

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

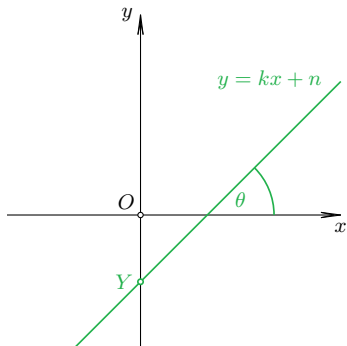
Геометрија И–смер

део 2: Аналитичка геометрија равни и простора

Тијана Шукиловић

25. октобар 2017

Једначина праве у равни

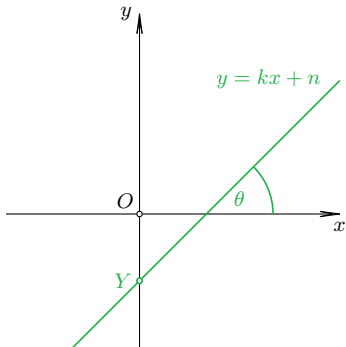


- Експлицитна једначина:

$$p: y = kx + n$$

Слика 1: Експлицитна једначина

Једначина праве у равни



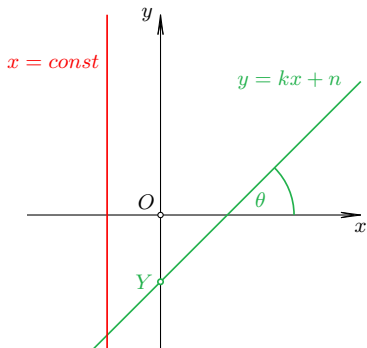
- Експлицитна једначина:

$$p: y = kx + n$$

$$k = \tan \theta \qquad n = |OY|$$

Слика 1: Експлицитна једначина

Једначина праве у равни



- Експлицитна једначина:

$$p: y = \boxed{k}x + \boxed{n}$$

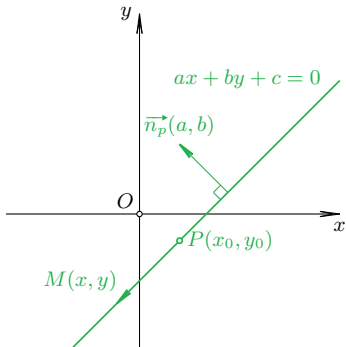
$$k = \tan \theta$$

$$n = |OY|$$

Вертикалне праве?

Слика 1: Експлицитна једначина

Једначина праве у равни

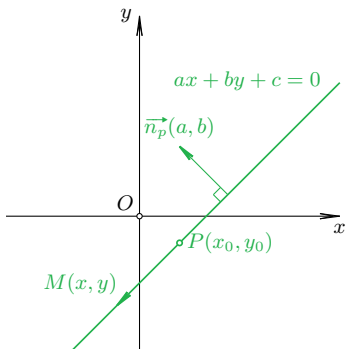


- Имплицитна једначина:

$$p : ax + by + c = 0$$

Слика 2: Имплицитна једначина

Једначина праве у равни



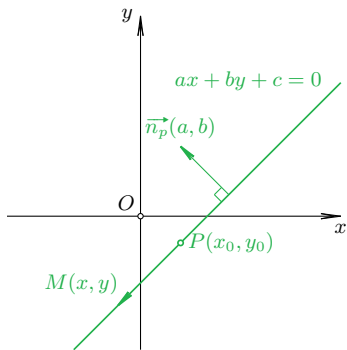
- Имплицитна једначина:

$$p : \boxed{a}x + \boxed{b}y + \boxed{c} = 0$$

\vec{n}_p
 $c = -\vec{OP} \circ \vec{n}_p$

Слика 2: Имплицитна једначина

Једначина праве у равни



- Имплицитна једначина:

$$p : \boxed{a}x + \boxed{b}y + \boxed{c} = 0$$

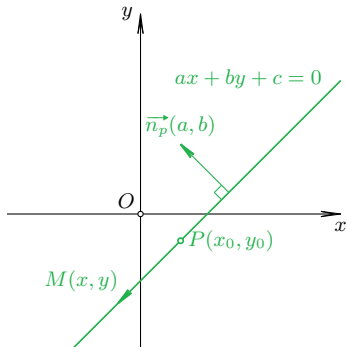
\vec{n}_p
 $c = -\vec{OP} \circ \vec{n}_p$

$$|\vec{n}_p| = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$$

Нормализована једначина

Слика 2: Имплицитна једначина

Једначина праве у равни

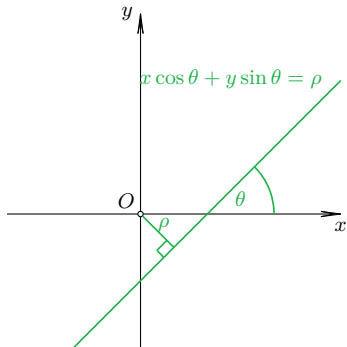


Пример 1

Одредити нормализовану једначину праве која садржи тачку $M(1, 1)$ и чији је нормални вектор $\vec{n}_p = (4, -3)$.

Слика 2: Имплицитна једначина

Једначина праве у равни

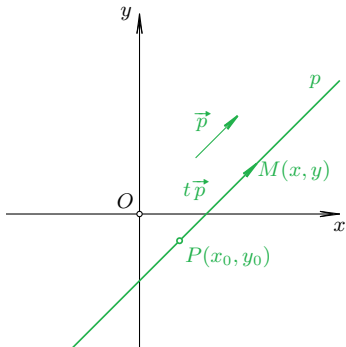


- Нормална једначина:

$$p : x \cos \theta + y \sin \theta = \rho$$

Слика 3: Нормална једначина

Једначина праве у равни

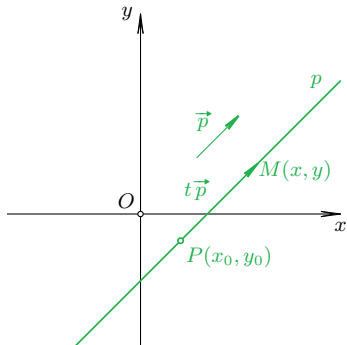


- Параметарска једначина:

