УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Геометрија И–смер

део 3: Афине и пројективне трансформације

Тијана Шукиловић

27. новембар 2017

Дефиниција афиног пресликавања

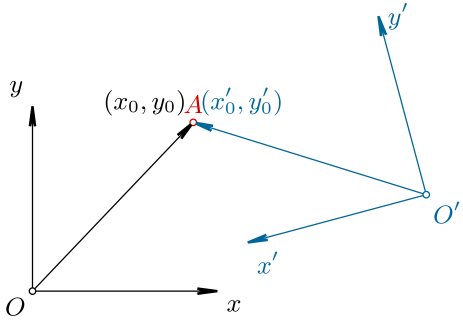
Дефиниција 1.1

Нека је $\bar{f} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ линеарно пресликавање векторског простора који је придружен простору тачака $\mathbb{E}$.
Афино пресликавање $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ је пресликавање тачака које је индуковано пресликавањем $\bar{f}$ вектора у смислу да је:

$$f(M) = M', \;\; f(N) = N' \quad \Longleftrightarrow \quad \bar{f}(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{M'N'}.$$

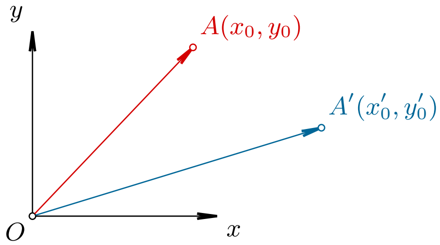
Анимација: Афине трансформације простора

Пасивно и активно гледиште



Слика 1: Пасивно гледиште

Пасивно и активно гледиште



Слика 1: Активно гледиште

Афина пресликавања равни

Дефиниција 2.1

Афино пресликавање равни $\mathbb{E}^2$:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \boxed{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}}, \quad \det(a_{ij}) \neq 0.$$

слике базних вектора

слика координатног почетка

Афина пресликавања равни

Дефиниција 2.1

Афино пресликавање равни $\mathbb{E}^2$:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\boxed{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}}_{\text{слике базних вектора}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \underbrace{\boxed{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}}}_{\text{слика координатног почетка}}, \quad \det(a_{ij}) \neq 0.$$

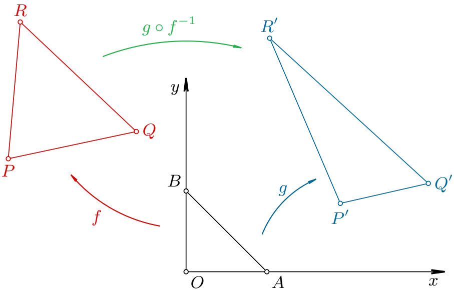
Пример 1

Одредити формуле афиног пресликавања f равни које тачке $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(0,1)$ пресликава редом у тачке $O'(2,2), A'(4,5), B'(3,1)$.

Особине афиних пресликавања

Теорема 2.1

Постоји јединствено афино пресликавање равни које пресликава три неколинеарне тачке P, Q, R у три неколинеарне тачке P', Q', R', редом.



Слика 2: Доказ теореме

Особине афиних пресликавања

Теорема 2.2 (Особине афиних пресликавања равни)

- Пресликавају праве у праве;

Особине афиних пресликавања

Теорема 2.2 (Особине афиних пресликавања равни)

- Пресликавају праве у праве;
- Чувају размеру колинеарних дужи;

Особине афиних пресликавања

Теорема 2.2 (Особине афиних пресликавања равни)

- Пресликавају праве у праве;
- Чувају размеру колинеарних дужи;
- Чувају паралелност правих;

Особине афиних пресликавања

Теорема 2.2 (Особине афиних пресликавања равни)

- Пресликавају праве у праве;
- Чувају размеру колинеарних дужи;
- Чувају паралелност правих;
- Однос површина слике и оригинала једнак је $\dfrac{P(\mathcal{F}')}{P(\mathcal{F})} = |\det(a_{ij})|;$

Особине афиних пресликавања

Теорема 2.2 (Особине афиних пресликавања равни)

- Пресликавају праве у праве;
- Чувају размеру колинеарних дужи;
- Чувају паралелност правих;
- Однос површина слике и оригинала једнак је $\dfrac{P(\mathcal{F}')}{P(\mathcal{F})} = |\det(a_{ij})|$;
- Пресликавања за која је $\det(a_{ij}) > 0$ чувају оријентацију, а за која је $\det(a_{ij}) < 0$ мењају оријентацију равни.

Примери

Пример 2

Дате су тачке $A(-1,-1)$, $B(1,-1)$, $C(1,1)$, $D(-1,1)$; $A'(4,5)$, $B'(8,7)$, $C'(6,9)$, $D'(2,7)$.

а) Одредити једначине афиног пресликавања које пресликава квадрат $ABCD$ у паралелограм $A'B'C'D'$.

б) Одредити једначину слике круга уписаног у квадрат. Која је то крива?

в) Колика је површина слике круга?

г) Да ли пресликавање чува оријентацију?

Представљање афиних пресликавања матрицама

A – линеарни део

b – транслаторни део

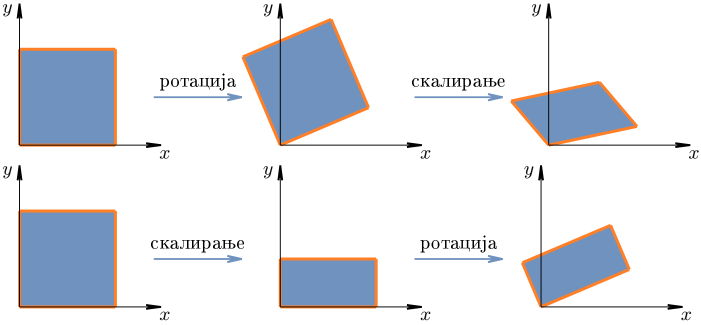
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \boxed{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\boxed{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}}_{A_b} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Представљање афиних пресликавања матрицама

Теорема 2.3

Производ матрица A_b одговара композицији афиних пресликавања.



