УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Геометрија И–смер

део 1: Вектори и трансформације координата

Тијана Шукиловић

11. oktobar 2016

Дефиниција вектора

Дефиниција 1.1

Вектор је класа еквиваленције усмерених дужи које имају исти

Дефиниција вектора

Дефиниција 1.1

Вектор је класа еквиваленције усмерених дужи које имају исти правац,

Дефиниција вектора

Дефиниција 1.1

Вектор је класа еквиваленције усмерених дужи које имају исти правац, смер

Дефиниција вектора

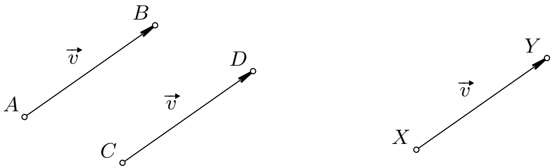
Дефиниција 1.1

Вектор је класа еквиваленције усмерених дужи које имају исти правац, смер и интентзитет.

Дефиниција вектора

Дефиниција 1.1

Вектор је класа еквиваленције усмерених дужи које имају исти правац, смер и интентзитет.



Слика 1: Еквивалентне усмерене дужи

Основни појмови и ознаке

- примери векторских величина: брзина, убрзање, сила, момент силе...

Основни појмови и ознаке

- примери векторских величина: брзина, убрзање, сила, момент силе...
- вектор представник

Основни појмови и ознаке

- примери векторских величина: брзина, убрзање, сила, момент силе...
- вектор представник
- нула вектор $\vec{0}$

Основни појмови и ознаке

- примери векторских величина: брзина, убрзање, сила, момент силе...

- вектор представник
- нула вектор $\vec{0}$
- супротан вектор

Основни појмови и ознаке

- примери векторских величина: брзина, убрзање, сила, момент силе...

- вектор представник
- нула вектор $\vec{0}$
- супротан вектор
- колинеарни вектори

Основни појмови и ознаке

- примери векторских величина: брзина, убрзање, сила, момент силе...

- вектор представник
- нула вектор $\vec{0}$
- супротан вектор
- колинеарни вектори
- копланарни вектори

Основни појмови и ознаке

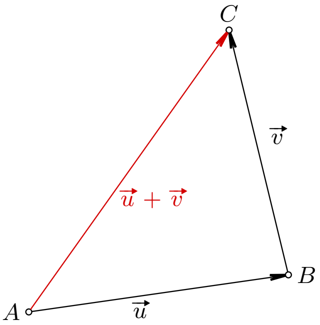
- примери векторских величина: брзина, убрзање, сила, момент силе...

- вектор представник
- нула вектор $\vec{0}$
- супротан вектор
- колинеарни вектори
- копланарни вектори
- скуп свих вектора $\mathbb{V}$, односно $\mathbb{V}^n$

Операције са векторима

Дефиниција 1.2 (Сабирање вектора)

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB}, \vec{v} = \overrightarrow{BC} : \quad \vec{u} + \vec{v} := \overrightarrow{AC}.$$

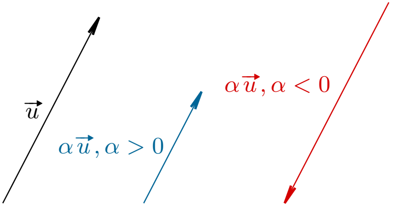


Слика 2: Сабирање вектора

Операције са векторима

Дефиниција 1.3 (Множење вектора скаларом)

$$\vec{u} \in \mathbb{V},\ \alpha \in \mathbb{R} \backslash \{0\}: \quad \alpha\,\vec{u} := \vec{v}.$$

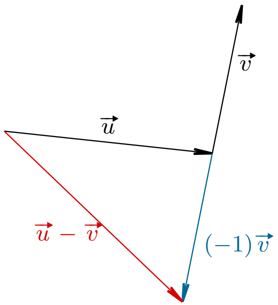


Слика 3: Множење вектора скаларом

Операције са векторима

Дефиниција 1.4 (Разлика вектора)

$$\vec{u} - \vec{v} := \vec{u} + (-1)\vec{v}.$$



Слика 4: Разлика вектора

Операције са векторима

Дефиниција 1.5 (Линеарна комбинација вектора)

$$\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_k} \in \mathbb{V},\ \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}: \quad \overrightarrow{v} := \alpha_1 \overrightarrow{v_1} + \ldots + \alpha_k \overrightarrow{v_k}.$$

Операције са векторима

Дефиниција 1.5 (Линеарна комбинација вектора)

$$\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_k} \in \mathbb{V},\ \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}: \quad \vec{v} := \alpha_1 \vec{v_1} + \ldots + \alpha_k \vec{v_k}.$$

Дефиниција 1.6 (Јединични вектор)

$$\vec{u} \in \mathbb{V},\ |\vec{u}| \neq 0: \quad \vec{v} := \frac{1}{|\vec{u}|} \vec{u}.$$

Векторски простор

Теорема 1.1

Ако су $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \in \mathbb{V}$, а $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ тада важи:

(C1) $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w},$ асоцијативност сабирања

Векторски простор

Теорема 1.1

Ако су $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \in \mathbb{V}$, а $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ тада важи:

(C1) $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$, асоцијативност сабирања

(C2) $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u} = \vec{0} + \vec{u}$, неутрални елемент

Векторски простор

Теорема 1.1

Ако су $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \in \mathbb{V}$, а $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ тада важи:

(C1) $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$, асоцијативност сабирања

(C2) $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u} = \vec{0} + \vec{u}$, неутрални елемент

(C3) $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$, супротни елемент

Векторски простор

Теорема 1.1

Ако су $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \in \mathbb{V}$, а $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ тада важи:

(C1) $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$, асоцијативност сабирања

(C2) $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u} = \vec{0} + \vec{u}$, неутрални елемент

(C3) $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$, супротни елемент

(C4) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$, комутативност

Векторски простор

Теорема 1.1

Ако су $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \in \mathbb{V}$, а $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ тада важи:

(C1) $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$, асоцијативност сабирања

(C2) $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u} = \vec{0} + \vec{u}$, неутрални елемент

(C3) $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$, супротни елемент

(C4) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$, комутативност

(M1) $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$, дистрибутивност сабирања вектора

Векторски простор

Теорема 1.1

Ако су $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \in \mathbb{V}$, а $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ тада важи:

(C1) $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$, асоцијативност сабирања

(C2) $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u} = \vec{0} + \vec{u}$, неутрални елемент

(C3) $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$, супротни елемент

(C4) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$, комутативност

(M1) $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$, дистрибутивност сабирања вектора

(M2) $\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u}$, асоцијативност скаларног множења

