УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

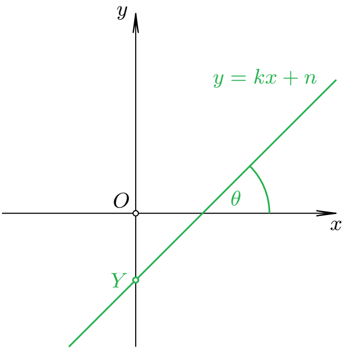
# Геометрија И–смер

## део 3: Аналитичка геометрија равни

Тијана Шукиловић

5. децембар 2016

# Једначина праве у равни

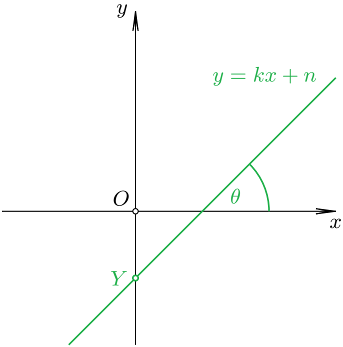



Слика 1: Експлицитна једначина

- Експлицитна једначина:

$$p : \; y = kx + n$$

# Једначина праве у равни



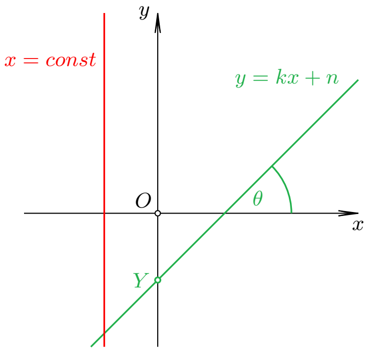

Слика 1: Експлицитна једначина

- Експлицитна једначина:

$$p: \; y = \boxed{k}\,x + \boxed{n}$$

$$k = \tan\theta \qquad\qquad n = |OY|$$

# Једначина праве у равни




Слика 1: Експлицитна једначина

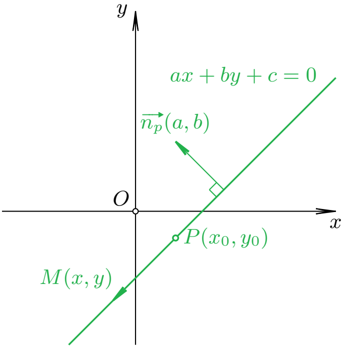
- Експлицитна једначина:

$$p:\ y = \boxed{k}\,x + \boxed{n}$$

$$k = \tan\theta \qquad n = |OY|$$

Вертикалне праве?

# Једначина праве у равни

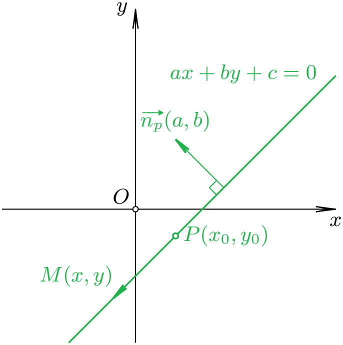



Слика 2: Имплицитна једначина

- Имплицитна једначина:

$$p: \; ax + by + c = 0$$

# Једначина праве у равни



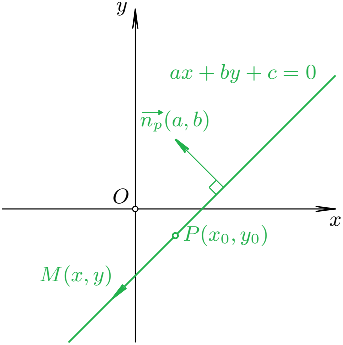

Слика 2: Имплицитна једначина

- Имплицитна једначина:

$$p : \boxed{a}\,x + \boxed{b}\,y + \boxed{c} = 0$$

$$\overrightarrow{n_p} \qquad c = -\overrightarrow{OP} \circ \overrightarrow{n_p}$$

# Једначина праве у равни




Слика 2: Имплицитна једначина

- Имплицитна једначина:

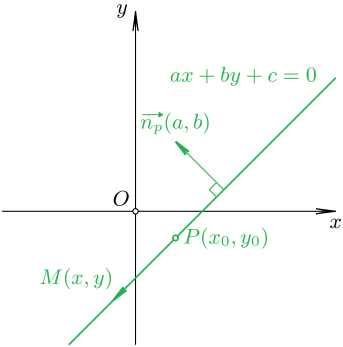
$$p : \boxed{a}\,x + \boxed{b}\,y + \boxed{c} = 0$$

$$\overrightarrow{n_p} \qquad c = -\overrightarrow{OP} \circ \overrightarrow{n_p}$$

$$|\overrightarrow{n_p}| = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$$