Слика 3: Афина пресликавања не комутирају!

Транслација

Транслација $\mathcal{T}_{\vec{b}}$ за вектор $\vec{b}(b_1, b_2)$ дата је формулама:

$$x' = x + b_1,$$
$$y' = y + b_2,$$

или у матричном облику:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Транслација

Транслација $\mathcal{T}_{\vec{b}}$ за вектор $\overrightarrow{b}(b_1, b_2)$ дата је формулама:

$$x' = x + b_1,$$
$$y' = y + b_2,$$

или у матричном облику:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

- Како се представља линеарни део транслације?

Транслација

Транслација $\mathcal{T}_{\vec{b}}$ за вектор $\vec{b}(b_1, b_2)$ дата је формулама:

$$x' = x + b_1,$$
$$y' = y + b_2,$$

или у матричном облику:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

- Како се представља линеарни део транслације?
- Шта је композиција транслација?

Транслација

Транслација $\mathcal{T}_{\vec{b}}$ за вектор $\overrightarrow{b}(b_1, b_2)$ дата је формулама:

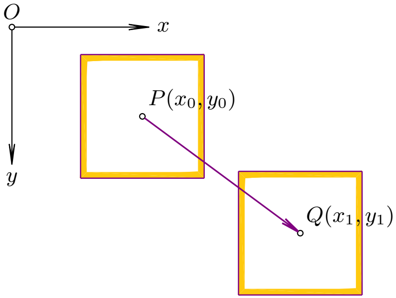
$$x' = x + b_1,$$
$$y' = y + b_2,$$

или у матричном облику:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

- Како се представља линеарни део транслације?
- Шта је композиција транслација?
- Да ли транслације комутирају?

Примери



Слика 4: „*Pan*" алатка

Пример 3

Представити као афину трансформацију „*pan*" алатку: Ако је миш притиснут у $P(x_0, y_0)$, а отпуштен у тачки $Q(x_1, y_1)$ слика се транслира из P у Q.

Ротација

Ротација око координатног почетка, за угао $\phi \in [0, 2\pi)$:

$$\mathcal{R}_\phi : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Ротација

Ротација око координатног почетка, за угао $\phi \in [0, 2\pi)$:

$$\mathcal{R}_\phi : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Ротација око произвољне тачке $Q(q_1, q_2)$ за угао ϕ:

$$\mathcal{R}_{Q,\phi} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{OQ}} \circ \mathcal{R}_\phi \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{QO}}.$$

Ротација

Ротација око координатног почетка, за угао $\phi \in [0, 2\pi)$:

$$\mathcal{R}_\phi : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Ротација око произвољне тачке $Q(q_1, q_2)$ за угао ϕ:

$$\mathcal{R}_{Q,\phi} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{OQ}} \circ \mathcal{R}_\phi \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{QO}}.$$

Пример 4

Одредити 3×3 матрицу ротације око тачке $S(1, -2)$ за угао од $\dfrac{2\pi}{3}$, као и формуле тог пресликавања.
У коју тачку се пресликава координатни почетак при овој ротацији?

Матрица ротације

$$R_\phi := \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$ – матрица ротације за угао ϕ.

Теорема 2.4

Особине матрице ротације:

- $(R_\phi)^{-1} = R_{-\phi} = (R_\phi)^T$;
- $\det R_\phi = 1$;
- $R_\phi R_\theta = R_{\phi+\theta} = R_\theta R_\phi$.

Рефлексија у односу на праву

Рефлексија у односу на праву p_0 кроз координатни почетак, која гради угао $\dfrac{\phi}{2}$ са x-осом:

$$\mathcal{S}_{p_0}:\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Рефлексија у односу на праву

Рефлексија у односу на праву p_0 кроз координатни почетак, која гради угао $\frac{\phi}{2}$ са x-осом:

$$\mathcal{S}_{p_0} : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Рефлексија у односу на произвољу праву $p \parallel p_0$:

$$\mathcal{S}_p = \mathcal{T}_{\overrightarrow{OQ}} \circ \mathcal{S}_{p_0} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{QO}}.$$

Рефлексија у односу на праву

Рефлексија у односу на праву p_0 кроз координатни почетак, која гради угао $\dfrac{\phi}{2}$ са x-осом:

$$\mathcal{S}_{p_0} : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Рефлексија у односу на произвољу праву $p \parallel p_0$:

$$\mathcal{S}_p = \mathcal{T}_{\overrightarrow{OQ}} \circ \mathcal{S}_{p_0} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{QO}}.$$

Пример 5

Одредити формуле рефлексије у односу на праву:
а) $x = -1$; б) $y = 3$; в) $4x - 3y + 6 = 0$.

Матрица рефлексије

$$S_\phi := \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix}$$ – матрица рефлексије.

Теорема 2.5

Особине матрице рефлексије:

- $(S_\phi)^{-1} = (S_\phi)^T$;
- $S_\phi^2 = Id$;
- $\det S_\phi = -1$;
- $S_\phi S_\theta = R_{\phi-\theta}$.

Скалирање

Скалирање у правцу координатних оса, са центром у координатном почетку и коефицијентима $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$:

$$\mathcal{H}_{\lambda_1,\lambda_2} : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Скалирање

Скалирање у правцу координатних оса, са центром у координатном почетку и коефицијентима $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$:

$$\mathcal{H}_{\lambda_1,\lambda_2} : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Скалирање са центром у произвољној тачки:

$$\mathcal{H}_{Q,\lambda_1,\lambda_2} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{OQ}} \circ \mathcal{H}_{\lambda_1,\lambda_2} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{QO}}.$$

Примери

- За које вредности λ_1 и λ_2 је скалирање $\mathcal{H}_{\lambda_1,\lambda_2}$ рефлексија у односу на x-осу (y-осу)?

Примери

- За које вредности λ_1 и λ_2 је скалирање $\mathcal{H}_{\lambda_1,\lambda_2}$ рефлексија у односу на x-осу (y-осу)?
- За које вредности λ_1 и λ_2 је скалирање $\mathcal{H}_{Q,\lambda_1,\lambda_2}$ централна рефлексија у односу на тачку Q?