Векторски простор

Теорема 1.1

Ако су $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \in \mathbb{V}$, а $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ тада важи:

(С1) $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$, асоцијативност сабирања

(С2) $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u} = \vec{0} + \vec{u}$, неутрални елемент

(С3) $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$, супротни елемент

(С4) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$, комутативност

(М1) $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$, дистрибутивност сабирања вектора

(М2) $\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u}$, асоцијативност скаларног множења

(М3) $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$, дистрибутивност сабирања скалара

Векторски простор

Теорема 1.1

Ако су $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \in \mathbb{V}$, а $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ тада важи:

(C1) $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$, асоцијативност сабирања

(C2) $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u} = \vec{0} + \vec{u}$, неутрални елемент

(C3) $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$, супротни елемент

(C4) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$, комутативност

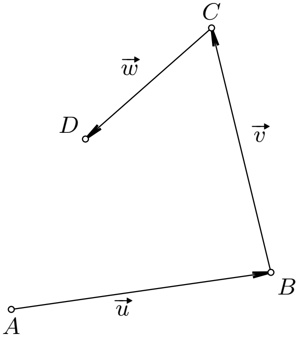
(M1) $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$, дистрибутивност сабирања вектора

(M2) $\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u}$, асоцијативност скаларног множења

(M3) $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$, дистрибутивност сабирања скалара

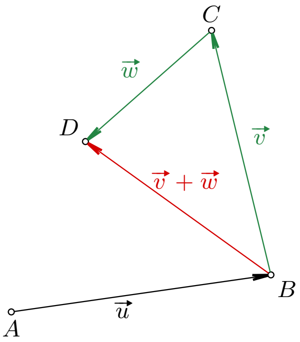
(M4) $1\vec{u} = \vec{u}$. јединични елемент

Доказ (C1)



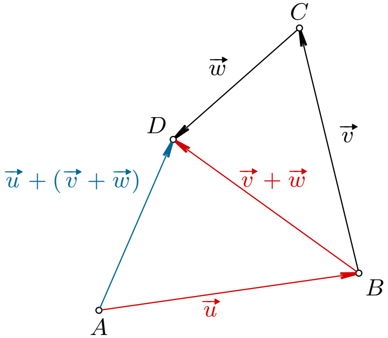
Слика 5: Асоцијативност сабирања вектора

Доказ (С1)



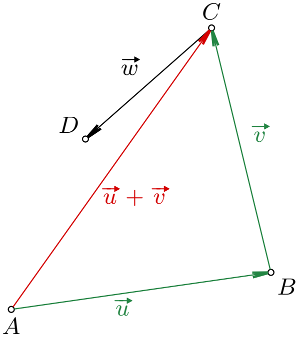
Слика 5: Асоцијативност сабирања вектора

Доказ (C1)



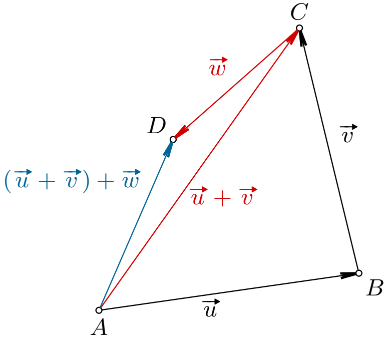
Слика 5: Асоцијативност сабирања вектора

Доказ (C1)



Слика 5: Асоцијативност сабирања вектора

Доказ (C1)



Слика 5: Асоцијативност сабирања вектора

Линеарна зависност и независност вектора

Дефиниција 1.7

Вектори $\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_n}$ су линеарно независни ако релација:

$$\alpha_1 \overrightarrow{v_1} + \cdots + \alpha_n \overrightarrow{v_n} = \overrightarrow{0}$$

важи само за $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Линеарна зависност и независност вектора

Дефиниција 1.7

Вектори $\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n}$ су линеарно независни ако релација:

$$\alpha_1 \vec{v_1} + \cdots + \alpha_n \vec{v_n} = \vec{0}$$

важи само за $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$.
У супротном, ако постоји и n-торка $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ у којој је бар један од бројева α_i различит од нуле, вектори се називају линеарно зависним.

Линеарна зависност и независност вектора

Теорема 1.2

Ненула вектори $\vec{u}$ и $\vec{v}$ су линеарно зависни ако и само ако су колинеарни.

Линеарна зависност и независност вектора

Теорема 1.2

Ненула вектори $\vec{u}$ и $\vec{v}$ су линеарно зависни ако и само ако су колинеарни.

Теорема 1.3

У равни постоје два линеарно независна вектора, а свака три вектора равни су линеарно зависна.

Линеарна зависност и независност вектора

Теорема 1.2

Ненула вектори $\vec{u}$ и $\vec{v}$ су линеарно зависни ако и само ако су колинеарни.

Теорема 1.3

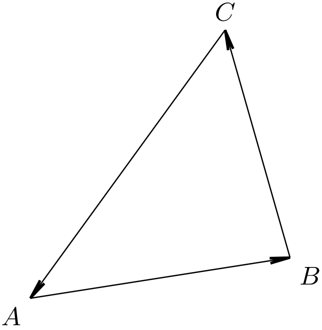
У равни постоје два линеарно независна вектора, а свака три вектора равни су линеарно зависна.

Теорема 1.4

У простору постоје три линеарно независна вектора, а свака четири вектора су линеарно зависна.

Примери

Пример 1

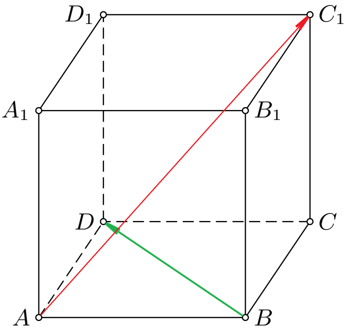


$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$$

Слика 6: Вектори одређени страницама троугла су линеарно зависни

Примери

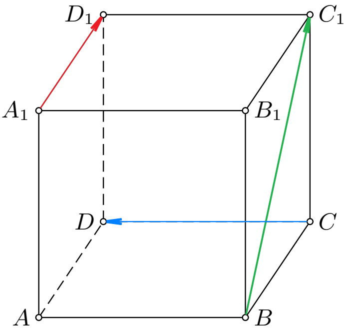
Пример 2



Слика 7: Да ли су вектори $\overrightarrow{AC_1}$ и $\overrightarrow{BD}$ колинеарни?