$$p: M(t) = P + t\vec{p}, t \in \mathbb{R}$$

Слика 4: Параметарска једначина

Једначина праве у равни



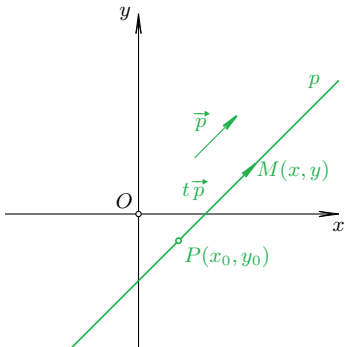
- Параметарска једначина:

$$p: M(t) = P + t \vec{p}, t \in \mathbb{R}$$

брзина кретања

Слика 4: Параметарска једначина

Једначина праве у равни



- Параметарска једначина:

$$p: M(t) = P + t \vec{p}, \quad t \in \mathbb{R}$$

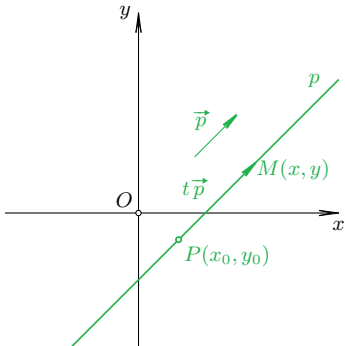
брзина кретања

$$x = x_0 + tp_x,$$

$$y = y_0 + tp_y, \quad t \in \mathbb{R}$$

Слика 4: Параметарска једначина

Једначина праве у равни



- Параметарска једначина:

$$p: M(t) = P + t \vec{p}, \quad t \in \mathbb{R}$$

брзина кретања

$$x = x_0 + tp_x,$$

$$y = y_0 + tp_y, \quad t \in \mathbb{R}$$

Слика 4: Параметарска једначина

Равномерно
праволинијско кретање

Параметарски \longrightarrow имплицитни облик

- Параметарски облик:

$$x = x_0 + tp_x, \quad y = y_0 + tp_y, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Параметарски \longrightarrow имплицитни облик

- Параметарски облик:

$$x = x_0 + tp_x, \quad y = y_0 + tp_y, \quad t \in \mathbb{R}.$$

- Канонски облик:

$$t = \frac{x - x_0}{p_x} = \frac{y - y_0}{p_y}.$$

Параметарски \longrightarrow имплицитни облик

- Параметарски облик:

$$x = x_0 + tp_x, \quad y = y_0 + tp_y, \quad t \in \mathbb{R}.$$

- Канонски облик:

$$t = \frac{x - x_0}{p_x} = \frac{y - y_0}{p_y}.$$

- Имплицитни облик:

$$p_y x - p_x y + (p_x y_0 - p_y x_0) = 0.$$

Имплицитни \longrightarrow параметарски облик

- Имплицитни облик:

$$ax + by + c = 0.$$

Имплицитни \longrightarrow параметарски облик

- Имплицитни облик:

$$ax + by + c = 0.$$

- Параметарски облик:

$$\vec{p} = (-b, a), \quad P \left(\frac{-ac}{a^2 + b^2}, \frac{-bc}{a^2 + b^2} \right).$$

Имплицитни \longrightarrow параметарски облик

- Имплицитни облик:

$$ax + by + c = 0.$$

- Параметарски облик:

$$\vec{p} = (-b, a), \quad P \left(\frac{-ac}{a^2 + b^2}, \frac{-bc}{a^2 + b^2} \right).$$

Пример 2

Дата је права $p : 3x - 4y + 6 = 0$. Одредити параметарски облик праве p и угао који права p заклапа са x -осом.

Примери

Пример 3

Одредити имплицитну једначину праве које садржи тачку $M(1, 2)$ и паралелна је са y -осом.

Пример 4

Одредити параметарску једначуну праве која садржи тачку $P(-2, 3)$ и нормална је на праву $q : 2x + 3y - 1 = 0$.

Параметризација дужи и полуправе

- Дуж $[AB]$:

$$M(t) = A + t\overrightarrow{AB}, \quad t \in [0, 1].$$

Параметризација дужи и полуправе

- Дуж $[AB]$:

$$M(t) = A + t\overrightarrow{AB}, \quad t \in [0, 1].$$

- Полуправа $[AB)$:

$$M(t) = A + t\overrightarrow{AB}, \quad t \in [0, +\infty).$$

Параметризација дужи и полуправе

- Дуж $[AB]$:

$$M(t) = A + t\overrightarrow{AB}, \quad t \in [0, 1].$$

- Полуправа $[AB)$:

$$M(t) = A + t\overrightarrow{AB}, \quad t \in [0, +\infty).$$

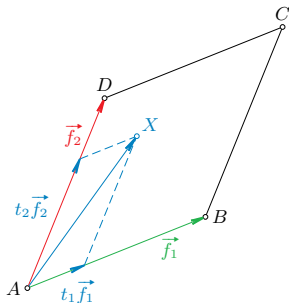
Пример 5

Одредити параметарску једначину дужи $[AB]$ ако је $A(2, -3)$, $B(10, 9)$.

Одредити тачке A_1 , A_2 и A_3 које дуж $[AB]$ деле на четири једнака дела.

Да ли тачка $C\left(\frac{2}{3}, -5\right)$ припада полуправој $[AB)$?

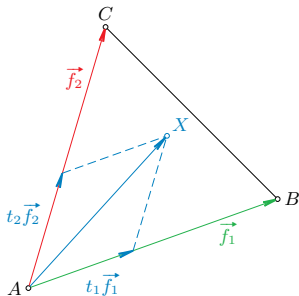
Параметризација паралелограма



Слика 5: Параметарска једначина паралелограма

$$X(t_1, t_2) = A + t_1 \overrightarrow{AB} + t_2 \overrightarrow{AD}, \quad 0 \leq t_1, t_2 \leq 1.$$

Параметризација троугла



Слика 6: Параметарска једначина троугла

$$X(t_1, t_2) = A + t_1 \overrightarrow{AB} + t_2 \overrightarrow{AC}, \quad 0 \leq t_1, t_2 \leq 1, \quad t_1 + t_2 \leq 1.$$

Полураван

- C, D су са исте стране праве p ако: $[CD] \cap p = \{\emptyset\}$.

Полураван

- C, D су са исте стране праве p ако: $[CD] \cap p = \{\emptyset\}$.
- Полураван = скуп свих тачака са исте стране праве p .