Нормализована једначина

# Једначина праве у равни

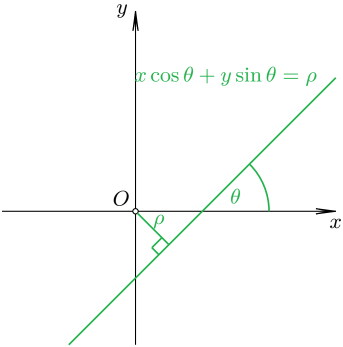



Слика 2: Имплицитна једначина

### Пример 1

Одредити нормализовану једначину праве која садржи тачку $M(1, 1)$ и чији је нормални вектор $\overrightarrow{n_p} = (4, -3)$.

# Једначина праве у равни

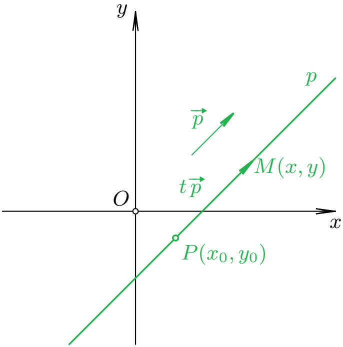



Слика 3: Нормална једначина

- Нормална једначина:

$$p: \ x\cos\theta + y\sin\theta = \rho$$

# Једначина праве у равни

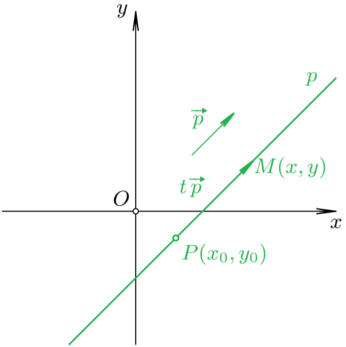



Слика 4: Параметарска једначина

- Параметарска једначина:

$$p: \ M(t) = P + t\vec{p}, \ t \in \mathbb{R}$$

# Једначина праве у равни



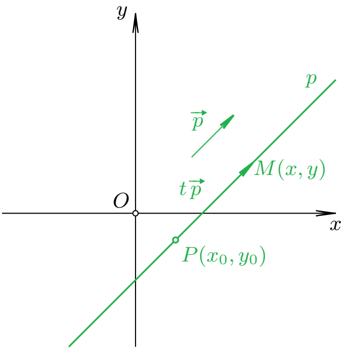

Слика 4: Параметарска једначина

- Параметарска једначина:

$$p:\ M(t) = P + t\,\boxed{\vec{p}},\ \ t \in \mathbb{R}$$

брзина кретања

# Једначина праве у равни




Слика 4: Параметарска једначина

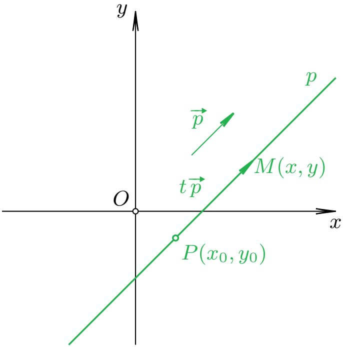
- Параметарска једначина:

$$p: \; M(t) = P + t\,\boxed{\vec{p}}, \;\; t \in \mathbb{R}$$

брзина кретања

$$\begin{aligned} x &= x_0 + tp_x, \\ y &= y_0 + tp_y, \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

# Једначина праве у равни




Слика 4: Параметарска једначина

- Параметарска једначина:

$$p:\ M(t) = P + t\,\boxed{\vec{p}},\quad t \in \mathbb{R}$$

брзина кретања

$$\begin{aligned} x &= x_0 + tp_x, \\ y &= y_0 + tp_y, \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Равномерно праволинијско кретање

# Параметарски $\longrightarrow$ имплицитни облик

- Параметарски облик:

$$x = x_0 + tp_x, \quad y = y_0 + tp_y, \quad t \in \mathbb{R}.$$

# Параметарски $\longrightarrow$ имплицитни облик

- Параметарски облик:

$$x = x_0 + tp_x, \quad y = y_0 + tp_y, \quad t \in \mathbb{R}.$$

- Канонски облик:

$$t = \frac{x - x_0}{p_x} = \frac{y - y_0}{p_y}.$$

# Параметарски $\longrightarrow$ имплицитни облик

- Параметарски облик:

$$x = x_0 + tp_x, \quad y = y_0 + tp_y, \quad t \in \mathbb{R}.$$

- Канонски облик:

$$t = \frac{x - x_0}{p_x} = \frac{y - y_0}{p_y}.$$

- Имплицитни облик:

$$p_y x - p_x y + (p_x y_0 - p_y x_0) = 0.$$

# Имплицитни $\longrightarrow$ параметарски облик

- Имплицитни облик:

$$ax + by + c = 0.$$

# Имплицитни ⟶ параметарски облик

- Имплицитни облик:

$$ax + by + c = 0.$$

- Параметарски облик:

$$\vec{p} = (-b, a), \quad P\left(\frac{-ac}{a^2+b^2}, \frac{-bc}{a^2+b^2}\right).$$