Примери

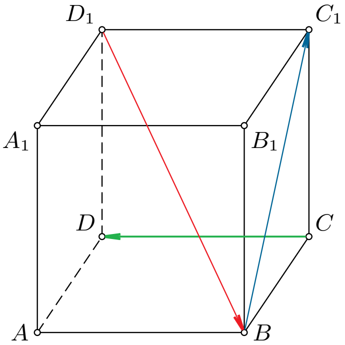
Пример 2



Слика 7: Да ли су вектори $\overrightarrow{BC_1}$, $\overrightarrow{A_1D_1}$ и $\overrightarrow{CD}$ копланарни?

Примери

Пример 2



Слика 7: Да ли су вектори $\overrightarrow{BC_1}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{D_1B}$ копланарни?

База и димензија векторског простора

- База векторског простора = максималан скуп линеарно независних вектора.

База и димензија векторског простора

- База векторског простора = максималан скуп линеарно независних вектора.
- Димензија векторског простора = број елемената базе.

База и димензија векторског простора

- База векторског простора = максималан скуп линеарно независних вектора.
- Димензија векторског простора = број елемената базе.

Последица 2.1

Димензија векторског простора вектора равни $\mathbb{V}^2$ је два.

База и димензија векторског простора

- База векторског простора = максималан скуп линеарно независних вектора.
- Димензија векторског простора = број елемената базе.

Последица 2.1

Димензија векторског простора вектора равни $\mathbb{V}^2$ је два. Сваки вектор $\vec{v} \in \mathbb{V}^2$ може да се напише у облику:

$$\vec{v} = x_1 \vec{e_1} + x_2 \vec{e_2}, \tag{1}$$

где је $e = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$ база векторског простора $\mathbb{V}^2$.

База и димензија векторског простора

- База векторског простора = максималан скуп линеарно независних вектора.
- Димензија векторског простора = број елемената базе.

Последица 2.1

Димензија векторског простора вектора равни $\mathbb{V}^2$ је два. Сваки вектор $\vec{v} \in \mathbb{V}^2$ може да се напише у облику:

$$\vec{v} = x_1 \vec{e_1} + x_2 \vec{e_2}, \tag{1}$$

где је $e = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$ база векторског простора $\mathbb{V}^2$. Последица линеарне независности вектора базе је да су бројеви $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ јединствени.

Координате вектора

- База $e = (e_1, e_2)$ векторског простора $\mathbb{V}^2$.
- Координате вектора $\overrightarrow{v} \in \mathbb{V}^2$ у бази e:

$$[\overrightarrow{v}]_e = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Координате вектора

- База $e = (e_1, e_2)$ векторског простора $\mathbb{V}^2$.
- Координате вектора $\vec{v} \in \mathbb{V}^2$ у бази e:

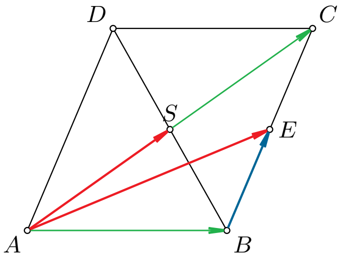
$$[\vec{v}]_e = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

- Лако се уопштава на произвољну димензију.

Пример

Пример 3

Дат је паралелограм $ABCD$. Нека је E средиште странице BC и S пресек дијагонала AC и BD. Одредити координате вектора $\overrightarrow{BC}$ у бази $e = \left(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AS}\right)$.



Слика 8: $\left[\overrightarrow{BE}\right]_e = (-1, 2)^T$

Координате тачке

- База $e = (e_1, \dots, e_n)$ векторског простора $\mathbb{V}$.
- Фиксирана тачка $O \in \mathbb{E}$ назива се координатни почетак.
- O_e се назива координатним системом или репером простора $\mathbb{E}$.

Координате тачке

- База $e = (e_1, \dots, e_n)$ векторског простора $\mathbb{V}$.
- Фиксирана тачка $O \in \mathbb{E}$ назива се координатни почетак.
- O_e се назива координатним системом или репером простора $\mathbb{E}$.

Дефиниција 2.1

Координате тачке $X \in \mathbb{E}$ у реперу Oe дефинишемо као координате вектора $\overrightarrow{OX}$ у бази e:

$$[X]_{Oe} := [\overrightarrow{OX}]_e. \tag{2}$$

Веза координата вектора и тачака

У пракси се често користи чињеница да се координате вектора $\overrightarrow{MN}$ добијају „одузимањем координате тачке M од координата тачке N.”

Веза координата вектора и тачака

У пракси се често користи чињеница да се координате вектора $\overrightarrow{MN}$ добијају „одузимањем координате тачке M од координата тачке N."

Коректност:

$$\begin{aligned}[\overrightarrow{MN}]_e &= [\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON}]_e \\ &= [\overrightarrow{ON}]_e - [\overrightarrow{OM}]_e \\ &= [N]_{Oe} - [M]_{Oe}.\end{aligned}$$

Веза координата вектора и тачака

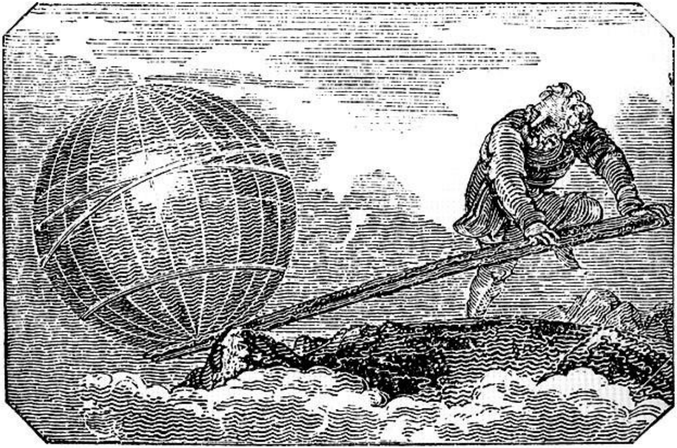
У пракси се често користи чињеница да се координате вектора $\overrightarrow{MN}$ добијају „одузимањем координате тачке M од координата тачке N."
Коректност:

$$\begin{aligned}[\overrightarrow{MN}]_e &= [\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON}]_e\\ &= [\overrightarrow{ON}]_e - [\overrightarrow{OM}]_e\\ &= [N]_{Oe} - [M]_{Oe}.\end{aligned}$$

Пример 4

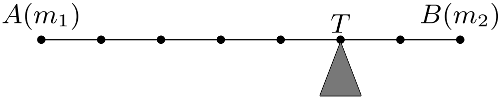
Одредити координате темена паралелограма из Примера 3 у реперу Ae.