Полураван

- C, D су са исте стране праве p ако: $[CD] \cap p = \{\emptyset\}$.
- Полураван = скуп свих тачака са исте стране праве p .
- $p : f(x, y) = ax + by + c = 0$:

$$C, D \overset{\cdot\cdot}{-} p \iff \text{sign}(f(C)) = \text{sign}(f(D)).$$

Полураван

- C, D су са исте стране праве p ако: $[CD] \cap p = \{\emptyset\}$.
- Полураван = скуп свих тачака са исте стране праве p .
- $p : f(x, y) = ax + by + c = 0$:

$$C, D \overset{\cdot\cdot}{-} p \iff \text{sign}(f(C)) = \text{sign}(f(D)).$$

- $p : A, B \in p$:

$$C, D \overset{\cdot\cdot}{-} p \iff \text{sign}(D_{ABC}) = \text{sign}(D_{ABD}).$$

Полураван

- C, D су са исте стране праве p ако: $[CD] \cap p = \{\emptyset\}$.
- Полураван = скуп свих тачака са исте стране праве p .
- $p : f(x, y) = ax + by + c = 0$:

$$C, D \overset{\cdot\cdot}{-} p \iff \text{sign}(f(C)) = \text{sign}(f(D)).$$

- $p : A, B \in p$:

$$C, D \overset{\cdot\cdot}{-} p \iff \text{sign}(D_{ABC}) = \text{sign}(D_{ABD}).$$

- $p : P, \vec{p}, A \equiv P, B = A + \vec{p}$.

Полураван

- C, D су са исте стране праве p ако: $[CD] \cap p = \{\emptyset\}$.
- Полураван = скуп свих тачака са исте стране праве p .
- $p : f(x, y) = ax + by + c = 0$:

$$C, D \overset{\cdot\cdot}{-} p \iff \text{sign}(f(C)) = \text{sign}(f(D)).$$

- $p : A, B \in p$:

$$C, D \overset{\cdot\cdot}{-} p \iff \text{sign}(D_{ABC}) = \text{sign}(D_{ABD}).$$

- $p : P, \vec{p}, A \equiv P, B = A + \vec{p}$.

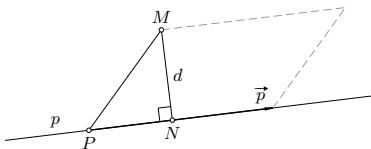
Пример 6

Испитати да ли се тачке $A(1, 3)$ и $B(-2, 1)$ налазе са исте стране праве: а) $p : 2x + y = 0$; б) $q : Q(0, 1), \vec{q} = (2, -3)$.

Растојање тачке од праве

Теорема 1.1 (важи и у простору)

$$d(M, p) = d = \frac{|\vec{p} \times \overrightarrow{PM}|}{|\vec{p}|}.$$

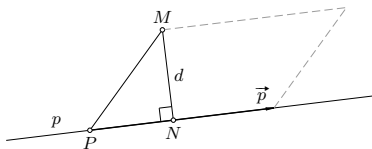


Слика 7: Растојање тачке од праве

Растојање тачке од праве

Теорема 1.1 (важи и у простору)

$$d(M, p) = d = \frac{|\vec{p} \times \overrightarrow{PM}|}{|\vec{p}|}.$$



Слика 7: Растојање тачке од праве

Пример 7

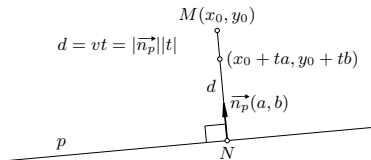
Одредити растојање тачке $M(1, 1)$ од праве

$p : P(-2, 0), \vec{p} = (3, 4).$

Растојање тачке од праве

Теорема 1.2

$$d(M, p) = d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

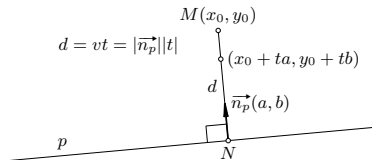


Слика 8: Растојање тачке од праве

Растојање тачке од праве

Теорема 1.2

$$d(M, p) = d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



Слика 8: Растојање тачке од праве

Пример 8

Одредити растојање тачке $M(1, 1)$ од праве
 $p : 3x + 4y - 5 = 0$.

Пресек имплицитно задатих правах

- Решити систем:

$$p : a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$q : a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

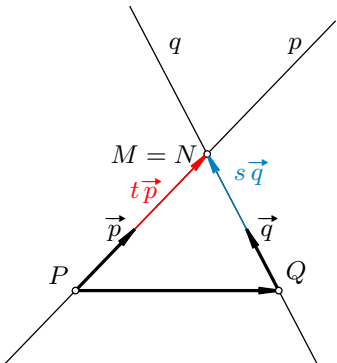
- Крамерово правило:

$$\Delta = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}, \quad \Delta_x = \begin{pmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{pmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{pmatrix}.$$

- $\Delta \neq 0$ – праве се секу у $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$, $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$;
- $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$ – праве се поклапају;
- $\Delta = 0$, $\Delta_x \neq 0$ или $\Delta_y \neq 0$ – праве су паралелне.

Пресек параметарски задатих правах

$$P + t\vec{p} = M = N = Q + s\vec{q}$$



Слика 9: Пресек правах

Пресек параметарски задатих правах

- $D(\vec{p}, \vec{q}) \neq 0$ – праве се секу

$$t = \frac{D(\overrightarrow{PQ}, \vec{q})}{D(\vec{p}, \vec{q})}, \quad s = \frac{D(\overrightarrow{PQ}, \vec{p})}{D(\vec{p}, \vec{q})}$$

Пресек параметарски задатих правих

- $D(\vec{p}, \vec{q}) \neq 0$ – праве се секу

$$t = \frac{D(\overrightarrow{PQ}, \vec{q})}{D(\vec{p}, \vec{q})}, \quad s = \frac{D(\overrightarrow{PQ}, \vec{p})}{D(\vec{p}, \vec{q})}$$

- $D(\vec{p}, \vec{q}) = 0, D(\overrightarrow{PQ}, \vec{q}) = 0$ – праве се поклапају

Пресек параметарски задатих правих

- $D(\vec{p}, \vec{q}) \neq 0$ – праве се секу

$$t = \frac{D(\overrightarrow{PQ}, \vec{q})}{D(\vec{p}, \vec{q})}, \quad s = \frac{D(\overrightarrow{PQ}, \vec{p})}{D(\vec{p}, \vec{q})}$$