Примери

- За које вредности λ_1 и λ_2 је скалирање $\mathcal{H}_{\lambda_1,\lambda_2}$ рефлексија у односу на x-осу (y-осу)?
- За које вредности λ_1 и λ_2 је скалирање $\mathcal{H}_{Q,\lambda_1,\lambda_2}$ централна рефлексија у односу на тачку Q?
- За које вредности λ_1 и λ_2 је скалирање хомотетија?

Примери

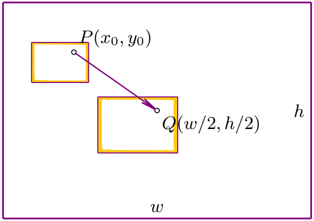
- За које вредности λ_1 и λ_2 је скалирање $\mathcal{H}_{\lambda_1,\lambda_2}$ рефлексија у односу на x-осу (y-осу)?
- За које вредности λ_1 и λ_2 је скалирање $\mathcal{H}_{Q,\lambda_1,\lambda_2}$ централна рефлексија у односу на тачку Q?
- За које вредности λ_1 и λ_2 је скалирање хомотетија?
- Да ли скалирање чува однос дужине и ширине, углове? А хомотетија?

Примери

Пример 6

Представити као афине трансформације следеће догађаје:

- „*Zoom in*": Кликом миша у тачку $P(x_0, y_0)$, слика се увећава λ пута, а тачка P постаје центар екрана резолуције $w \times h$.



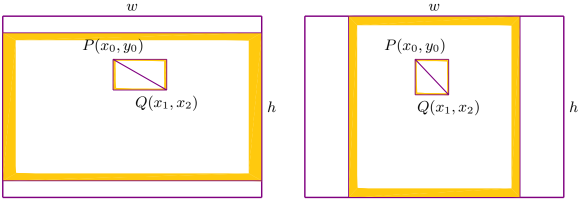
Слика 5: „*Zoom in*" алатка

Примери

Пример 6

Представити као афине трансформације следеће догађаје:

- „*Zoom to window*": Миш је притиснут у тачки $P(x_0, y_0)$, а отпуштен у тачки $Q(x_1, y_1)$. Увећати прозор са дијагоналом PQ преко целог екрана. При томе водити рачуна да се увећана слика уклопи у екран или по ширини, или по висини – у зависности од пропорција прозора. Сматрати да је екран резолуције $1920 : 1080 = 16 : 9$.



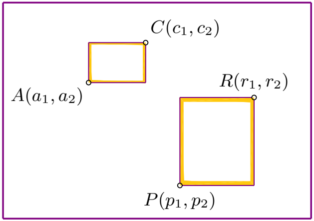
Слика 5: „*Zoom to window*" алатка

Примери

Пример 6

Представити као афине трансформације следеће догађаје:

- Пресликати прозор чије су лево-доње теме $A(a_1, a_2)$ и горње-десно теме $C(c_1, c_2)$ у прозор одређен дијагоналним теменима $P(p_1, p_2)$ и $R(r_1, r_2)$.



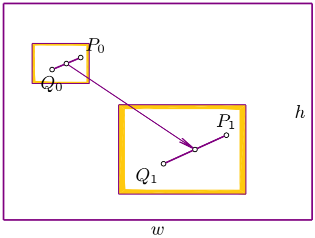
Слика 5: Прозор

Примери

Пример 6

Представити као афине трансформације следеће догађаје:

- „*Pinch to zoom*": У почетном тренутку додир једног прста је регистрован у тачки P_0 а другог у тачки Q_0. У следећем тренутку први прст се налази у тачки P_1, а други у тачки Q_1. Увећати слику за однос дужина $\lambda = P_1Q_1 : P_0Q_0$, при чему се средиште дужи P_0Q_0 пресликава у средиште дужи P_1Q_1.



Слика 5: „*Pinch to zoom*" алатка

Смицање

Смицање са коефицијентом λ у правцу x-осе:

$$\mathcal{S}_x(\lambda) : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Смицање

Смицање са коефицијентом λ у правцу x-осе:

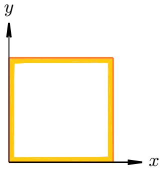
$$\mathcal{S}_x(\lambda) : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Смицање са коефицијентом λ у правцу y-осе:

$$\mathcal{S}_y(\lambda) : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Реализација ротације помоћу смицање

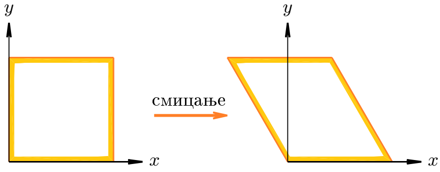
$$\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\cos\phi - 1}{\sin\phi} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sin\phi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\cos\phi - 1}{\sin\phi} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Слика 6: Реализација ротације помоћу три смицања

Реализација ротације помоћу смицање

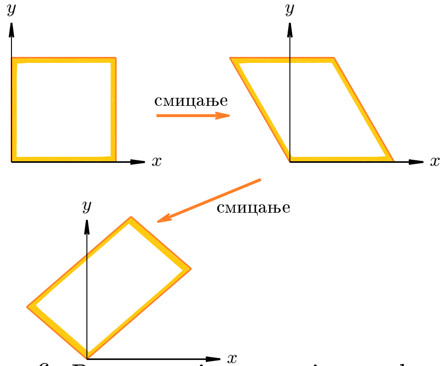
$$\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\cos\phi - 1}{\sin\phi} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sin\phi & 1 \end{pmatrix} {\color{red}\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\cos\phi - 1}{\sin\phi} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$



Слика 6: Реализација ротације помоћу три смицања

Реализација ротације помоћу смицање

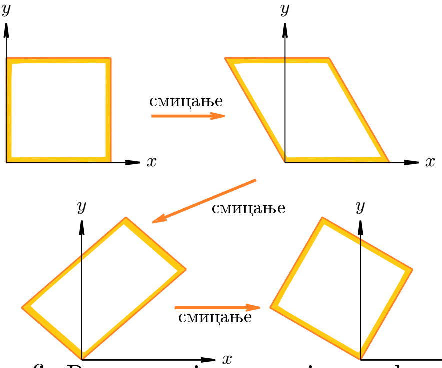
$$\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\cos\phi - 1}{\sin\phi} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sin\phi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\cos\phi - 1}{\sin\phi} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Слика 6: Реализација ротације помоћу три смицања

Реализација ротације помоћу смицање

$$\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\cos\phi - 1}{\sin\phi} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sin\phi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\cos\phi - 1}{\sin\phi} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Слика 6: Реализација ротације помоћу три смицања

Изометрије

Дефиниција 2.2

Пресликавања која чувају дужину у еуклидском простору $\mathbb{E}$ произвољне димензије називају се изометрије.