Архимедов закон полуге



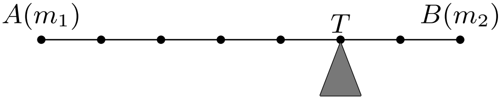
Центар маса тачака

$$|AT| : |TB| = m_2 : m_1 \quad \Longleftrightarrow \quad m_1\overrightarrow{TA} + m_2\overrightarrow{TB} = \vec{0}$$



Центар маса тачака

$$|AT| : |TB| = m_2 : m_1 \quad \Longleftrightarrow \quad m_1\overrightarrow{TA} + m_2\overrightarrow{TB} = \vec{0}$$



O – произвољна тачка

Центар маса тачака $A(m_1)$ и $B(m_2)$:

$$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{m_1 + m_2}\left(m_1\overrightarrow{OA} + m_2\overrightarrow{OB}\right)$$

Тежиште и центар масе троугла

- $A(m_1), B(m_2), C(m_3)$

Тежиште и центар масе троугла

- $A(m_1), B(m_2), C(m_3)$
- A_1 – центар маса тачака B, C:
  AA_1 – тежишна дуж (из A)

Тежиште и центар масе троугла

- $A(m_1), B(m_2), C(m_3)$
- A_1 – центар маса тачака B, C:
  AA_1 – тежишна дуж (из A)
- T – центар маса тачака A, B, C:

$$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{m_1 + m_2 + m_3}\left(m_1\overrightarrow{OA} + m_2\overrightarrow{OB} + m_3\overrightarrow{OC}\right)$$

Тежиште и центар масе троугла

- $A(m_1), B(m_2), C(m_3)$
- A_1 – центар маса тачака B, C:
  AA_1 – тежишна дуж (из A)
- T – центар маса тачака A, B, C:

$$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{m_1 + m_2 + m_3}\left(m_1\overrightarrow{OA} + m_2\overrightarrow{OB} + m_3\overrightarrow{OC}\right)$$

Теорема 3.1

Тежишне дужи се секу у центру маса.

Тежиште и центар масе троугла

- $A(m_1), B(m_2), C(m_3)$
- A_1 – центар маса тачака B, C:
  AA_1 – тежишна дуж (из A)
- T – центар маса тачака A, B, C:

$$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{m_1 + m_2 + m_3}\left(m_1\overrightarrow{OA} + m_2\overrightarrow{OB} + m_3\overrightarrow{OC}\right)$$

Теорема 3.1

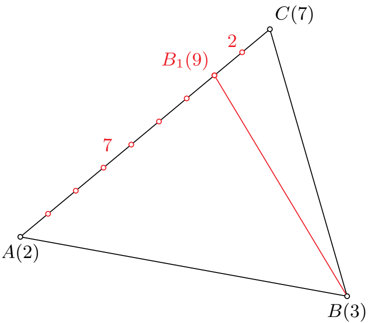
Тежишне дужи се секу у центру маса.

За $m_1 = m_2 = m_3 = m$: центар маса = тежиште троугла!

Примери

Пример 5

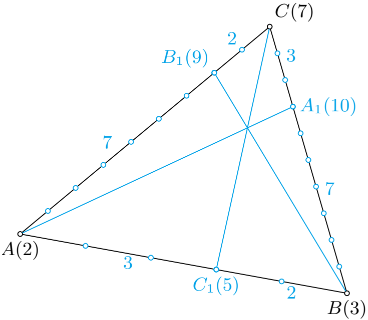
Дате су тачке са масама $A(2), B(3), C(7)$. Одредити у ком односу центар масе дели тежишне дужи $\triangle ABC$.



Примери

Пример 5

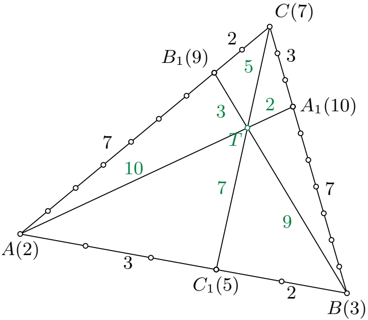
Дате су тачке са масама $A(2), B(3), C(7)$. Одредити у ком односу центар масе дели тежишне дужи $\triangle ABC$.



Примери

Пример 5

Дате су тачке са масама $A(2), B(3), C(7)$. Одредити у ком односу центар масе дели тежишне дужи $\triangle ABC$.



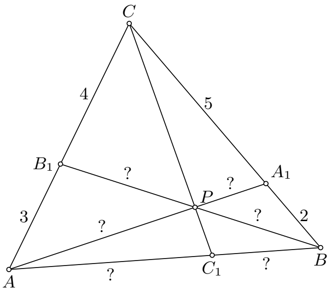
Примери

Пример 6

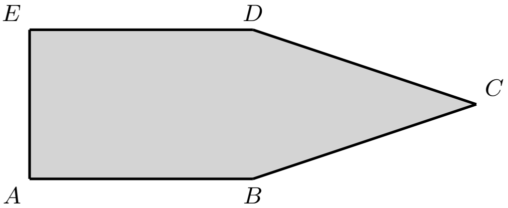
Дат је $\triangle ABC$ и на његовим ивицама тачке A_1 и B_1 такве да $|AB_1| : |B_1C| = 3 : 4$, $|BA_1| : |A_1C| = 2 : 5$.

а) Ако је $\{P\} = AA_1 \cap BB_1$, у ком односу P дели AA_1 и BB_1?

б) Ако је $\{C_1\} = CP \cap AB$, у ком односу C_1 дели AB?

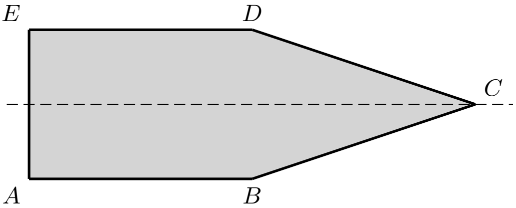


Центар масе произвољног објекта



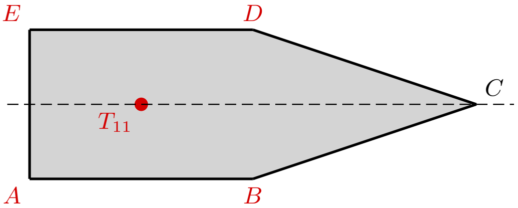
Слика 9: Петоугао $ABCDE$

Центар масе произвољног објекта



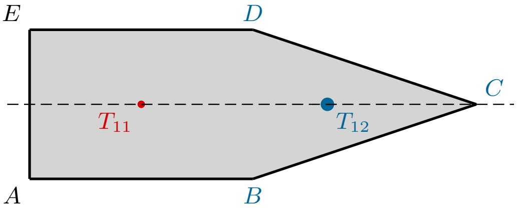
Слика 9: Центар масе лежи на оси симетрије

