.3

Сви полиедарски модели неке глатке површи имају исту Ојлерову карактеристику.

За **полиедре** важи:

$$\chi(\mathcal{M}) = 2 - 2r$$

род полиедра

Примери

Пример 7

Ако је \mathcal{M} полиедарски модел сфере, тада је $\chi(\mathcal{M}) = 2$.



Слика 16: Полиедарски модел сфере

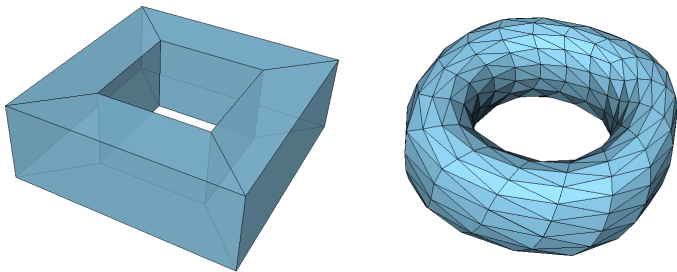
Пример 8

Ојлерова карактеристика Мебијусове траке је нула.

Примери

Пример 9

Род турса је 1.



Слика: Полиедарски модели турса

Примери

Пример 10

Дата је полиедарска површ:

$$p_0 = \langle 0, 1, 4, 3 \rangle, \quad p_5 = \langle 4, 5, 8, 7 \rangle,$$

$$p_1 = \langle 1, 2, 5, 4 \rangle, \quad p_6 = \langle 8, 7, 1, 2 \rangle,$$

$$p_2 = \langle 2, 0, 3, 5 \rangle, \quad p_7 = \langle 0, 1, 7, 6 \rangle$$

$$p_3 = \langle 6, 8, 5, 3 \rangle, \quad p_8 = \langle 0, 6, 8, 2 \rangle.$$

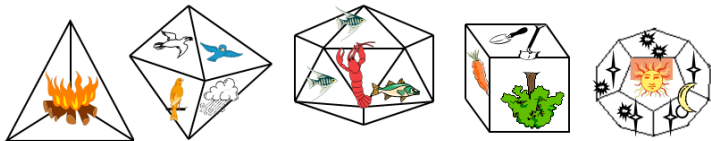
$$p_4 = \langle 6, 3, 4, 7 \rangle$$

- Доказати да је она полиедар, тј. да нема руб.
- Израчунати њену Ојлерову карактеристичку и род.

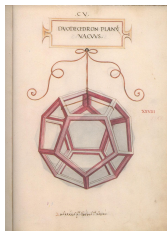
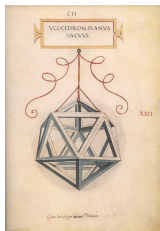
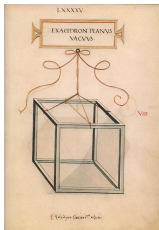
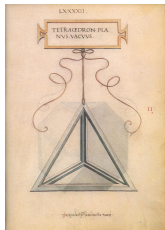
Платонова тела

Платон (457 – 347 п.н.е.), „Тимај” или „О метафизици”

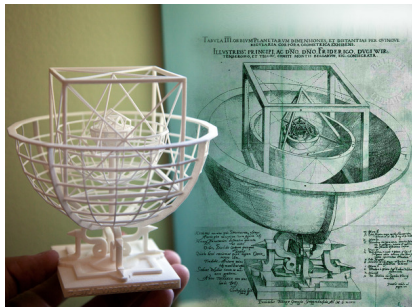
- тетраедар = сувоћа **ватре**
- октаедар = покретљивост **ваздуха**
- икосаедар = влажност **воде**
- хексаедар (коцка) = стабилност **земље**
- додекаедар = **Универзум**



Леонардо да Винчи (1452 – 1519)

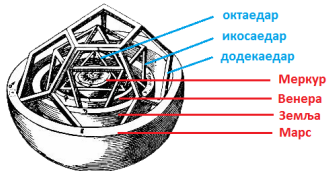
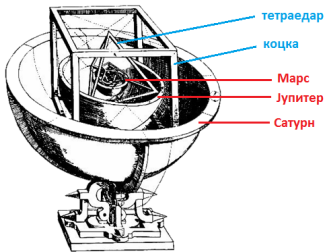


Јохан Кеплер (1571 – 1630)



Слика: Кеплеров модел Соларног система
(Joaquin Baldwin 3D Printed Designs)

Јохан Кеплер (1571 – 1630)



Слика: Кеплеров Соларни систем

Платонова тела

Теорема 3.4

Постоји тачно пет Платонових тела.