# Имплицитни ⟶ параметарски облик

- Имплицитни облик:

$$ax + by + c = 0.$$

- Параметарски облик:

$$\vec{p} = (-b, a), \quad P\left(\frac{-ac}{a^2+b^2}, \frac{-bc}{a^2+b^2}\right).$$

### Пример 2

Дата је права $p: \ 3x - 4y + 6 = 0$. Одредити параметарски облик праве $p$ и угао који права $p$ заклапа са $x$-осом.

# Примери

## Пример 3

Одредити имплицитну једначину праве које садржи тачку $M(1,2)$ и паралелна је са $y$-осом.

## Пример 4

Одредити параметарску једначуну праве која садржи тачку $P(-2,3)$ и нормална је на праву $q:\ 2x+3y-1=0$.

# Параметризација дужи и полуправе

- Дуж $[AB]$:

$$M(t) = A + t\overrightarrow{AB}, \quad t \in [0, 1].$$

# Параметризација дужи и полуправе

- Дуж $[AB]$:

$$M(t) = A + t\overrightarrow{AB}, \quad t \in [0, 1].$$

- Полуправа $[AB)$:

$$M(t) = A + t\overrightarrow{AB}, \quad t \in [0, +\infty).$$

# Параметризација дужи и полуправе

- Дуж $[AB]$:

$$M(t) = A + t\overrightarrow{AB}, \quad t \in [0, 1].$$

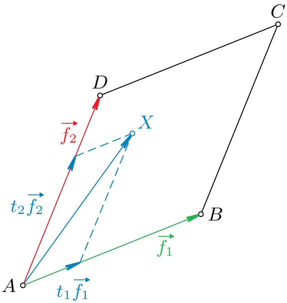
- Полуправа $[AB)$:

$$M(t) = A + t\overrightarrow{AB}, \quad t \in [0, +\infty).$$

## Пример 5

Одредити параметарску једначину дужи $[AB]$ ако је $A(2, -3)$, $B(10, 9)$.
Одредити тачке $A_1$, $A_2$ и $A_3$ које дуж $[AB]$ деле на четири једнака дела.
Да ли тачка $C\left(\frac{2}{3}, -5\right)$ припада полуправој $[AB)$?

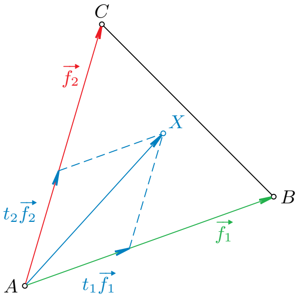
# Параметризација паралелограма




Слика 5: Параметарска једначина паралелограма

$$X(t_1, t_2) = A + t_1\overrightarrow{AB} + t_2\overrightarrow{AD},\ 0 \leq t_1, t_2 \leq 1.$$

# Параметризација троугла




Слика 6: Параметарска једначина троугла

$$X(t_1, t_2) = A + t_1\overrightarrow{AB} + t_2\overrightarrow{AC},\ 0 \leq t_1, t_2 \leq 1,\ t_1 + t_2 \leq 1.$$

# Полураван

- $C, D$ су са исте стране праве $p$ ако: $[CD] \cap p = \{\emptyset\}$.

# Полураван

- $C, D$ су са исте стране праве $p$ ако: $[CD] \cap p = \{\emptyset\}$.
- Полураван $=$ скуп свих тачака са исте стране праве $p$.

# Полураван

- $C, D$ су са исте стране праве $p$ ако: $[CD] \cap p = \{\emptyset\}$.
- Полураван = скуп свих тачака са исте стране праве $p$.
- $p: \ f(x, y) = ax + by + c = 0$:

$$C, D \overset{\cdot\cdot}{-} p \Longleftrightarrow \mathrm{sign}(f(C)) = \mathrm{sign}(f(D)).$$

# Полураван

- $C, D$ су са исте стране праве $p$ ако: $[CD] \cap p = \{\emptyset\}$.
- Полураван = скуп свих тачака са исте стране праве $p$.
- $p: \ f(x,y) = ax + by + c = 0$:

$$C, D \stackrel{..}{-} p \iff \operatorname{sign}(f(C)) = \operatorname{sign}(f(D)).$$