- $D(\vec{p}, \vec{q}) = 0, D(\overrightarrow{PQ}, \vec{q}) = 0$ – праве се поклапају
- $D(\vec{p}, \vec{q}) = 0, D(\overrightarrow{PQ}, \vec{q}) \neq 0$ – праве су паралелне

Пресек параметарски задатих правих

- $D(\vec{p}, \vec{q}) \neq 0$ – праве се секу

$$t = \frac{D(\overrightarrow{PQ}, \vec{q})}{D(\vec{p}, \vec{q})}, \quad s = \frac{D(\overrightarrow{PQ}, \vec{p})}{D(\vec{p}, \vec{q})}$$

- $D(\vec{p}, \vec{q}) = 0, D(\overrightarrow{PQ}, \vec{q}) = 0$ – праве се поклапају
- $D(\vec{p}, \vec{q}) = 0, D(\overrightarrow{PQ}, \vec{q}) \neq 0$ – праве су паралелне

Пример 9

Одредити пресек правих p и q које су задате тачком и вектором правца:

(а) $P(3, 1), \vec{p} = (1, 0), \quad Q(2, 3), \vec{q} = (1, 1);$

(б) $P(3, 1), \vec{p} = (1, 0), \quad Q(2, 3), \vec{q} = (-2, 0);$

(в) $P(3, 1), \vec{p} = (1, -2), \quad Q(2, 3), \vec{q} = (-2, 4).$

Пресек дужи

$$[AB] : A + t\overrightarrow{AB}, \quad [CD] : C + s\overrightarrow{CD}, \quad t, s \in [0, 1]$$

Пресек дужи

$$[AB] : A + t\overrightarrow{AB}, \quad [CD] : C + s\overrightarrow{CD}, \quad t, s \in [0, 1]$$

- Дужи се секу ако је $D(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \neq 0$ и

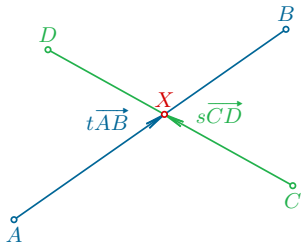
$$0 \leq t = \frac{D(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CD})}{D(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})}, \quad s = \frac{D(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})}{D(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})} \leq 1$$

Пресек дужи

$$[AB] : A + t\overrightarrow{AB}, \quad [CD] : C + s\overrightarrow{CD}, \quad t, s \in [0, 1]$$

- Дужи се секу ако је $D(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \neq 0$ и

$$0 \leq t = \frac{D(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CD})}{D(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})}, \quad s = \frac{D(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})}{D(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})} \leq 1$$



Слика 10: Пресек дужи

Пресек дужи

$$[AB] : A + t\overrightarrow{AB}, \quad [CD] : C + s\overrightarrow{CD}, \quad t, s \in [0, 1]$$

Пресек дужи

$$[AB] : A + t\overrightarrow{AB}, \quad [CD] : C + s\overrightarrow{CD}, \quad t, s \in [0, 1]$$

- Ако је $D(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 0$ и $D(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CD}) = 0$:

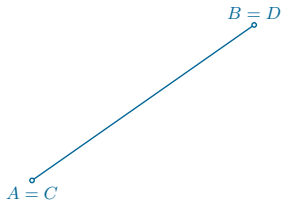
Пресек дужи

$$[AB] : A + t\overrightarrow{AB}, \quad [CD] : C + s\overrightarrow{CD}, \quad t, s \in [0, 1]$$

- Ако је $D(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 0$ и $D(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CD}) = 0$:

дужи се поклапају

} \implies потребна додатна анализа!

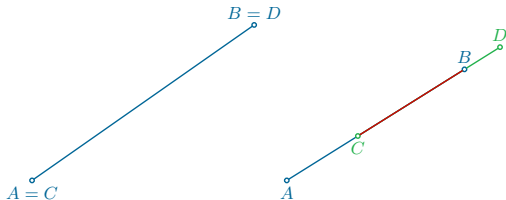


Пресек дужи

$$[AB] : A + t\overrightarrow{AB}, \quad [CD] : C + s\overrightarrow{CD}, \quad t, s \in [0, 1]$$

- Ако је $D(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 0$ и $D(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CD}) = 0$:

дужи се поклапају
дужи се делимично преклапају } \implies потребна додатна анализа!



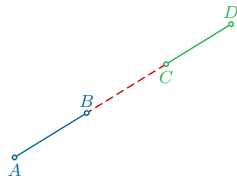
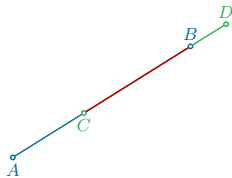
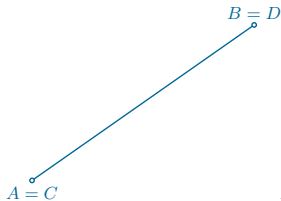
Пресек дужи

$$[AB] : A + t\overrightarrow{AB}, \quad [CD] : C + s\overrightarrow{CD}, \quad t, s \in [0, 1]$$

- Ако је $D(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 0$ и $D(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CD}) = 0$:

дужи се поклапају
 дужи се делимично преклапају
 дужи се не секу

} \implies потребна додатна анализа!



Пресек дужи

$$[AB] : A + t\overrightarrow{AB}, \quad [CD] : C + s\overrightarrow{CD}, \quad t, s \in [0, 1]$$

Пресек дужи

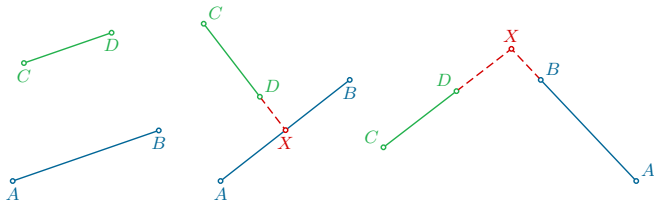
$$[AB] : A + t\overrightarrow{AB}, \quad [CD] : C + s\overrightarrow{CD}, \quad t, s \in [0, 1]$$

- Дужи се не секу у свим осталим случајевима.