Изометрије

Дефиниција 2.2

Пресликавања која чувају дужину у еуклидском простору $\mathbb{E}$ произвољне димензије називају се изометрије.
Изометрије које чувају оријентацију зову се кретања.

Изометрије

Дефиниција 2.2

Пресликавања која чувају дужину у еуклидском простору $\mathbb{E}$ произвољне димензије називају се изометрије.
Изометрије које чувају оријентацију зову се кретања.

Теорема 2.6

Транслација, ротација око произвољне тачке и рефлексија у односу на произвољну праву су изометрије равни.

Изометрије

Дефиниција 2.2

Пресликавања која чувају дужину у еуклидском простору $\mathbb{E}$ произвољне димензије називају се изометрије.
Изометрије које чувају оријентацију зову се кретања.

Теорема 2.6

Транслација, ротација око произвољне тачке и рефлексија у односу на произвољну праву су изометрије равни.

Које трансформације равни су кретања?

Афина пресликавања простора

Тачка $M(x, y, z)$ простора се пресликава у тачку $M'(x', y', z')$ по правилу:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad \det(a_{ij}) \neq 0.$$

Афина пресликавања простора

Тачка $M(x, y, z)$ простора се пресликава у тачку $M'(x', y', z')$ по правилу:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad \det(a_{ij}) \neq 0.$$

Пресликавање се представља 4×4 матрицом:

$$A_b := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Изометрије простора

Теорема 3.1

Свака изометрија простора $\mathbb{E}^n$ је афино пресликавање.

Изометрије простора

Теорема 3.1

Свака изометрија простора $\mathbb{E}^n$ је афино пресликавање.

Теорема 3.2

Афино пресликавање f је изометрија акко $AA^T = A^T A = E$.

Изометрије простора

Теорема 3.1

Свака изометрија простора $\mathbb{E}^n$ је афино пресликавање.

Теорема 3.2

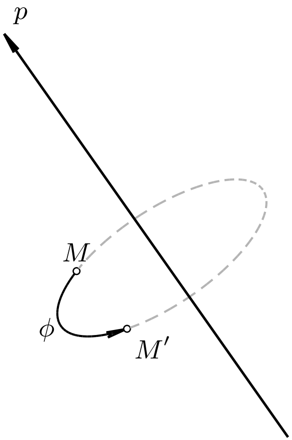
Афино пресликавање f је изометрија акко $AA^T = A^T A = E$.

Теорема 3.3 (Особине изометрија простора)

Следећа тврђења су еквивалентна за $f : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$:

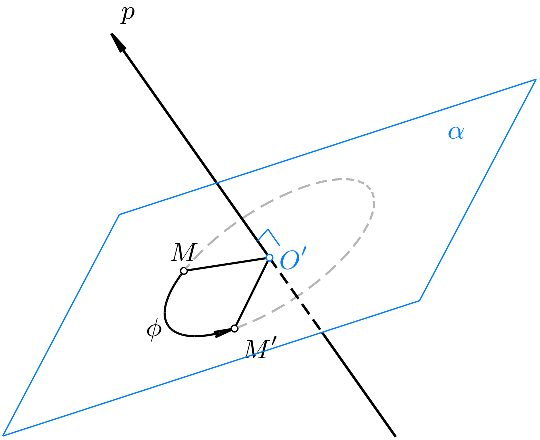
- f је изометрија (чува дужине);
- f чува скаларни производ;
- f пресликава ортонормирану базу у ортонормирану базу.

Ротације око праве у простору



Слика 7: Ротација око праве p за угао ϕ

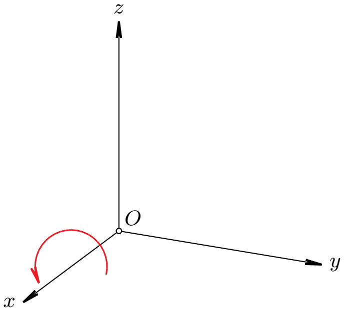
Ротације око праве у простору



Слика 7: Ротација око праве p за угао ϕ

Ротација око координатних оса

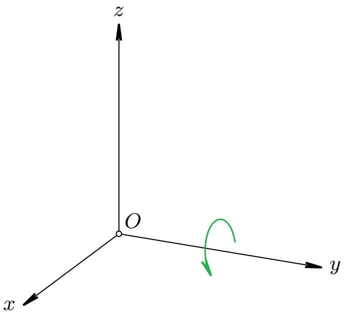
$$[\mathcal{R}_{Ox}(\phi)]_e = R_x(\phi) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$



Слика 8: Ротација око x-осе

Ротација око координатних оса

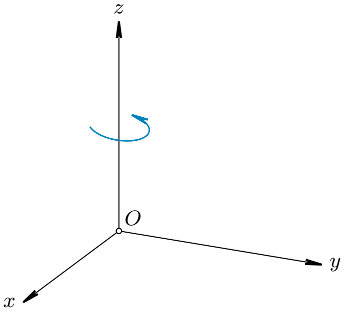
$$[\mathcal{R}_{Oy}(\theta)]_e = R_y(\theta) := \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$