- $p: \ A, B \in p$:

$$C, D \stackrel{..}{-} p \iff \operatorname{sign}(D_{ABC}) = \operatorname{sign}(D_{ABD}).$$

# Полураван

- $C, D$ су са исте стране праве $p$ ако: $[CD] \cap p = \{\emptyset\}$.
- Полураван = скуп свих тачака са исте стране праве $p$.
- $p: \ f(x,y) = ax + by + c = 0$:

$$C, D \overset{\cdot\cdot}{-} p \iff \mathrm{sign}(f(C)) = \mathrm{sign}(f(D)).$$

- $p: \ A, B \in p$:

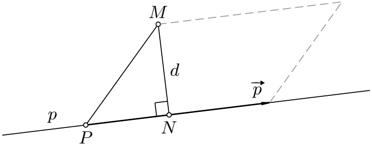
$$C, D \overset{\cdot\cdot}{-} p \iff \mathrm{sign}(D_{ABC}) = \mathrm{sign}(D_{ABD}).$$

- $p: \ P, \ \vec{p}, \ A \equiv P, \ B = A + \vec{p}$.

# Растојање тачке од праве

## Теорема 1.1 (важи и у простору)

$$d(M,p) = d = \frac{|\overrightarrow{p} \times \overrightarrow{PM}|}{|\overrightarrow{p}|}.$$

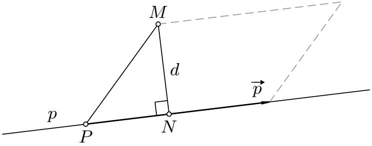



Слика 7: Растојање тачке од праве

# Растојање тачке од праве

## Теорема 1.1 (важи и у простору)

$$d(M,p) = d = \frac{|\vec{p} \times \overrightarrow{PM}|}{|\vec{p}|}.$$




Слика 7: Растојање тачке од праве

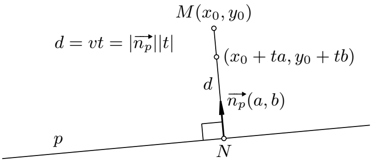
## Пример 6

Одредити растојање тачке $M(1,1)$ од праве
$p: \ P(-2,0), \vec{p} = (3,4)$.

# Растојање тачке од праве

## Теорема 1.2

$$d(M,p) = d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

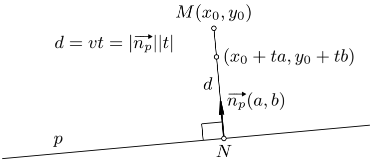



Слика 8: Растојање тачке од праве

# Растојање тачке од праве

## Теорема 1.2

$$d(M,p) = d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$




Слика 8: Растојање тачке од праве

## Пример 7

Одредити растојање тачке $M(1, 1)$ од праве $p: \ 3x + 4y - 5 = 0$.

# Пресек имплицитно задатих правих

- Решити систем:

$$p : a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
$$q : a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

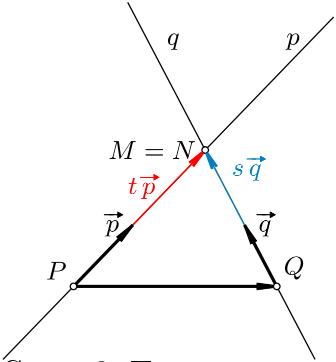
- Крамерово правило:

$$\Delta = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}, \; \Delta_x = \begin{pmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{pmatrix}, \; \Delta_y = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{pmatrix}.$$

  - $\Delta \neq 0$ – праве се секу у $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$;
  - $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$ – праве се поклапају;
  - $\Delta = 0$, $\Delta_x \neq 0$ или $\Delta_y \neq 0$ – праве су паралелне.

# Пресек параметарски задатих правих

$$P + t\overrightarrow{p} = M = N = Q + s\overrightarrow{q}$$




Слика 9: Пресек правих

# Пресек параметарски задатих правих

- $D(\vec{p}, \vec{q}) \neq 0$ – праве се секу

$$t = \frac{D(\overrightarrow{PQ}, \vec{q})}{D(\vec{p}, \vec{q})}, \; s = \frac{D(\overrightarrow{PQ}, \vec{p})}{D(\vec{p}, \vec{q})}$$

# Пресек параметарски задатих правих

- $D(\vec{p}, \vec{q}) \neq 0$ – праве се секу

$$t = \frac{D(\overrightarrow{PQ}, \vec{q})}{D(\vec{p}, \vec{q})}, \quad s = \frac{D(\overrightarrow{PQ}, \vec{p})}{D(\vec{p}, \vec{q})}$$

- $D(\vec{p}, \vec{q}) = 0$, $D(\overrightarrow{PQ}, \vec{q}) = 0$ – праве се поклапају