Центар масе произвољног објекта



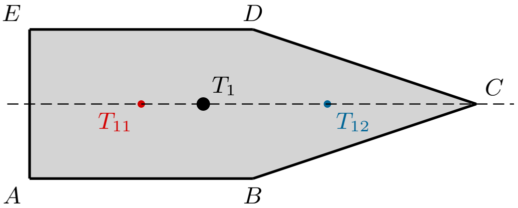
Слика 9: Центар масе T_{11} четвороугла $ABDE$

Центар масе произвољног објекта



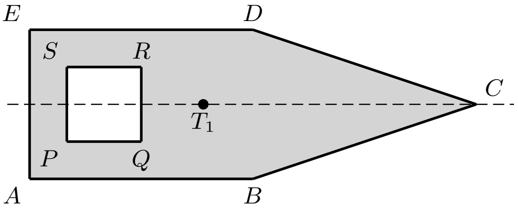
Слика 9: Центар масе T_{12} троугла BCD

Центар масе произвољног објекта



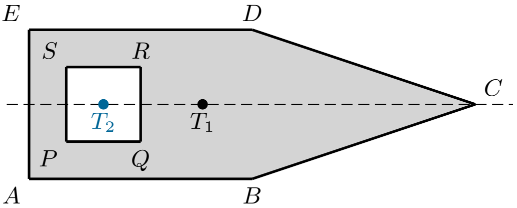
Слика 9: Центар масе T_1 петоугла $ABCDE$ је центар маса тачака T_{11} и T_{12}

Центар масе произвољног објекта



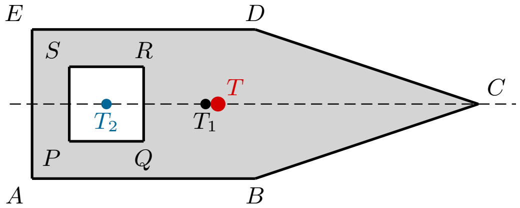
Слика 9: Петоугао $ABCDE$ са рупом $PQRS$

Центар масе произвољног објекта



Слика 9: Центар масе T_2 четвороугла $PQRS$

Центар масе произвољног објекта



Слика 9: Центар масе T петоугла $ABCDE$ са рупом $PQRS$ је центар маса тачака T_1 и T_2, где се маса у тачки T_2 узима са предзнаком "—"

Скаларни производ

Дефиниција 4.1 (Скаларни производ)

$$\vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{V}: \quad \vec{v} \cdot \vec{u} := |\vec{v}|\,|\vec{u}| \cos \angle(\vec{v}, \vec{u}),$$

Скаларни производ

Дефиниција 4.1 (Скаларни производ)

$$\vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{V}: \quad \vec{v} \cdot \vec{u} := |\vec{v}|\,|\vec{u}| \cos \angle(\vec{v}, \vec{u}),$$

Примене скаларног производа:

- Дужине:

$$|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}};$$

- Углови:

$$\angle(\vec{v}, \vec{u}) = \arccos \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{|\vec{v}|\,|\vec{u}|}$$

Особине скаларног производа

Теорема 4.1 (Особине скаларног производа)

Нека су $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \in \mathbb{V}$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. Тада важи:

Особине скаларног производа

Теорема 4.1 (Особине скаларног производа)

Нека су $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \in \mathbb{V}$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. Тада важи:

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$, симетричност

Особине скаларног производа

Теорема 4.1 (Особине скаларног производа)

Нека су $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \in \mathbb{V}$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. Тада важи:

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$, симетричност
- $\vec{u} \cdot (\alpha \vec{v} + \beta \vec{w}) = \alpha(\vec{u} \cdot \vec{v}) + \beta(\vec{u} \cdot \vec{w})$, линеарност

Особине скаларног производа

Теорема 4.1 (Особине скаларног производа)

Нека су $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \in \mathbb{V}$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. Тада важи:

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$, симетричност
- $\vec{u} \cdot (\alpha \vec{v} + \beta \vec{w}) = \alpha(\vec{u} \cdot \vec{v}) + \beta(\vec{u} \cdot \vec{w})$, линеарност
- $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2 \geq 0$, ненегативност

Особине скаларног производа

Теорема 4.1 (Особине скаларног производа)

Нека су $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \in \mathbb{V}$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. Тада важи:

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$, симетричност
- $\vec{u} \cdot (\alpha \vec{v} + \beta \vec{w}) = \alpha(\vec{u} \cdot \vec{v}) + \beta(\vec{u} \cdot \vec{w})$, линеарност
- $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2 \geq 0$, ненегативност
- $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$ ако и само ако је $\vec{u} = \vec{0}$. недегенерисаност

Скаларни производ у ортонормираној бази

- Ортонормирана база = база $e = (\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n}) : \ \overrightarrow{e_i} \cdot \overrightarrow{e_j} = \delta_{ij}$.
- $\overrightarrow{v} = v_1 e_1 + v_2 e_2 + \ldots + v_n e_n, \ \overrightarrow{u} = u_1 e_1 + u_2 e_2 + \ldots + u_n e_n$:

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} &= v_1 u_1 + v_2 u_2 + \ldots + v_n u_n \\
&= (v_1, \ldots, v_n) \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = [\overrightarrow{v}]_e^T \cdot [\overrightarrow{u}]_e
\end{aligned}
$$

Скаларни производ у ортонормираној бази

- Ортонормирана база = база $e = (\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$: $\vec{e_i} \cdot \vec{e_j} = \delta_{ij}$.
- $\vec{v} = v_1 e_1 + v_2 e_2 + \dots + v_n e_n$, $\vec{u} = u_1 e_1 + u_2 e_2 + \dots + u_n e_n$:

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \vec{u} &= v_1 u_1 + v_2 u_2 + \dots + v_n u_n \\ &= (v_1, \dots, v_n) \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = [\vec{v}]_e^T \cdot [\vec{u}]_e \end{aligned}$$

Пример 7

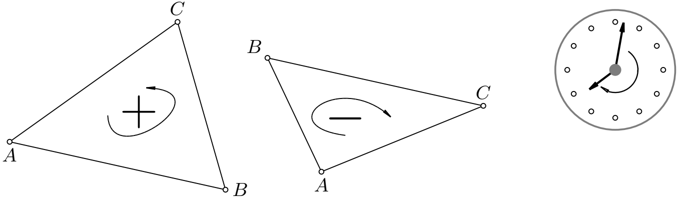
Дати су вектори $\vec{v} = (1, -2, 2)$ и $\vec{u} = (-3, 0, 4)$ из $\mathbb{V}^3$ својим координатама у ортонормираној бази. Одредити:
(а) $|\vec{v}|$; (б) $\angle(\vec{v}, \vec{u})$.

Оријентација равни

- Појам оријентације уводимо интуитивно.
  Ствар је договора шта називамо позитивном, а шта негативном оријентацијом.