Пресек дужи

$$[AB] : A + t\overrightarrow{AB}, \quad [CD] : C + s\overrightarrow{CD}, \quad t, s \in [0, 1]$$

- Дужи се не секу у свим осталим случајевима.



Слика 11: Дужи се не секу

Пресек полуправих и дужи

Пример 10

Одредити пресек полуправих $[AB)$: $A(1, 2)$, $B(-2, 3)$ и $[CD)$: $C(0, 1)$, $D(2, -1)$.

Пример 11

Одредити пресек дужи AB и CD , где је $A(12, 3)$, $B(12, 5)$, $C(5, 7)$, $D(-2, 1)$.

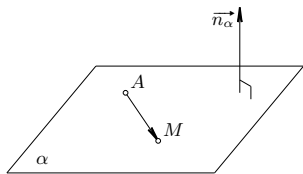
Имплицитна једначина равни

Раван α је одређена тачком $A(x_0, y_0, z_0)$ која јој припада и нормалним вектором равни \vec{n}_α .

Имплицитна једначина равни

Раван α је одређена тачком $A(x_0, y_0, z_0)$ која јој припада и нормалним вектором равни \vec{n}_α .

$$\begin{aligned}
 M(x, y, z) \in \alpha &\implies \overrightarrow{AM} \perp \vec{n}_\alpha \\
 0 &= \vec{n}_\alpha \circ \overrightarrow{AM} \\
 &= (a, b, c) \circ (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \\
 &= a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) \\
 &= ax + by + cz \underbrace{- ax_0 - by_0 - cz_0}_d
 \end{aligned}$$



Слика 12: Имплицитна једначина равни

Нормализована једначина равни

ИмPLICITNA једначина равни:

$$ax + by + cz + d = 0, \quad \vec{n}_\alpha = (a, b, c)$$

Нормализована једначина равни

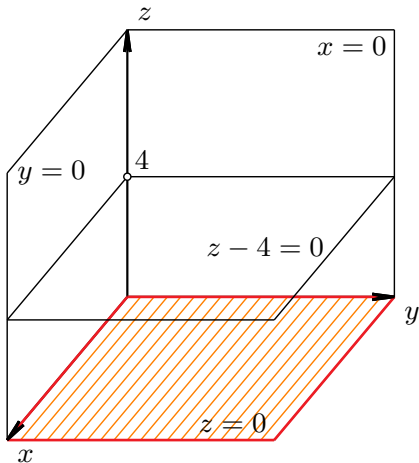
Имлицитна једначина равни:

$$ax + by + cz + d = 0, \quad \vec{n}_\alpha = (a, b, c)$$

Нормализована једначина равни:

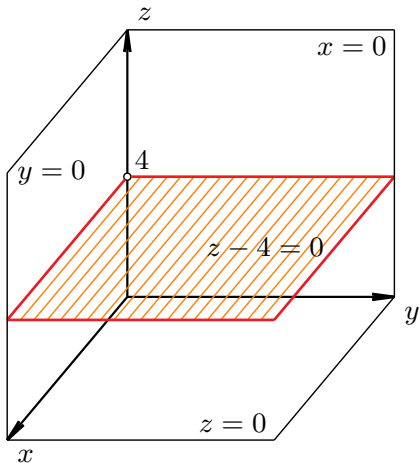
$$ax + by + cz + d = 0, \quad |\vec{n}_\alpha|^2 = a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

Примери



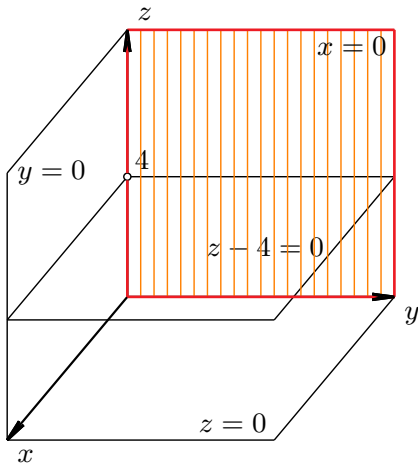
Слика 13: Раван $z = 0$

Примери



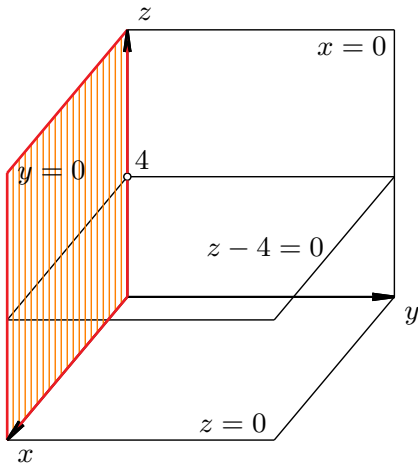
Слика 13: Раван $z - 4 = 0$

Примери



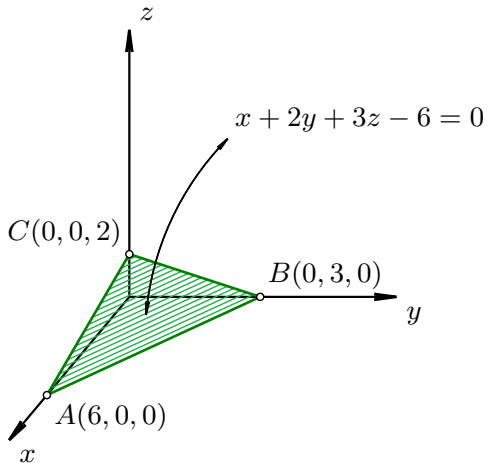
Слика 13: Раван $x = 0$

Примери



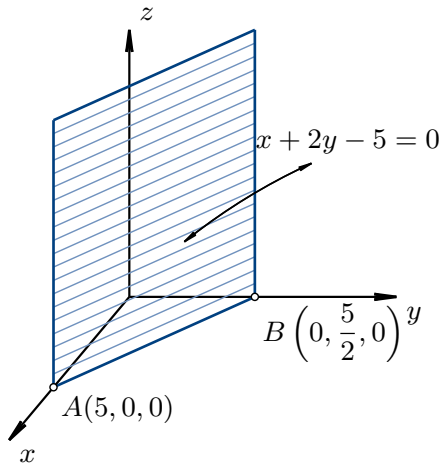
Слика 13: Раван $y = 0$

Пример – скицирати раван



Слика 14: Раван $x + 2y + 3z - 6 = 0$

Пример – скицирати раван



Слика 14: Раван $x + 2y - 5 = 0$

Полуростор

Полупростор је скуп свих тачака са исте стране неке равни $\alpha : ax + by + cz + d = 0$.