# Пресек параметарски задатих правих

- $D(\vec{p}, \vec{q}) \neq 0$ – праве се секу

$$t = \frac{D(\overrightarrow{PQ}, \vec{q})}{D(\vec{p}, \vec{q})}, \; s = \frac{D(\overrightarrow{PQ}, \vec{p})}{D(\vec{p}, \vec{q})}$$

- $D(\vec{p}, \vec{q}) = 0$, $D(\overrightarrow{PQ}, \vec{q}) = 0$ – праве се поклапају
- $D(\vec{p}, \vec{q}) = 0$, $D(\overrightarrow{PQ}, \vec{q}) \neq 0$ – праве су паралелне

# Пресек параметарски задатих правих

- $D(\vec{p}, \vec{q}) \neq 0$ – праве се секу

$$t = \frac{D(\overrightarrow{PQ}, \vec{q})}{D(\vec{p}, \vec{q})}, \quad s = \frac{D(\overrightarrow{PQ}, \vec{p})}{D(\vec{p}, \vec{q})}$$

- $D(\vec{p}, \vec{q}) = 0$, $D(\overrightarrow{PQ}, \vec{q}) = 0$ – праве се поклапају
- $D(\vec{p}, \vec{q}) = 0$, $D(\overrightarrow{PQ}, \vec{q}) \neq 0$ – праве су паралелне

### Пример 8

Одредити пресек правих $p$ и $q$ које су задате тачком и вектором правца:

(а) $P(3,1)$, $\vec{p} = (1,0)$, $Q(2,3)$, $\vec{q} = (1,1)$;
(б) $P(3,1)$, $\vec{p} = (1,0)$, $Q(2,3)$, $\vec{q} = (-2,0)$;
(в) $P(3,1)$, $\vec{p} = (1,-2)$, $Q(2,3)$, $\vec{q} = (-2,4)$.

# Пресек дужи

$$[AB]:\ A + t\overrightarrow{AB}, \qquad [CD]:\ C + s\overrightarrow{CD},\ t, s \in [0, 1]$$

# Пресек дужи

$$[AB]: \ A + t\overrightarrow{AB}, \qquad [CD]: C + s\overrightarrow{CD}, \ t, s \in [0,1]$$

- Дужи се секу ако је $D(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \neq 0$ и

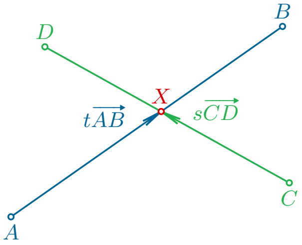
$$0 \leq t = \frac{D(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CD})}{D(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})}, \ s = \frac{D(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})}{D(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} \leq 1$$

# Пресек дужи

$$[AB]:\ A + t\overrightarrow{AB}, \qquad [CD]:\ C + s\overrightarrow{CD},\ t, s \in [0,1]$$

- Дужи се секу ако je $D(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \neq 0$ и

$$0 \leq t = \frac{D(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CD})}{D(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})},\ s = \frac{D(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})}{D(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} \leq 1$$




Слика 10: Пресек дужи

# Пресек дужи

$$[AB]: \ A + t\overrightarrow{AB}, \qquad [CD]: \ C + s\overrightarrow{CD}, \ t, s \in [0,1]$$

# Пресек дужи

$$[AB]: \ A + t\overrightarrow{AB}, \qquad [CD]: \ C + s\overrightarrow{CD}, \ t, s \in [0,1]$$

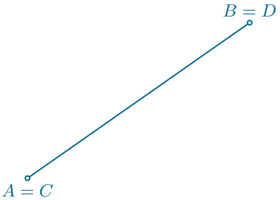
- Ако је $D(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 0$ и $D(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CD}) = 0$:

# Пресек дужи

$$[AB]: \; A + t\overrightarrow{AB}, \qquad [CD]: \; C + s\overrightarrow{CD}, \; t, s \in [0,1]$$

- Ако је $D(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 0$ и $D(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CD}) = 0$:

  $\left.\begin{array}{l}\text{дужи се поклапају}\\ \\ \\ \end{array}\right\} \Longrightarrow$ потребна додатна анализа!