Платонова тела

Теорема 3.4

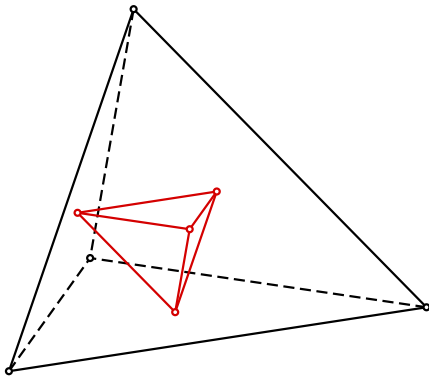
Постоји тачно пет Платонових тела.

полиедар	p	q	T	I	P
тетраедар	3	3	4	6	4
коцка (хексаедар)	3	4	8	12	6
октаедар	4	3	6	12	8
додекаедар	3	5	20	30	12
икосаедар	5	3	12	30	20

p - број ивица из једног темена;

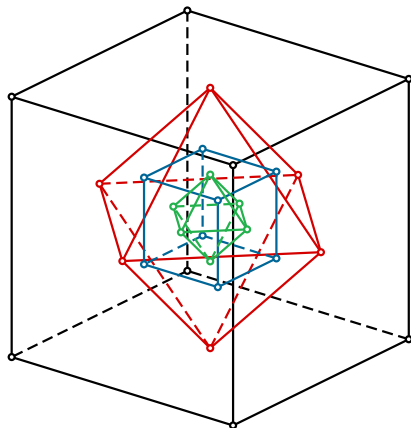
q - број ивица једне пљосни.

Дуалност Платонових тела



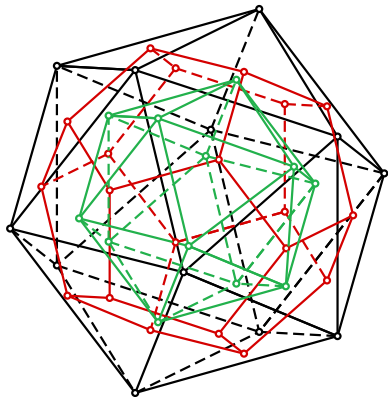
Слика 19: Тетраедар је дуалан самом себи

Дуалност Платонових тела



Слика 19: Хексаедар и октаедар су дуални

Дуалност Платонових тела



Слика 19: Икосаедар и додекаедар су дуални

Конструкција Платонових тела

Конструкције:

- тетраедар;
- октаедар;
- додекаедар;
- икосаедар.

Конструкција Платонових тела

Еуклидова конструкција додекаедра²

²анимација проф. Зорана Лучића

Триангулација полигона

- Триангулација је разлагање неког лика на троуглове.

Триангулација полигона

- Триангулација је разлагање неког лика на троуглове.
- Триангулација простог полигона је разлагање његове унутрашњости унутрашњим дијагоналама које се међусобно не секу.

Триангулација полигона

- Триангулација је разлагање неког лика на троуглове.
- Триангулација простог полигона је разлагање његове унутрашњости унутрашњим дијагоналама које се међусобно не секу.

Лема 4.1

Сваки прост полигон са више од 3 темена има унутрашњу дијагоналу.

Триангулација полигона

- Триангулација је разлагање неког лика на троуглове.
- Триангулација простог полигона је разлагање његове унутрашњости унутрашњим дијагоналама које се међусобно не секу.

Лема 4.1

Сваки прост полигон са више од 3 темена има унутрашњу дијагоналу.

Теорема 4.1

Сваки прост полигон допушта триангулацију и свака триангулација полигона са n темена се састоји од тачно $n - 2$ троугла.

Примери

Пример 11

Од датих тачака у равни формирати прост полигон, а затим га триангулисати.

а) $P_0 = (0, 0)$, $P_1 = (5, -1)$, $P_2 = (3, 2)$, $P_3 = (6, 4)$,
 $P_4 = (-1, 3)$.

б) $P_0 = (-1, 3)$, $P_1 = (2, 1)$, $P_2 = (0, 0)$, $P_3 = (4, -1)$,
 $P_4 = (5, 3)$, $P_5 = (3, 4)$.

Проблем уметничке галерије

Проблем: Поставити минималан број чувара који покривају читаву галерију.

Проблем уметничке галерије

Проблем: Поставити минималан број чувара који покривају читаву галерију.

Галерија = прост полигон са n ивица;

Чувари = тачке унутар полигона.

Проблем уметничке галерије

Проблем: Поставити минималан број чувара који покривају читаву галерију.

Галерија = прост полигон са n ивица;

Чувари = тачке унутар полигона.