Слика 8: Ротација око y-осе

Ротација око координатних оса

$$[\mathcal{R}_{Oz}(\psi)]_e = R_z(\psi) := \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Слика 8: Ротација око z-осе

Формуле ротације око праве у простору

Теорема 3.4 (Формула Родригеза)

Матрица ротације $[\mathcal{R}_p(\phi)]_e$, у стандардној бази e, за угао ϕ око праве p_0 која садржи координатни почетак је:

$$[\mathcal{R}_{p_0}(\phi)]_e = \; pp^T + \cos\phi\,(E - pp^T) + \sin\phi\, p_\times,$$

где је $p_\times$ матрица векторског множења јединичним вектором p:

$$p_\times := \begin{pmatrix} 0 & -p_3 & p_2 \\ p_3 & 0 & -p_1 \\ -p_2 & p_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ротација око произвољне праве

Ротација око произвољне праве $p \parallel p_0$, $P \in p$:

$$\mathcal{R}_p(\phi) = \mathcal{T}_{\overrightarrow{OP}} \circ \mathcal{R}_{p_0}(\phi) \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{PO}}.$$

Ротација око произвољне праве

Ротација око произвољне праве $p \parallel p_0$, $P \in p$:

$$\mathcal{R}_p(\phi) = \mathcal{T}_{\overrightarrow{OP}} \circ \mathcal{R}_{p_0}(\phi) \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{PO}}.$$

Пример 7

Одредити формуле ротације за угао $\phi = \dfrac{3\pi}{2}$ око праве p у простору која садржи тачку $Q(1,0,0)$ и има вектор правца $\overrightarrow{p} = (1,2,2)$.

Рефлексија у односу на раван

Теорема 3.5

Матрица рефлексије $[\mathcal{S}_\alpha]_e$, у стандардној бази e, у односу на раван α која садржи координатни почетак O, и чији јединични нормални вектор има колону координата p, је дата са:

$$[\mathcal{S}_\alpha]_e = E - 2pp^T.$$

Рефлексија у односу на раван

Теорема 3.5

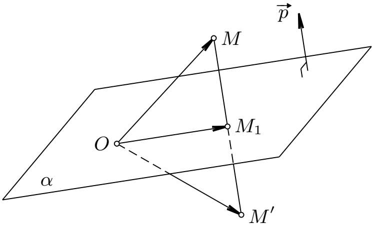
Матрица рефлексије $[\mathcal{S}_\alpha]_e$, у стандардној бази e, у односу на раван α која садржи координатни почетак O, и чији јединични нормални вектор има колону координата p, је дата са:

$$[\mathcal{S}_\alpha]_e = E - 2pp^T.$$

Ако раван $\beta \parallel \alpha$ не садржи координатни почетак, него неку тачку B, тада се рефлексија S_β представља са:

$$\mathcal{S}_\beta = \mathcal{T}_{\overrightarrow{OB}} \circ \mathcal{S}_\alpha \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{BO}}.$$

Примери



Слика 9: Рефлексија у односу на раван кроз O

Пример 8

Одредити формуле рефлексије у односу на раван
$\alpha : 2x - y + 2z = 0.$

Ојлерове теореме

Теорема 3.6 (I Ојлерова)

Свако кретање f простора $\mathbb{E}^3$ које има фиксну неку тачку O' је ротација око неке оријентисане праве p која садржи O', за угао $\phi \in [0, 2\pi)$.

Ојлерове теореме

Теорема 3.6 (I Ојлерова)

Свако кретање f простора $\mathbb{E}^3$ које има фиксну неку тачку O' је ротација око неке оријентисане праве p која садржи O', за угао $\phi \in [0, 2\pi)$.

Теорема 3.7 (II Ојлерова)

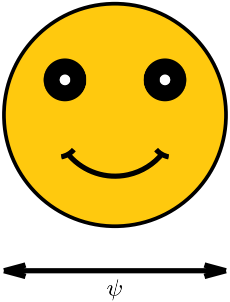
Свако кретање f простора $\mathbb{E}^3$ које чува координатни почетак може се представити као композиција три сопствене ротације око координатних оса:

$$f = \mathcal{R}_{Ox_2}(\phi) \circ \mathcal{R}_{Oy_1}(\theta) \circ \mathcal{R}_{Oz}(\psi),$$

где су $\psi, \phi \in [0, 2\pi), \theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, тзв. Ојлерови или Тејт-Брајанови углови.

Ојлерови углови

ψ – угао скретања (енг. yaw)

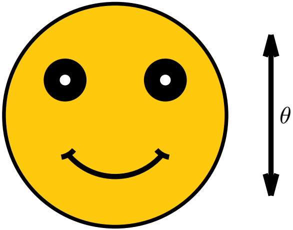


Слика 10: Скретање

Ојлерови углови

ψ – угао скретања (енг. yaw)

θ – угао пропињања (енг. pitch)



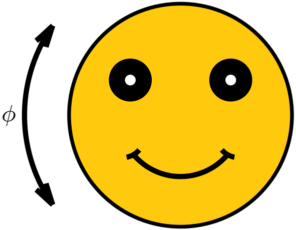
Слика 10: Пропињање

Ојлерови углови

ψ – угао скретања (енг. yaw)

θ – угао пропињања (енг. pitch)

ϕ – угао ваљања (енг. roll)



Слика 10: Ваљање

Веза сопствених и светских ротација

Анимација: Ојлерови углови

Веза сопствених и светских ротација

Анимација: Ојлерови углови

Пажња!!!
У II Ојлеровој теореми ротације се изводе у сопственом координатном систему (везаном за објекат).

Веза сопствених и светских ротација

Анимација: Ојлерови углови

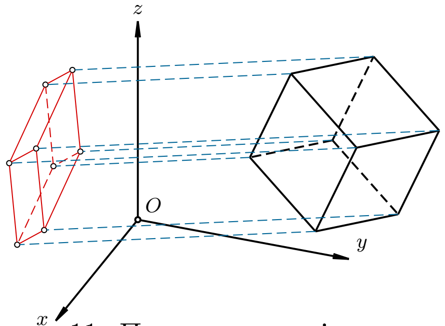
Пажња!!!
У II Ојлеровој теореми ротације се изводе у сопственом координатном систему (везаном за објекат).