Одређен је неједначином $ax + by + cz + d > 0$, односно $ax + by + cz + d < 0$.

Полуростор

Полупростор је скуп свих тачака са исте стране неке равни $\alpha : ax + by + cz + d = 0$.

Одређен је неједначином $ax + by + cz + d > 0$, односно $ax + by + cz + d < 0$.

Пример 12

Да ли се тачке $A(1, 1, 1)$ и $C(-1, -1, 3)$ налазе са исте стране равни $\beta : x - 3y + 4z - 12 = 0$.

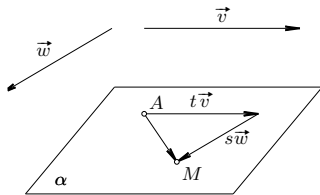
Параметарска једначина равни

Раван α је одређена тачком $A(x_0, y_0, z_0)$ која јој припада и два вектора \vec{v} , \vec{u} паралелна α .

Параметарска једначина равни

Раван α је одређена тачком $A(x_0, y_0, z_0)$ која јој припада и два вектора \vec{v} , \vec{w} паралелна α .

$$M(t, s) = M = A + t\vec{v} + s\vec{w}, \quad t, s \in \mathbb{R}$$



Слика 15: Параметарска једначина равни

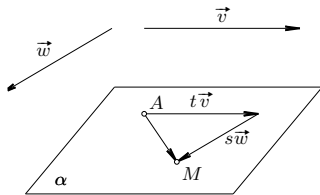
Параметарска једначина равни

Раван α је одређена тачком $A(x_0, y_0, z_0)$ која јој припада и два вектора \vec{v} , \vec{w} паралелна α .

$$M(t, s) = M = A + t\vec{v} + s\vec{w}, \quad t, s \in \mathbb{R}$$

Параметарска једначина равни:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + tv_x + sw_x, \\ y &= y_0 + tv_y + sw_y, \\ z &= z_0 + tv_z + sw_z, \quad t, s \in \mathbb{R} \end{aligned}$$



Слика 15: Параметарска једначина равни

Прелазак из једног облика равни у други

Параметарски \longrightarrow имплицитни:

$$\vec{n}_\alpha = \vec{v} \times \vec{w} = (a, b, c)$$

$$d = -ax_0 - by_0 - cz_0 = -\vec{n}_\alpha \circ \vec{OA}$$

Прелазак из једног облика равни у други

Параметарски \longrightarrow имплицитни:

$$\vec{n}_\alpha = \vec{v} \times \vec{w} = (a, b, c)$$

$$d = -ax_0 - by_0 - cz_0 = -\vec{n}_\alpha \circ \vec{OA}$$

Имплицитни \longrightarrow параметарски:

$$\vec{v} \perp \vec{n}_\alpha - \text{произвољан}$$

$$\vec{w} = \vec{n}_\alpha \times \vec{v}$$

$$a \neq 0 : A \left(-\frac{d}{a}, 0, 0 \right)$$

Прелазак из једног облика равни у други

Пример 13

Одредити параметарски једначину равни

$$\alpha : x - 2y + z - 2 = 0.$$

Пример 14

Одредити нормализовану једначину равни β :

$$x = 2,$$

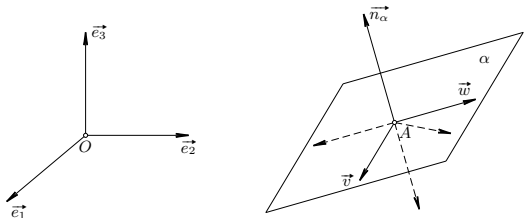
$$y = 1 - t,$$

$$z = 2 + t - 3s, \quad t, s \in \mathbb{R}$$

Избор координатног система везаног за раван

$\alpha : ax + by + cz + d = 0$ → $\alpha' : z' = 0$

WCS UCS



Слика 16: Координатни систем прилагођен датој равни

Примери

Пример 15

- а) Одредити ортонормирани координатни систем (x', y', z') у односу на раван $\alpha : x - y - 2 = 0$ и написати везу тих координата са координатама (x, y, z) .

Параметарска једначина праве

Права у простору се задаје тачком $P(x_0, y_0, z_0)$ и ненула вектором правца $\vec{p}(p_x, p_y, p_z)$:

$$M(t) = M = P + t\vec{p}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Параметарска једначина праве

Права у простору се задаје тачком $P(x_0, y_0, z_0)$ и ненула вектором правца $\vec{p}(p_x, p_y, p_z)$:

$$M(t) = M = P + t\vec{p}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Параметарска једначина праве:

$$x = x_0 + tp_x,$$

$$y = y_0 + tp_y,$$

$$z = z_0 + tp_z, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Параметарска једначина праве

Права у простору се задаје тачком $P(x_0, y_0, z_0)$ и ненула вектором правца $\vec{p}(p_x, p_y, p_z)$:

$$M(t) = M = P + t\vec{p}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Параметарска једначина праве:

$$x = x_0 + tp_x,$$

$$y = y_0 + tp_y,$$

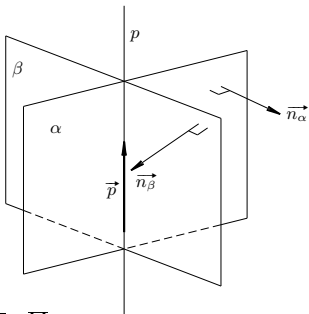
$$z = z_0 + tp_z, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Канонска једначина праве:

$$\frac{x - x_0}{p_x} = \frac{y - y_0}{p_y} = \frac{z - z_0}{p_z}.$$

Права као пресек две равни

$$\left. \begin{aligned} \alpha : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 &= 0 \\ \beta : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \implies \vec{p} = \vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta$$



Слика 17: Права као пресек две равни

Примери

Пример 16

Праву $p : x - z = 0, 2x - y + 1 = 0$ записати параметарски.

Пример 17

Праву $p : x = t + 4, y = -t + 1, z = 3t, t \in \mathbb{R}$ записати као пресек две равни.

Пример 18

Одредити једначину праве која садржи тачке $A(1, 2, 3)$ и $B(3, 2, 1)$.