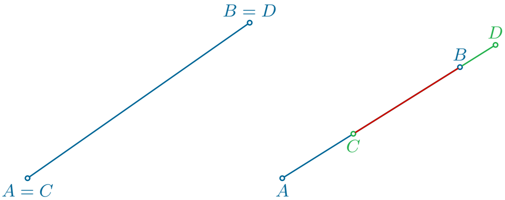


# Пресек дужи

$$[AB]: \; A + t\overrightarrow{AB}, \qquad [CD]: \; C + s\overrightarrow{CD}, \; t, s \in [0,1]$$

- Ако је $D(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 0$ и $D(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CD}) = 0$:

$$\left.\begin{array}{l}\text{дужи се поклапају}\\ \text{дужи се делимично преклапају}\end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{c}\text{потребна додатна}\\ \text{анализа!}\end{array}$$

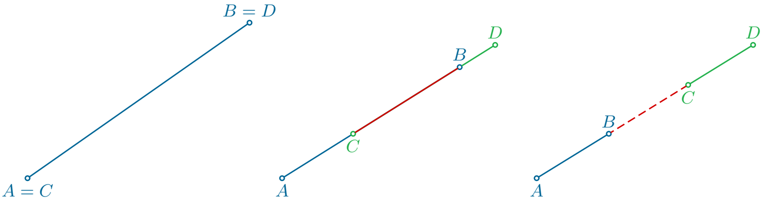


# Пресек дужи

$$[AB]:\ A + t\overrightarrow{AB}, \qquad [CD]:\ C + s\overrightarrow{CD},\ t, s \in [0,1]$$

- Ако je $D(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 0$ и $D(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CD}) = 0$:

$$\left.\begin{array}{l}\text{дужи се поклапају}\\ \text{дужи се делимично преклапају}\\ \text{дужи се не секу}\end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{c}\text{потребна додатна}\\ \text{анализа!}\end{array}$$



# Пресек дужи

$$[AB]:\ A + t\overrightarrow{AB}, \qquad [CD]:\ C + s\overrightarrow{CD},\ t, s \in [0, 1]$$

# Пресек дужи

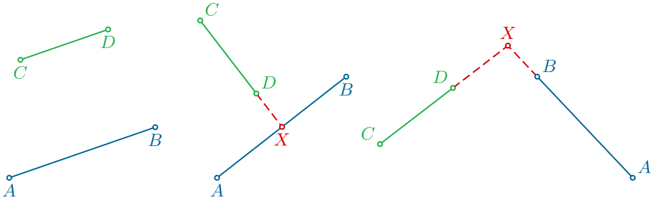
$$[AB]: \ A + t\overrightarrow{AB}, \qquad [CD]: \ C + s\overrightarrow{CD}, \ t, s \in [0, 1]$$

- Дужи се не секу у свим осталим случајевима.

# Пресек дужи

$$[AB]:\ A + t\overrightarrow{AB}, \qquad [CD]:\ C + s\overrightarrow{CD},\ t, s \in [0,1]$$

- Дужи се не секу у свим осталим случајевима.




Слика 11: Дужи се не секу

# Пресек полуправих и дужи

## Пример 9

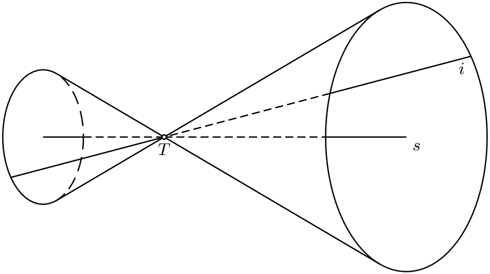
Одредити пресек полуправих $[AB)$ : $A(1,2)$, $B(-2,3)$ и $[CD)$ : $C(0,1)$, $D(2,-1)$.

## Пример 10

Одредити пресек дужи $AB$ и $CD$, где је $A(12,3)$, $B(12,5)$, $C(5,7)$, $D(-2,1)$.

# Конус

Нека су $i$ и $s$ две праве у простору које се секу у тачки $T$. Кружни конус са теменом $T$ је површ која се добија ротацијом праве $i$ око осе $s$.
Ротирана права $i$ (у разним положајима) назива се изводница конуса, а права $s$ се назива оса конуса.




Слика 12: Кружни конус

# Конусни пресек

**Дефиниција 2.1**

Конусни пресек је пресек конуса са произвољном равни $\alpha$.

Конусни пресеци:

- круг;
- елипса;
- хипербола;
- парабола.

# Конике

### Дефиниција 2.2

Коника је пресек конуса са равни $\alpha$ која НЕ садржи теме конуса.

### Теорема 2.1

У равни $\alpha$ конике постоје права $d$ и тачка $F$ такве да је однос растојања

$$\frac{MF}{d(M,d)} = e = const$$

произвољне тачке $M$ конике од тачке $F$ и праве $d$ константан.