Теорема 3.8 (Веза сопствених и светских ротација)

$$[\mathcal{R}_{Ox_2}(\phi) \circ \mathcal{R}_{Oy_1}(\theta) \circ \mathcal{R}_{Oz}(\psi)]_e = [f]_e = R_z(\psi) R_y(\theta) R_x(\phi).$$

Пројектовање

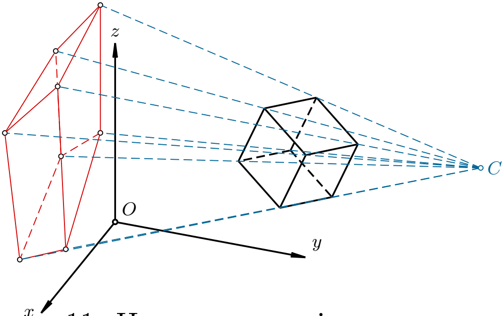
- $f: \mathbb{E}^3 \longrightarrow \mathbb{E}^2$
  - паралелно пројектовање (специјално: ортогонална пројекција)



Слика 11: Паралелно пројектовање

Пројектовање

- $f: \mathbb{E}^3 \longrightarrow \mathbb{E}^2$
  - паралелно пројектовање (специјално: ортогонална пројекција)
  - централно пројектовање



Слика 11: Централно пројектовање

Пројектовање

- $f: \mathbb{E}^3 \longrightarrow \mathbb{E}^2$
    - паралелно пројектовање (специјално: ортогонална пројекција)
    - централно пројектовање

Пројектовање

- $f: \mathbb{E}^3 \longrightarrow \mathbb{E}^2$
  - паралелно пројектовање (специјално: ортогонална пројекција)
  - централно пројектовање

- Да ли је f бијекција?

Пројектовање

- $f: \ \mathbb{E}^3 \longrightarrow \mathbb{E}^2$
  - паралелно пројектовање (специјално: ортогонална пројекција)
  - централно пројектовање

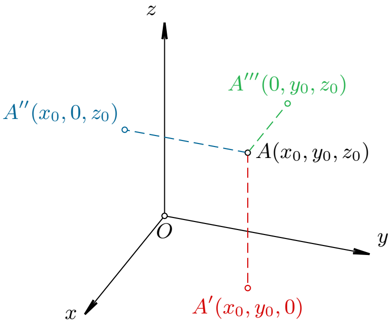
- Да ли је f бијекција?
- Да ли је f изометрија?

Пројектовање

- $f: \mathbb{E}^3 \longrightarrow \mathbb{E}^2$
  - паралелно пројектовање (специјално: ортогонална пројекција)
  - централно пројектовање

- Да ли је f бијекција?
- Да ли је f изометрија?
- Да ли f чува колинеарност, паралелност, углове, средиште дужи?

Ортогонална пројекција на координатне равни

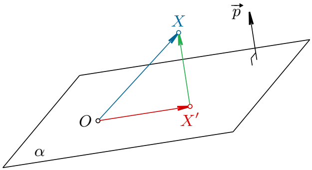


Слика 12: Ортогонална пројекција

Пример 9

Одредити ортогоналну пројекцију квадрата $ABCD$, $A(1, 2, -1)$, $B(-1, 0, 2)$, $D(3, 1, 1)$, на xy-раван.

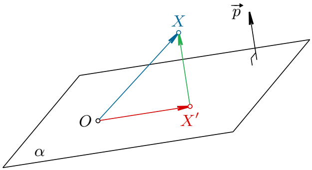
Ортогонална пројекција на произвољну раван



Слика 13: Ортогонална пројекција

$$X' = (E - pp^T)X, \quad p = [\vec{p}], \ \vec{p} - \text{јединични}$$

Ортогонална пројекција на произвољну раван



Слика 13: Ортогонална пројекција

$$X' = (E - pp^T)X, \quad p = [\vec{p}], \ \vec{p} \text{ – јединични}$$

Пример 10

Одредити ортогоналну пројекцију квадрата из Примера 9 на раван $\alpha : 3y - z = 0$.

Пројекција сфере на раван

- Шта све може бити ортогонална пројекција сфере на раван?

Пројекција сфере на раван

- Шта све може бити ортогонална пројекција сфере на раван?
- Шта све може бити централна пројекција сфере на раван?

Пројекција сфере на раван

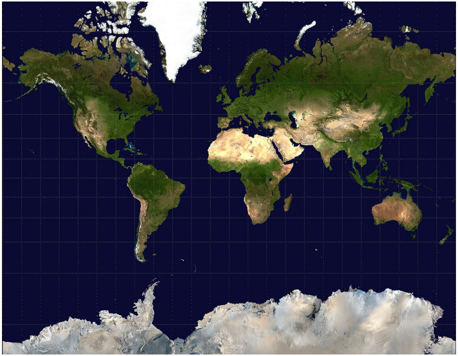
- Шта све може бити ортогонална пројекција сфере на раван?
- Шта све може бити централна пројекција сфере на раван?
- Картографске пројекције:

Пројекција сфере на раван

- Шта све може бити ортогонална пројекција сфере на раван?
- Шта све може бити централна пројекција сфере на раван?