Прамен равни

Теорема 2.1

Скуп свих равни које садрже праву $p = \alpha \cap \beta$ је дат једначином:

$$\gamma : \lambda_1(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + \lambda_2(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0,$$

за $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Прамен равни

Теорема 2.1

Скуп свих равни које садрже праву $p = \alpha \cap \beta$ је дат једначином:

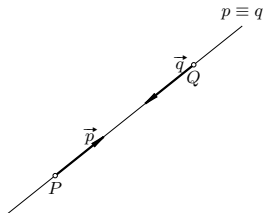
$$\gamma : \lambda_1(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + \lambda_2(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0,$$

за $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Пример 19

Одредити једначину равни која садржи тачку $M(1, 4, -2)$ и праву $p : x - y - 1 = 0, z - 2x = 0$.

Међусобни положаји две праве

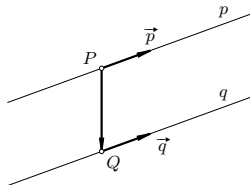


Слика 18: Праве које се поклапају

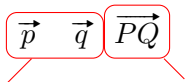
$$\vec{p} \quad \vec{q} \quad \overrightarrow{PQ}$$

колинеарни

Међусобни положаји две праве



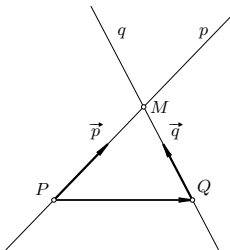
Слика 18: Паралелне праве



колинеарни

неколинеаран

Међусобни положаји две праве

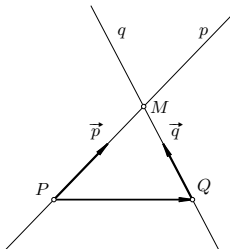


Слика 18: Праве које се секу

$$\boxed{\vec{p} \quad \vec{q}} \quad \vec{PQ}$$

неколинеарни

Међусобни положаји две праве

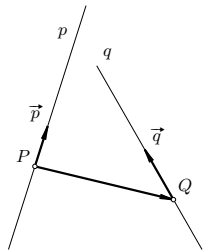


Слика 18: Праве које се секу

$$\vec{p} \quad \vec{q} \quad \overrightarrow{PQ}$$

копланарни

Међусобни положаји две праве



Слика 18: Мимоилазне праве

$$\vec{p} \quad \vec{q} \quad \overrightarrow{PQ}$$

некопланарни

Пример 20

Одредити међусобни положај правих:

$$(a) \quad p: \frac{x-2}{1} = \frac{y-19}{5} = \frac{z-2}{1}, \quad q: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{4};$$

$$(б) \quad p: \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-2}{-1}, \quad q: 2x = y, 3x = z;$$

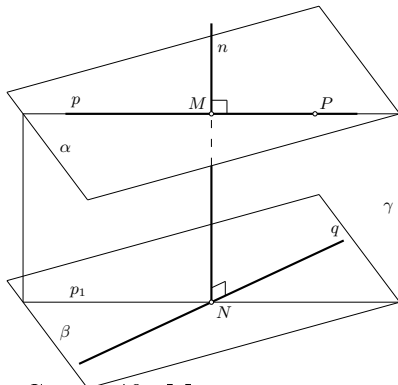
$$(в) \quad p: \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-2}{-1}, \quad q: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{-1};$$

$$(г) \quad p: \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-2}{-1}, \quad q: \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+7}{2}.$$

Мимоилазне праве

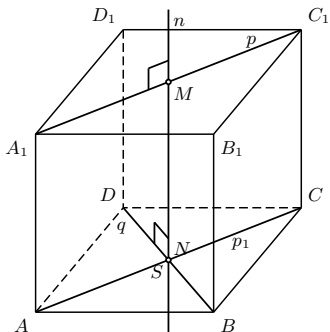
Теорема 3.1

Мимоилазне праве p и q имају јединствену заједничку нормалу, тј. праву која сече обе праве и нормална је на њих.



Слика 19: Мимоилазне праве

Примери

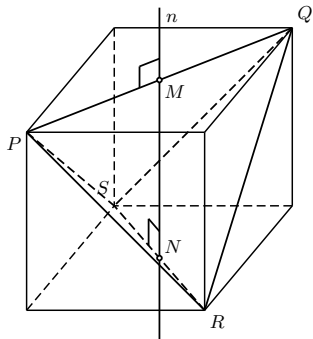


Слика 20: Коцка

Пример 21

Дијагонале наспрамних пљосни коцке су мимоилазне праве, а њихова заједничка нормала је одређена средиштима тих дијагонала.

Примери



Слика 21: Тетраедар

Пример 22

Шта је заједничка нормала мимоилазних ивица PQ и RS правилног тетраедра $PQRS$?

Међусобни положаји праве и равни

Права p и раван α могу да:

- се секу;
- буду паралелне;
- права припада равни.

Међусобни положаји праве и равни

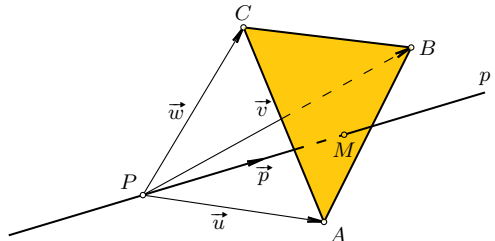
Права p и раван α могу да:

- се секу;
- буду паралелне;
- права припада равни.

Пример 23

Одредити међусобни положај праве $p : \frac{x+4}{0} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{1}$ и равни $\alpha : x - 2y + 5z - 1 = 0$.