Оријентација равни

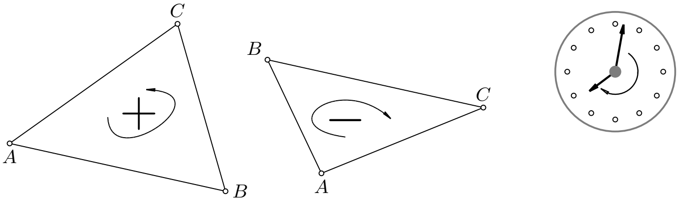
- Појам оријентације уводимо интуитивно.
  Ствар је договора шта називамо позитивном, а шта негативном оријентацијом.



Слика 10: Троугао позитивне и негативне оријентације

Оријентација равни

- Појам оријентације уводимо интуитивно.
  Ствар је договора шта називамо позитивном, а шта негативном оријентацијом.



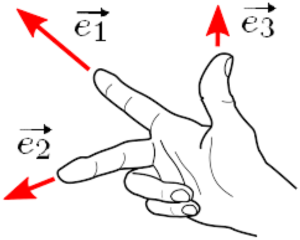
Слика 10: Троугао позитивне и негативне оријентације

- База $e = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ је позитивне оријентације, ако је троугао OAB позитивне оријентације.

Оријентација простора

Базе $e = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ је позитивне оријентације ако важи правило руке:

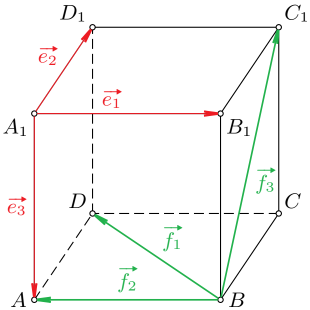
> „ако испружени кажипрст руке представља вектор $\vec{e_1}$, средњи прст вектор $\vec{e_2}$, а палац вектор $\vec{e_3}$, онда је база $e = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ позитивне оријентације".



Пример

Пример 8

Дата је коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Одредити оријентацију ортонормиране базе $e = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$, $\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{A_1D_1}$, $\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{A_1A}$ ако је база $f = \left(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC_1}\right)$ позитивне оријентације.



Слика 11: Оријентација простора

Векторски производ

Дефиниција 4.2 (Векторски производ)

$\vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{V}^3 : \quad \vec{v} \times \vec{u} := \vec{w}$, где је $\vec{w}$ вектор који има:

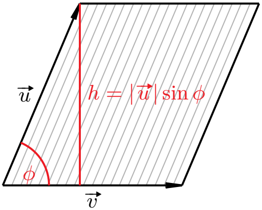
- Интензитет: $|\vec{w}| = |\vec{v}|\,|\vec{u}| \sin \angle(\vec{v}, \vec{u})$;
- Правац: $\vec{w} \perp \vec{v},\ \vec{u}$;
- Смер: База $(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$ је позитивне оријентације.

Векторски производ

Дефиниција 4.2 (Векторски производ)

$\vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{V}^3 : \quad \vec{v} \times \vec{u} := \vec{w}$, где је $\vec{w}$ вектор који има:

- Интензитет: $|\vec{w}| = |\vec{v}|\, |\vec{u}| \sin \angle(\vec{v}, \vec{u})$;
- Правац: $\vec{w} \perp \vec{v},\ \vec{u}$;
- Смер: База $(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$ је позитивне оријентације.



Слика 12: $|\vec{v} \times \vec{u}| = P_{(\vec{v}, \vec{u})}$

Особине векторског производа

Последица 4.1

Вектори $\vec{v}, \vec{u}$ простора $\mathbb{V}^3$ су линеарно независни ако и само ако $\vec{v} \times \vec{u} \neq \vec{0}$.

Особине векторског производа

Последица 4.1

Вектори $\vec{v}, \vec{u}$ простора $\mathbb{V}^3$ су линеарно независни ако и само ако $\vec{v} \times \vec{u} \neq \vec{0}$.

Теорема 4.2 (Особине векторског производа)

$\vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \in \mathbb{V}^3$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

- $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$, антисиметричност
- $(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) \times \vec{w} = \alpha(\vec{u} \times \vec{w}) + \beta(\vec{v} \times \vec{w})$. линеарност

Особине векторског производа

Последица 4.1

Вектори $\vec{v}, \vec{u}$ простора $\mathbb{V}^3$ су линеарно независни ако и само ако $\vec{v} \times \vec{u} \neq \vec{0}$.

Теорема 4.2 (Особине векторског производа)

$\vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \in \mathbb{V}^3$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

- $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$, антисиметричност
- $(\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}) \times \vec{w} = \alpha(\vec{u} \times \vec{w}) + \beta(\vec{v} \times \vec{w})$. линеарност

Теорема 4.3 (Двоструки векторски производ)

$\vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \in \mathbb{V}^3 : \quad \vec{v} \times (\vec{u} \times \vec{w}) = (\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u} - (\vec{v} \cdot \vec{u})\vec{w}.$

Особине векторског производа

Последица 4.1

Вектори $\vec{v}, \vec{u}$ простора $\mathbb{V}^3$ су линеарно независни ако и само ако $\vec{v} \times \vec{u} \neq \vec{0}$.

Теорема 4.2 (Особине векторског производа)

$\vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \in \mathbb{V}^3$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

- $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$, антисиметричност
- $(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) \times \vec{w} = \alpha(\vec{u} \times \vec{w}) + \beta(\vec{v} \times \vec{w})$. линеарност

Теорема 4.3 (Двоструки векторски производ)

$$\vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \in \mathbb{V}^3 : \quad \vec{v} \times (\vec{u} \times \vec{w}) = (\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u} - (\vec{v} \cdot \vec{u})\vec{w}.$$

Теорема 4.3 $\Longrightarrow$ векторски производ није асоцијативан.