- Картографске пројекције:
  - конформне (чувају углове)
  - еквивалентне (чувају однос површина)
  - еквидистантне (чувају растојања)

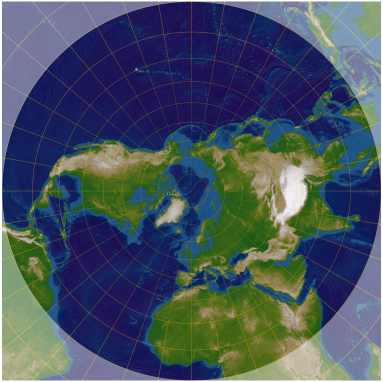
Конформне пројекције



Слика: Меркаторова пројекција

извор слика: Wikipedia

Конформне пројекције



Слика: Стереографска пројекција

извор слика: Wikipedia

Конформне пројекције

Слика: Ламбертова пројекција (конусна)

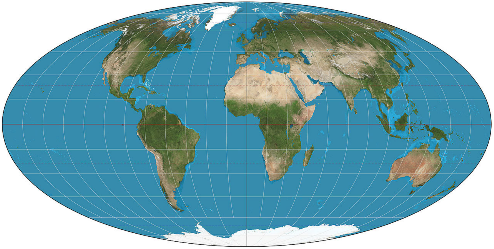
извор слика: Wikipedia

Еквивалентне пројекције

Слика: Бонеова пројекција

извор слика: Wikipedia

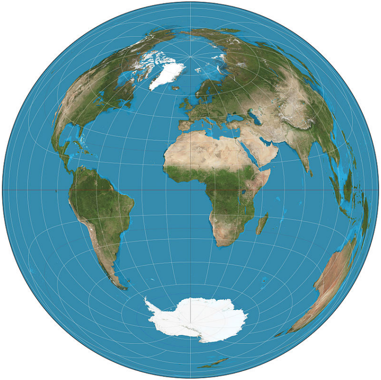
Еквивалентне пројекције



Слика: Молвеиде пројекција

извор слика: Wikipedia

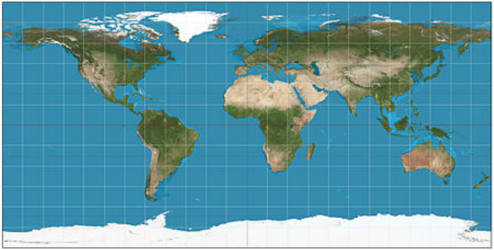
Еквивалентне пројекције



Слика: Ламбертова пројекција (азимутална)

извор слика: Wikipedia

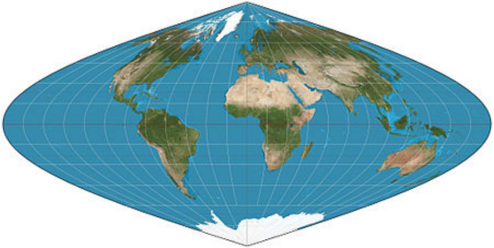
Еквидистантне пројекције



Слика: Географска пројекција (чува растојања дуж меридијана)

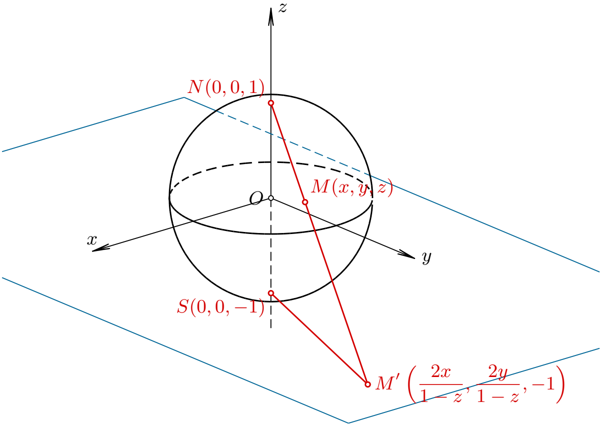
извор слика: Wikipedia

Еквидистантне пројекције



Слика: Синусоидална пројекција (чува растојања дуж паралела)

Стереографска пројекција



Слика 17: Стереографска пројекција са северног пола на раван $z = -1$

Особине стереографске пројекције

- Шта је слика круга који припада сфери, а садржи северни пол?
- Специјално, у шта се сликају паралеле?
- Шта је слика меридијана?
- Да ли се чувају углови?
- Да ли се чува однос површина?
- Да ли се чувају растојања дуж меридијана? А дуж паралела?

Хомогоене координате равни

Дефиниција 5.1

Хомогене координате тачке $M(x, y)$ афине равни $\mathbb{R}^2$ су било која уређена тројка $(x_1 : x_2 : x_3)$ таква да важи:

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \ \ y = \frac{x_2}{x_3}, \ \ x_3 \neq 0.$$

Хомогоене координате равни

Дефиниција 5.1

Хомогене координате тачке $M(x, y)$ афине равни $\mathbb{R}^2$ су било која уређена тројка $(x_1 : x_2 : x_3)$ таква да важи:

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}, \quad x_3 \neq 0.$$

Пример 11

Одредити хомогене координате тачке чије су афине координате $(1, -2)$.

Хомогоене координате равни

Дефиниција 5.1

Хомогене координате тачке $M(x, y)$ афине равни $\mathbb{R}^2$ су било која уређена тројка $(x_1 : x_2 : x_3)$ таква да важи:

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}, \quad x_3 \neq 0.$$

Пример 11

Одредити хомогене координате тачке чије су афине координате $(1, -2)$.

Пример 12

Одредити афине координате тачака $A(1 : 2 : 2)$ и $B(3 : 2 : 0)$.

Хомогоене координате равни

Дефиниција 5.2

Хомогене координате тачке $M(x, y)$ афине равни $\mathbb{R}^2$ су било која уређена тројка $(x_1 : x_2 : x_3)$ таква да важи:

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}, \quad x_3 \neq 0.$$

Хомогоене координате равни

Дефиниција 5.2

Хомогене координате тачке $M(x, y)$ афине равни $\mathbb{R}^2$ су било која уређена тројка $(x_1 : x_2 : x_3)$ таква да важи:

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \ \ y = \frac{x_2}{x_3}, \ \ x_3 \neq 0.$$

- бесконачно далека тачка $P_\infty(x_1 : x_2 : 0), \ x_1^2 + x_2^2 \neq 0$

Хомогоене координате равни

Дефиниција 5.2

Хомогене координате тачке $M(x,y)$ афине равни $\mathbb{R}^2$ су било која уређена тројка $(x_1 : x_2 : x_3)$ таква да важи:

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \;\; y = \frac{x_2}{x_3}, \;\; x_3 \neq 0.$$