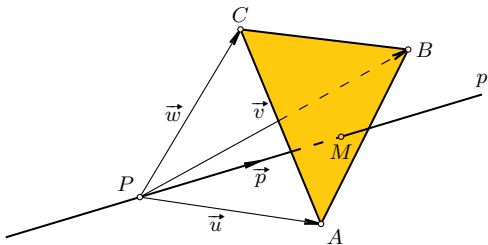
Продор праве кроз троугао



Слика 22: Продор праве кроз троугао

$$\text{sign}[\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}, \vec{p}] = \text{sign}[\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PC}, \vec{p}] = \text{sign}[\overrightarrow{PC}, \overrightarrow{PA}, \vec{p}]$$

Продор праве кроз троугао

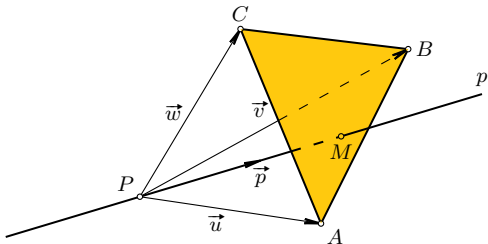


Слика 22: Продор праве кроз троугао

$$M = P + t\vec{p},$$

$$t = \frac{[\vec{PA}, \vec{PB}, \vec{PC}]}{[\vec{PA}, \vec{PB}, \vec{p}] + [\vec{PB}, \vec{PC}, \vec{p}] + [\vec{PC}, \vec{PA}, \vec{p}]}$$

Продор праве кроз троугао

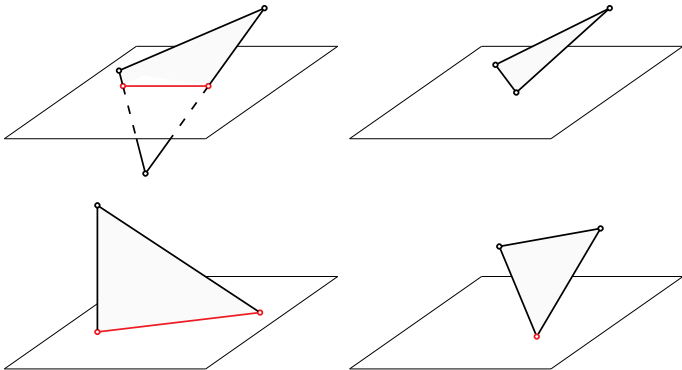


Слика 22: Продор праве кроз троугао

Пример 24

Да ли права $p : \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{2}$ сече троугао ABC ,
 $A(2, 4, 6)$, $B(-4, 2, 0)$, $C(6, 4, -2)$?

Пресек троугла и равни



Слика 23: Пресек равни и троугла

Растојање тачке од праве

Теорема 4.1

Растојање тачке M од праве p задате тачком P и вектором правца P дато је формулом:

$$d = \frac{|\vec{p} \times \overrightarrow{PM}|}{|\vec{p}|}.$$

Растојање тачке од праве

Теорема 4.1

Растојање тачке M од праве p задате тачком P и вектором правца P дато је формулом:

$$d = \frac{|\vec{p} \times \overrightarrow{PM}|}{|\vec{p}|}.$$

Пример 25

Одредити растојање тачке $M(1, 0, -1)$ од праве

$$p : \frac{x}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{2}.$$

Растојање тачке од равни

Теорема 4.2

Растојање тачке $M(x_0, y_0, z_0)$ од равни $\alpha : ax + by + cz + d = 0$ дато је формулом:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Растојање тачке од равни

Теорема 4.2

Растојање тачке $M(x_0, y_0, z_0)$ од равни $\alpha : ax + by + cz + d = 0$ дато је формулом:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Пример 26

Одредити растојање тачке $M(1, 0, -1)$ од равни $\alpha : x + y - 4z = 0$.

Растојање између мимоилазних правих

Теорема 4.3

Растојање између мимоилазних правих p и q дато је формулом:

$$d = \frac{|[\vec{p}, \vec{q}, \overrightarrow{PQ}]|}{|\vec{p} \times \vec{q}|}.$$

Растојање између мимоилазних правих

Теорема 4.3

Растојање између мимоилазних правих p и q дато је формулом:

$$d = \frac{|[\vec{p}, \vec{q}, \overrightarrow{PQ}]|}{|\vec{p} \times \vec{q}|}.$$

Пример 27

Одредити заједничку нормалну и растојање између мимоилазних правих

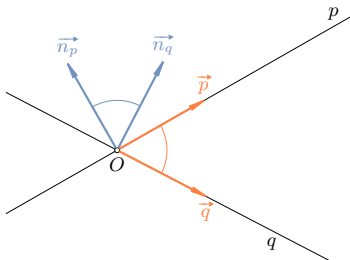
$$p: \frac{x-6}{3} = \frac{y-5}{4} = \frac{z}{0},$$

$$q: \frac{x+1}{4} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z-15}{-5}.$$

Углови између правих и равни

- Угао између правих p и q је оштар угао између њихових нормалних вектора.

$$\angle(p, q) = \text{оштар} \angle(\vec{p}, \vec{q}) = \arccos \frac{|\vec{p} \circ \vec{q}|}{|\vec{p}| \cdot |\vec{q}|}$$

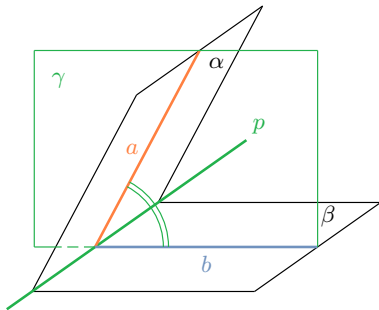


Слика 24: Угао између две праве

Углови између правих и равни

- Угао између равни α и β је оштар угао између правих a и b .

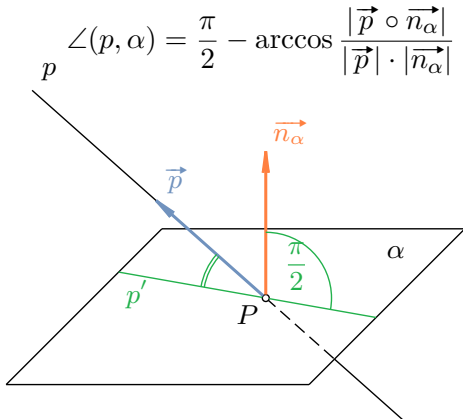
$$\angle(\alpha, \beta) = \arccos \frac{|\vec{n}_\alpha \circ \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha| \cdot |\vec{n}_\beta|}$$



Слика 25: Угао између две равни

Углови између правих и равни

- Угао између праве p и равни α је угао између праве p и њене нормалне пројекције p' на раван α .



Слика 26: Угао између праве и равни

Примери

Пример 28

Одредити тачку продора праве $p : \frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-5}{-4}$
кроз раван $\alpha : 3x + y + 5z - 7 = 0$.

Колики угао права p заклапа са равни α ?