# Ексцентрицитет конике

## Дефиниција 2.3

Број $e \geq 0$ назива се ексцентрицитет конике,

# Ексцентрицитет конике

### Дефиниција 2.3

Број $e \geq 0$ назива се ексцентрицитет конике, тачка $F$ жижа,

# Ексцентрицитет конике

**Дефиниција 2.3**

Број $e \geq 0$ назива се ексцентрицитет конике, тачка $F$ жижа, а права $d$ директриса конике.

# Ексцентрицитет конике

**Дефиниција 2.3**

Број $e \geq 0$ назива се ексцентрицитет конике, тачка $F$ жижа, а права $d$ директриса конике.

Ексцентрицитет одређује тип конике:

- за $e = 0$ – круг;
- за $0 < e < 1$ – елипса;
- за $e = 1$ – парабола;
- за $e > 1$ – хипербола.

# Примери коника у природи

- 1. Кеплеров закон:
  Тела Сунчевог система се крећу око Сунца по коници, а Сунце се налази у жижи те конике.
  - Земља: $e = 0.0167$
  - Јупитер: $e = 0.048775$
  - Халејева комета: $e = 0.995$

# Примери коника у природи

- 1. Кеплеров закон:
  Тела Сунчевог система се крећу око Сунца по коници, а Сунце се налази у жижи те конике.
  - Земља: $e = 0.0167$
  - Јупитер: $e = 0.048775$
  - Халејева комета: $e = 0.995$
- Путања косог хица је парабола.

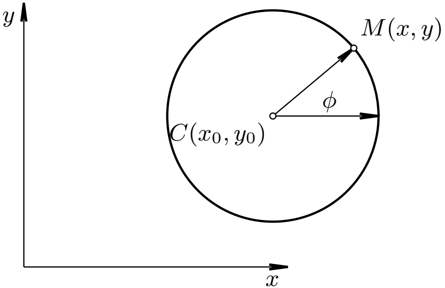
# Примери коника у природи

- 1. Кеплеров закон:
  Тела Сунчевог система се крећу око Сунца по коници, а Сунце се налази у жижи те конике.
  - Земља: $e = 0.0167$
  - Јупитер: $e = 0.048775$
  - Халејева комета: $e = 0.995$
- Путања косог хица је парабола.
- Сунчева сенка врха штапа у току дана је коника.

# Примери коника у природи

- 1. Кеплеров закон:
  Тела Сунчевог система се крећу око Сунца по коници, а Сунце се налази у жижи те конике.
  - Земља: $e = 0.0167$
  - Јупитер: $e = 0.048775$
  - Халејева комета: $e = 0.995$
- Путања косог хица је парабола.
- Сунчева сенка врха штапа у току дана је коника.
- Сенка кружног предмета на раван зид је коника.

# Круг




Слика 13: Круг са центром у тачки $C(x_0, y_0)$ и полупречником $r$

# Имплицитна и параметарска једначина круга

- Имплицитна једначина круга:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

# Имплицитна и параметарска једначина круга

- Имплицитна једначина круга:

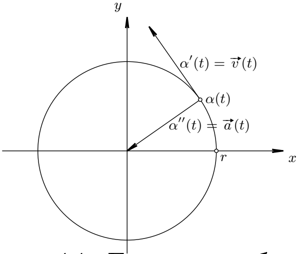
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

- Параметарска једначина круга:

$$x = x_0 + r\cos\theta, \quad y = y_0 + r\sin\theta, \quad \theta \in [0, 2\pi),$$

$\theta$ је угао између вектора положаја тачке и позитивног дела $x$-осе.

# Брзина и убрзање



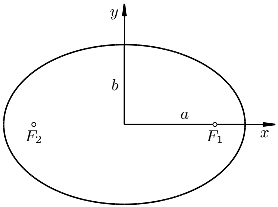

Слика 14: Брзина и убрзање

$$\alpha(t) = (r\cos t,\ r\sin t)\,, t \in [0, 2\pi).$$

- Кружно кретање константном угаоном брзином:
  - $t$ – време;
  - $\vec{v} = \alpha'(t)$ – брзина;
  - $\vec{a} = \alpha''(t)$ – убрзање;
  - $\vec{F} = m\vec{a}$ – центрипетална сила.

Предавања професора Волтера Левина са MIT-а (YouTube)

# Елипса




Слика 15: Елипса

Канонска једначина елипсе:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > b > 0.$$

# Елементи елипсе

- $a > b > 0$ – полуосе елипсе;

# Елементи елипсе

- $a > b > 0$ – полуосе елипсе;
- $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ – жиже елипсе;

# Елементи елипсе

- $a > b > 0$ – полуосе елипсе;
- $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ – жиже елипсе;
- $d_1 : x = \dfrac{a}{e}$, $d_2 : x = -\dfrac{a}{e}$ – директрисе елипсе;

# Елементи елипсе

- $a > b > 0$ – полуосе елипсе;
- $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ – жиже елипсе;
- $d_1 : x = \dfrac{a}{e}$, $d_2 : x = -\dfrac{a}{e}$ – директрисе елипсе;
- $e = \dfrac{c}{a}$ – ексцентрицитет елипсе.