- бесконачно далека тачка $P_\infty(x_1 : x_2 : 0), \;\; x_1^2 + x_2^2 \neq 0$
- бесконачно далека права $u_\infty : \; x_3 = 0$

Хомогоене координате равни

Дефиниција 5.2

Хомогене координате тачке $M(x, y)$ афине равни $\mathbb{R}^2$ су било која уређена тројка $(x_1 : x_2 : x_3)$ таква да важи:

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}, \quad x_3 \neq 0.$$

- бесконачно далека тачка $P_\infty(x_1 : x_2 : 0), \ x_1^2 + x_2^2 \neq 0$
- бесконачно далека права $u_\infty : \ x_3 = 0$
- допуњена афина раван $\bar{\mathbb{R}}^2 = \mathbb{R}^2 \cup u_\infty$

Пресек правих

Пример 13

Одредити пресек правих $q : 2x - 5y + 6 = 0$,
$r : 2x - 5y + 7 = 0$ у:
(а) Афиној равни; (б) Допуњеној афиној равни.

Пресек правих

Пример 13

Одредити пресек правих $q : 2x - 5y + 6 = 0$,
$r : 2x - 5y + 7 = 0$ у:
(а) Афиној равни; (б) Допуњеној афиној равни.

Теорема 5.1

Паралелене праве допуњене афине равни се секу у бесконачно далекој тачки.
Дакле, сваке две праве у допуњеној афиној равни се секу!

Реална пројективна раван

Дефиниција 5.3

Реална пројективна раван је скуп хомогених координата:

$$\mathbb{R}P^2 := \{\,(x_1 : x_2 : x_3)|\, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\},$$

при чему не могу све три координате истовремено бити једнаке нули.

Реална пројективна раван

Дефиниција 5.3

Реална пројективна раван је скуп хомогених координата:

$$\mathbb{R}P^2 := \{ (x_1 : x_2 : x_3) | \, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \},$$

при чему не могу све три координате истовремено бити једнаке нули.

Пример 14

Одредити једначину праве $\bar{q}$ кроз тачке $A(1:2:3)$, $B(-2:1:0)$.

Пројективна пресликавања равни

Дефиниција 5.4

Пројективно пресликавање пројективне равни је пресликавање које тачку $M(x_1 : x_2 : x_3)$ слика у тачку $M'(x'_1 : x'_2 : x'_3)$, и дато је формулама:

$$\lambda \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \det(p_{ij}) \neq 0, \lambda \neq 0,$$

или краће $\lambda x' = Px, \; P = (p_{ij})$.

Особине пројективних пресликавања

- Матрице P и λP представљају исто пресликавање.
- Композицији пресликавања одговара множење матрица, а инверзном пресликавању одговара инверзна матрица.
- Пројективно пресликавање слика чува колинеарност тачака, тј. слика праве у праве.
- Специјално, за

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

добијамо афина пресликавања.

Особине пројективних пресликавања

Теорема 5.2 (Основна теорема пројективне геометрије)

Постоји јединствено пројективно пресликавање пројективне равни $\mathbb{R}P^2$ које четири тачке A,B,C,D у општем положају слика редом у тачке A', B', C', D', у општем положају.

Особине пројективних пресликавања

Теорема 5.2 (Основна теорема пројективне геометрије)

Постоји јединствено пројективно пресликавање пројективне равни $\mathbb{R}P^2$ које четири тачке A,B,C,D у општем положају слика редом у тачке A', B', C', D', у општем положају.

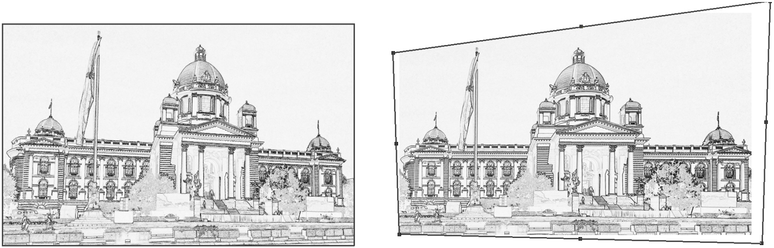
Пример 15

Одредити пројективно пресликавање равни које тачке $A_0(1:0:0)$,$B_0(0:1:0)$,$C_0(0:0:1)$,$D_0(1:1:1)$ слика у $A(1:2:3)$, $B(3:2:1)$, $C(0:1:1)$, $D(7:11:10)$.

Пример 16

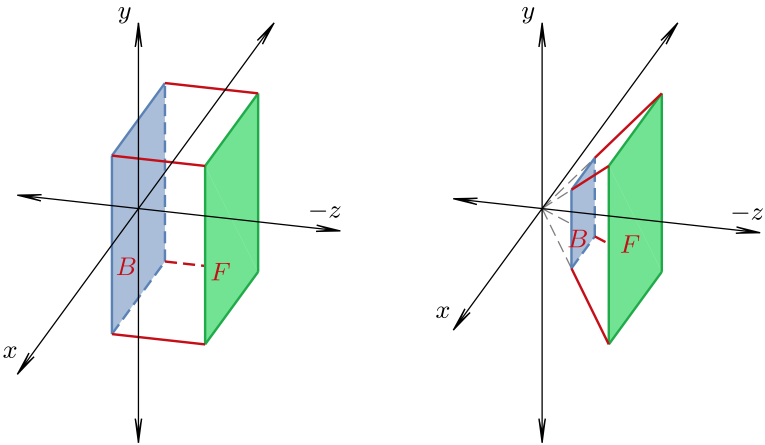
Одредити пројективно пресликавање које трапез $ABCD$, $A(-2,0)$, $B(2,0)$, $C(1,2)$, $D(-1,2)$ пресликава у правоугаоник $A'B'C'D'$, $A'(-1,0)$, $B'(1,0)$, $C'(1,1)$, $D'(-1,1)$.

Примене пројективних пресликавања



Слика: Исправљање пројективне дисторзије

Примене пројективних пресликавања



Слика 19: Канонска запремина погледа за паралелно (лево) и перспективно (десно) пројектовање