Векторски производ у ортонормираној бази

- $e = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ – ортонормирана база позитивне оријентације

$\times$	$\vec{e_1}$	$\vec{e_2}$	$\vec{e_3}$
$\vec{e_1}$	$\vec{0}$	$\vec{e_3}$	$-\vec{e_2}$
$\vec{e_2}$	$-\vec{e_3}$	$\vec{0}$	$\vec{e_1}$
$\vec{e_3}$	$\vec{e_2}$	$-\vec{e_1}$	$\vec{0}$

Векторски производ у ортонормираној бази

- $e = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ – ортонормирана база позитивне оријентације

$\times$	$\vec{e_1}$	$\vec{e_2}$	$\vec{e_3}$
$\vec{e_1}$	$\vec{0}$	$\vec{e_3}$	$-\vec{e_2}$
$\vec{e_2}$	$-\vec{e_3}$	$\vec{0}$	$\vec{e_1}$
$\vec{e_3}$	$\vec{e_2}$	$-\vec{e_1}$	$\vec{0}$

- $\vec{v} = v_1e_1 + v_2e_2 + v_3e_3, \ \vec{u} = u_1e_1 + u_2e_2 + u_3e_3$

$$\vec{v} \times \vec{u} = (v_2u_3 - v_3u_2)\,\vec{e_1} + (v_3u_1 - v_1u_3)\,\vec{e_2} + (v_1u_2 - v_2u_1)\,\vec{e_3}$$
$$= \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}.$$

Матрична репрезентација векторског множења

- Множење вектором $\vec{p}$, $[\vec{p}]_e = (p_1, p_2, p_3)$:

$$\begin{aligned}\vec{p} \times \vec{v} &:= p_\times \cdot [\vec{v}]_e \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -p_3 & p_2 \\ p_3 & 0 & -p_1 \\ -p_2 & p_1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Примене векторског производа

$$A, B, C \in \mathbb{E}^2: \quad A(a_1, a_2, 0), \; B(b_1, b_2, 0), \; C(c_1, c_2, 0):$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 \end{vmatrix} \vec{e_3} =: D_{ABC} \, \vec{e_3}.$$

Важи:

Примене векторског производа

$$A, B, C \in \mathbb{E}^2: \quad A(a_1, a_2, 0),\ B(b_1, b_2, 0),\ C(c_1, c_2, 0):$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 \end{vmatrix} \vec{e_3} =: D_{ABC}\, \vec{e_3}.$$

Важи:

- $P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |D_{ABC}|;$

Примене векторског производа

$$A, B, C \in \mathbb{E}^2 : \quad A(a_1, a_2, 0),\ B(b_1, b_2, 0),\ C(c_1, c_2, 0):$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 \end{vmatrix} \vec{e_3} =: D_{ABC}\, \vec{e_3}.$$

Важи:

- $P_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}\, |D_{ABC}|$;
- A, B, C – колинеарне $\iff$ $D_{ABC} = 0$;

Примене векторског производа

$$A, B, C \in \mathbb{E}^2 : \quad A(a_1, a_2, 0),\ B(b_1, b_2, 0),\ C(c_1, c_2, 0):$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 \end{vmatrix} \vec{e_3} =: D_{ABC}\, \vec{e_3}.$$

Важи:

- $P_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} |D_{ABC}|$;
- A, B, C – колинеарне $\iff D_{ABC} = 0$;
- $\triangle ABC$ – позитивно оријентисан ако $D_{ABC} > 0$.

Примене векторског производа

$A, B, C \in \mathbb{E}^2 : \quad A(a_1, a_2, 0),\ B(b_1, b_2, 0),\ C(c_1, c_2, 0):$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 \end{vmatrix} \vec{e_3} =: D_{ABC}\, \vec{e_3}.$$

Важи:

- $P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |D_{ABC}|$;
- A, B, C – колинеарне $\iff D_{ABC} = 0$;
- $\triangle ABC$ – позитивно оријентисан ако $D_{ABC} > 0$.

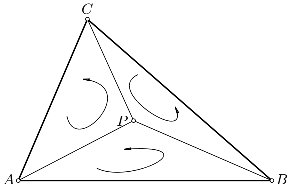
Пример 9

Одредити површину $\triangle ABC$, $A(1,3)$, $B(4,0)$, $C(2,3)$. Да ли је троугао позитивне оријентације?

Примене векторског производа

Теорема 4.4

Тачка P припада троуглу ABC ако и само ако:
$\operatorname{sign}(D_{ABP}) = \operatorname{sign}(D_{BCP}) = \operatorname{sign}(D_{CAP})$.

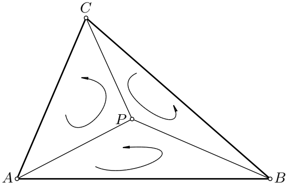


Слика 13: Тачка унутар троугла

Примене векторског производа

Теорема 4.4

Тачка P припада троуглу ABC ако и само ако:
$\operatorname{sign}(D_{ABP}) = \operatorname{sign}(D_{BCP}) = \operatorname{sign}(D_{CAP})$.



Слика 13: Тачка унутар троугла

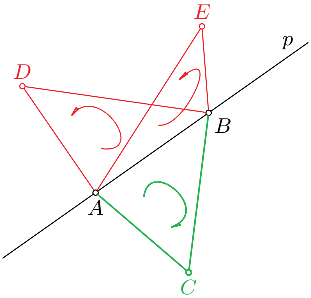
Пример 10

Да ли тачка $P(3, 2)$ припада $\triangle ABC$ из Примера 9?

Примене векторског производа

Тачке C и D са исте стране праве p ако и само ако су троуглови ABC и ABD, $A, B \in p$, истих оријентација:

$$\operatorname{sign}(D_{ABC}) = \operatorname{sign}(D_{ABD}).$$

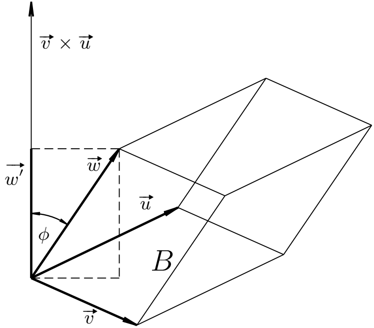


Слика 14: Тачке са исте/разних стране праве

Мешовити производ

Дефиниција 4.3 (Мешовити производ)

$\vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \in \mathbb{V}^3 : \quad [\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] := (\vec{v} \times \vec{u}) \cdot \vec{w}.$



Слика 15: $|[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}]| = V_{(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})}$

Мешовити производ и оријентација простора

Последица 4.2

Вектори $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}$ су линеарно независни ако и само ако:

$$[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] \neq 0.$$

Мешовити производ и оријентација простора

Последица 4.2

Вектори $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}$ су линеарно независни ако и само ако:

$$[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] \neq 0.$$

Последица 4.3

Вектори $(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$ простора, чине базу позитивне оријентације ако је $[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] > 0$, а негативне оријентације ако је $[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] < 0$.