Chvátal: Горња граница = $\frac{n}{3}$ чувара!

Проблем уметничке галерије

Проблем: Поставити минималан број чувара који покривају читаву галерију.

Галерија = прост полигон са n ивица;

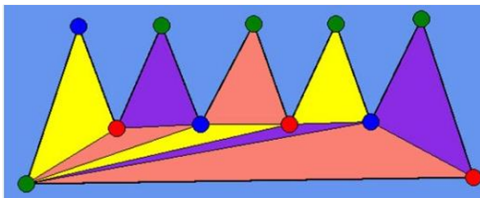
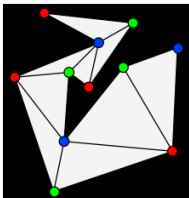
Чувари = тачке унутар полигона.

Chvátal: **Горња граница = $\frac{n}{3}$ чувара!**

Алгоритам:

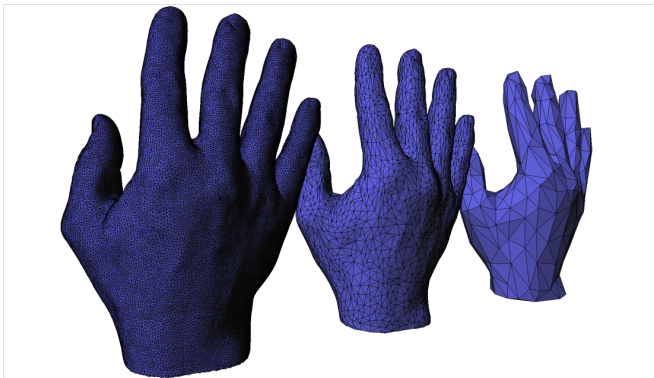
- Триангулисати полигон;
- Обојити темена подеоних троуглова (3-бојење);
- Изабрати за чуваре темена обојена истом бојом.

Проблем уметничке галерије – примери



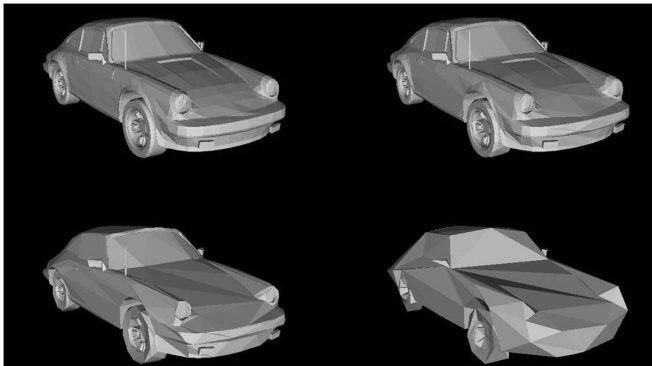
Слика: Примери: Чувари – плаве тачке

Полиедарски модели и триангулација



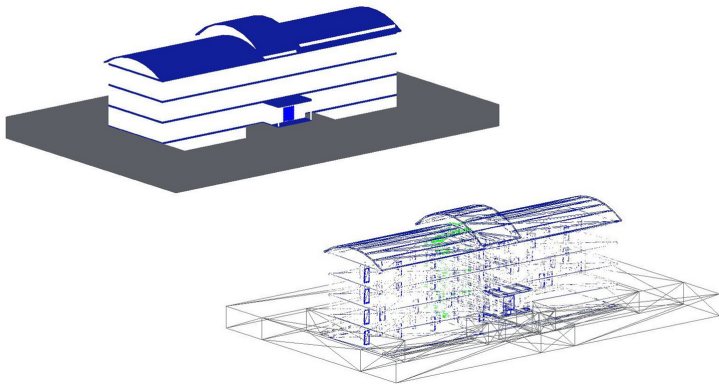
Слика: Модел шаке

Полиедарски модели и триангулација



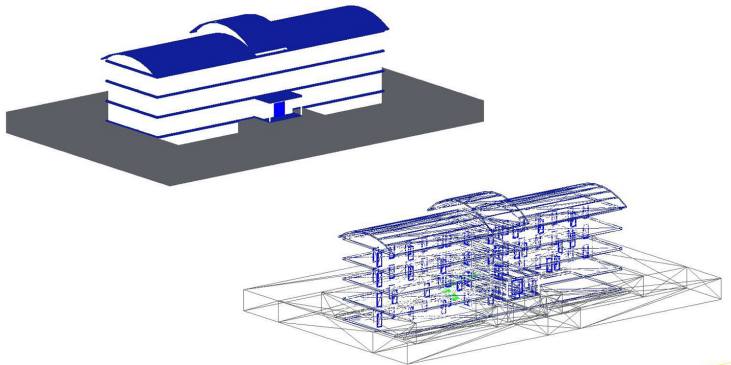
Слика: Модел аутомобила Porsche – редукација полигона (100%, 50%, 20%, 5% оригиналних полигона)

Пример редукције троуглова



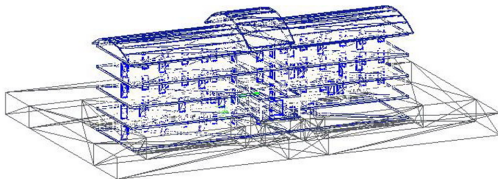
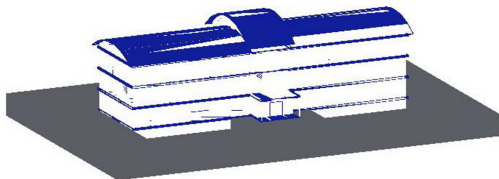
Слика: Модел зграде - оригинални модел (~ 30 хиљада троуглова)

Пример редукције троуглова



Слика: Модел зграде - 50% редукције (~ 10 хиљада троуглова)

Пример редукције троуглова

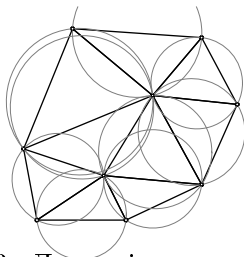


Слика: Модел зграде - 96% редукције (~ 7 хиљада троуглова)

Алгоритми за триангулацију полигона

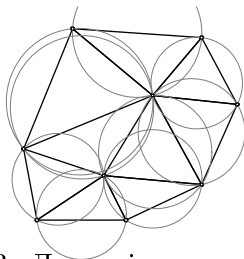
- унутрашњим дијагоналама
- „завртањем ушију”
- триангулација монотоних полигона и монотоних планина
- Делонијева триангулација
- триангулација у линеарном времену

Делонијева триангулација



Слика 23: Делонијева триангулација

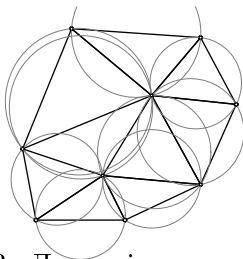
Делонијева триангулација



Слика 23: Делонијева триангулација

Делонијева триангулација **минимизује максималан полупречник круга** описаног око троугла триангулације.

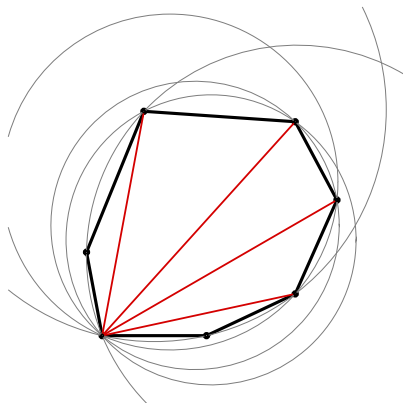
Делонијева триангулација



Слика 23: Делонијева триангулација

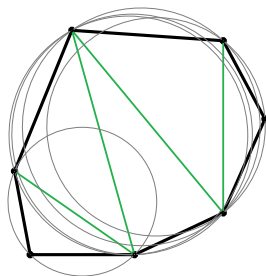
Делонијева триангулација **минимизује максималан полупречник круга** описаног око троугла триангулације. Поступком максимизације најмањег угла се **не минимизује највећи угао, нити се минимизују дужине страница.**

Делонијева триангулација - примери



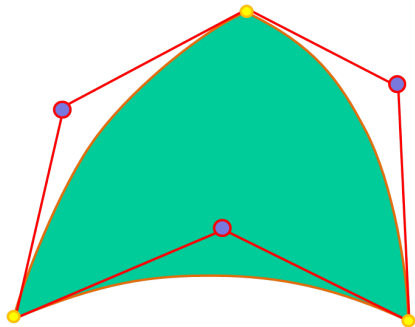
Слика 24: Триангулација која није Делонијева

Делонијева триангулација - примери



Слика 24: Делонијева триангулација

„Криволинијска” триангулација³



Слика: Безијеров троугао са контролним полигоном

„Криволинијска” триангулација³

³Материјале уступио Hagen Wille

„Криволинијска” триангулација³

³Материјале уступио Hagen Wille

„Криволинијска” триангулација³

³Материјале уступио Hagen Wille

Примена геометрије у анимацији

- Трансформације;
- Путања кретања: B-spline криве;
- 3D моделовање;
- Flatland: The Movie;
- Designing a 4D World.