Особине мешовитог производа

Теорема 4.5 (Особине мешовитог производа)

$\vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \in \mathbb{V}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

- $[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = -[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$, антисиметричност
- $[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}] = [\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}]$, цикличност
- $[\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}] = \alpha[\vec{u}, \vec{w}, \vec{z}] + \beta[\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}]$. линеарност

Особине мешовитог производа

Теорема 4.5 (Особине мешовитог производа)

$\vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \in \mathbb{V}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

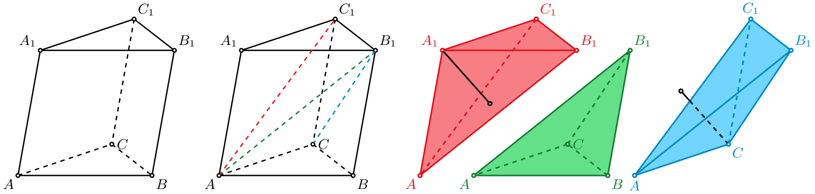
- $[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = -[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$, антисиметричност
- $[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}] = [\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}]$, цикличност
- $[\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}] = \alpha[\vec{u}, \vec{w}, \vec{z}] + \beta[\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}]$. линеарност

У ортонормираној бази:

$$[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Примене мешовитог производа

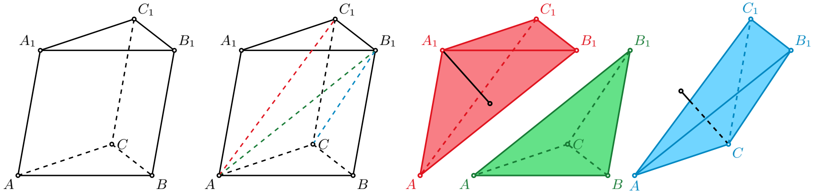
Запремина тетраедра $ABCA_1$ једнака је шестини запремине паралелепипеда одређеног векторима $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AA_1}$.



Слика 16: Подела тростране призме на три пирамиде истих запремина

Примене мешовитог производа

Запремина тетраедра $ABCA_1$ једнака је шестини запремине паралелепипеда одређеног векторима $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AA_1}$.



Слика 16: Подела тростране призме на три пирамиде истих запремина

Пример 11

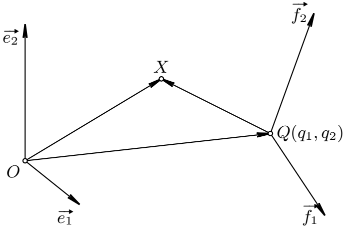
Одредити запремину тетраедра чија су темена $A(1,0,0)$, $B(3,4,6)$, $C(0,1,0)$, $D(1,1,3)$.

Трансформације координата вектора

- $e = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ – стара база
- $f = (\overrightarrow{f_1}, \dots, \overrightarrow{f_n})$ – нова база
- $C = C_{e \to f}$ – матрица преласка = матрица чије су колоне координате вектора нове базе f у старој бази e, редом.

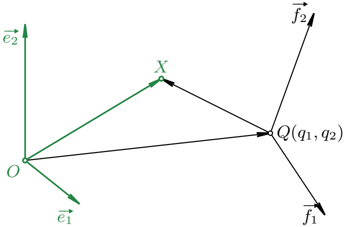
$$[\overrightarrow{v}]_e = C[\overrightarrow{v}]_f$$

Трансформације координата тачака



Слика 17: Трансформације координата тачака

Трансформације координата тачака

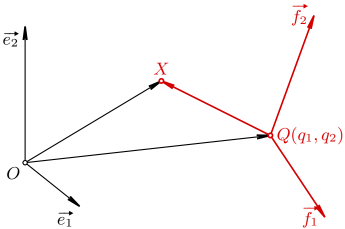


Слика 17: Трансформације координата тачака

$$\boxed{x} = Cx' + q$$

$$x = [X]_{Oe} = (x_1, x_2)^T$$

Трансформације координата тачака

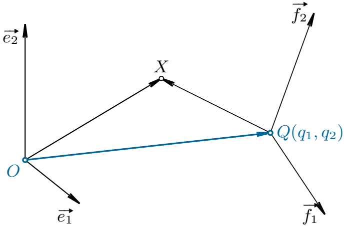


Слика 17: Трансформације координата тачака

$$x = C\,\boxed{x'} + q$$

$$x' = [X]_{Qf} = (x'_1, x'_2)^T$$

Трансформације координата тачака

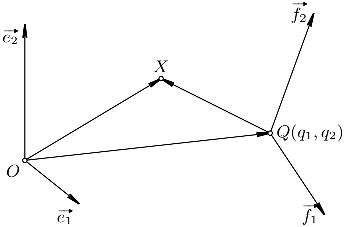


Слика 17: Трансформације координата тачака

$$x = \boxed{C}\, x' + \boxed{q}$$

$$C = C_{e\to f} \qquad q = [Q]_{Oe} = (q_1, q_2)^T$$

Трансформације координата тачака



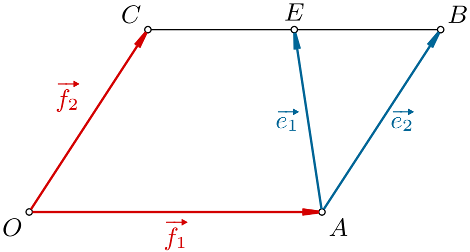
Слика 17: Трансформације координата тачака

$$x = \boxed{C}\, x' + \boxed{q}$$

линеарни део   транслаторни део

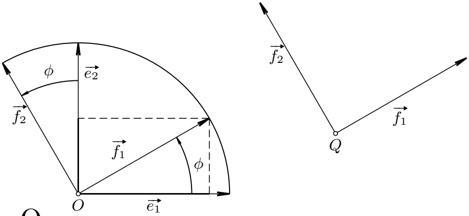
Примери

Пример 12



Слика 18: Одредити координате темена паралелограма у старом реперу Ae и новом реперу Of. Одредити везу између координата.

Трансформације ортонормираних репера равни

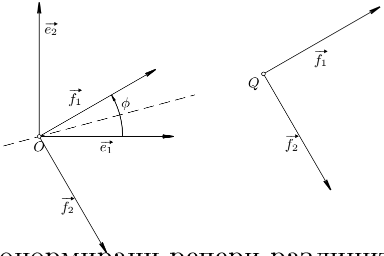


Слика 19: Ортонормирани репери истих оријентација

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}.$$

матрица ротације

Трансформације ортонормираних репера равни

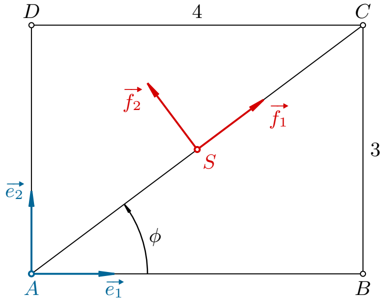


Слика 20: Ортонормирани репери различитих оријентација

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\boxed{\begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix}}}_{\text{матрица рефлексије}} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}.$$

Примери

Пример 13



Слика 21: Одредити везу координата као и координате темена правоугаоника у новом реперу.