# Елементи елипсе

- $a > b > 0$ – полуосе елипсе;
- $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ – жиже елипсе;
- $d_1 : x = \frac{a}{e}$, $d_2 : x = -\frac{a}{e}$ – директрисе елипсе;
- $e = \frac{c}{a}$ – ексцентрицитет елипсе.

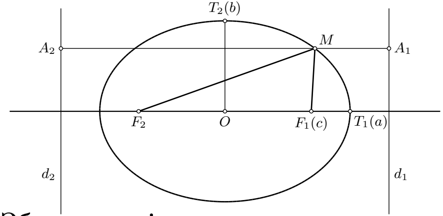
- за $a = b$ елипса је круг!

# Фокусне особине елипсе

## Теорема 2.2

Збир растојања произвољне тачке елипсе од њених жижа је константан:

$$MF_1 + MF_2 = 2a.$$




Слика 16: Збир растојања тачке елипсе од њених жижа

- Фокусне особине елипсе

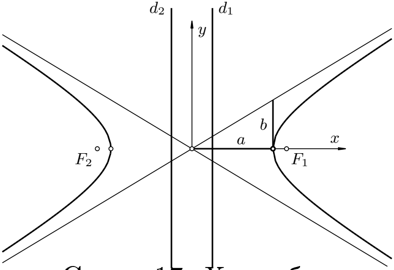
# Параметарска једначина елипсе

- Параметарска једначина елипсе:

$$x = a\cos\theta, \quad y = b\sin\theta, \quad \theta \in [0, 2\pi),$$

$a, b$ су полуосе елипсе, али $\theta$ НИЈЕ угао између вектора положаја тачке и позитивног дела $x$-осе.

# Хипербола




Слика 17: Хипербола

Канонска једначина хиперболе:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

# Елементи хиперболе

- $a, b > 0$ – полуосе хиперболе;

# Елементи хиперболе

- $a, b > 0$ – полуосе хиперболе;
- $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$, $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ – жиже хиперболе;

# Елементи хиперболе

- $a, b > 0$ – полуосе хиперболе;
- $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$, $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ – жиже хиперболе;
- $d_1 : x = \dfrac{a}{e}$, $d_2 : x = -\dfrac{a}{e}$ – директрисе хиперболе;

# Елементи хиперболе

- $a, b > 0$ – полуосе хиперболе;
- $F_1(c, 0),\ F_2(-c, 0),\ c = \sqrt{a^2 + b^2}$ – жиже хиперболе;
- $d_1 : x = \dfrac{a}{e},\ d_2 : x = -\dfrac{a}{e}$ – директрисе хиперболе;
- $e = \dfrac{c}{a}$ – ексцентрицитет хиперболе;

# Елементи хиперболе

- $a, b > 0$ – полуосе хиперболе;
- $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$, $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ – жиже хиперболе;
- $d_1 : x = \frac{a}{e}$, $d_2 : x = -\frac{a}{e}$ – директрисе хиперболе;
- $e = \frac{c}{a}$ – ексцентрицитет хиперболе;
- $a_1 : y = \frac{b}{a}x$, $a_2 : y = -\frac{b}{a}x$ – асимптоте хиперболе.

# Фокусне особине хиперболе

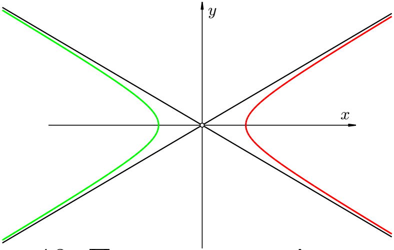
**Теорема 2.3**

Апсолутна вредност разлике растојања произвољне тачке хиперболе од њених жижа је константан:

$$|MF_1 - MF_2| = 2a.$$

- Фокусне особине хиперболе

# Параметризација хиперболе



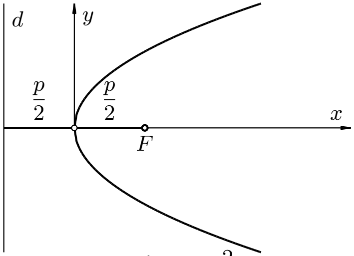

Слика 18: Параметризација хиперболе

$$x = +a\cosh\phi, \quad y = b\sinh\phi, \quad \phi \in \mathbb{R}$$
$$x = -a\cosh\phi, \quad y = b\sinh\phi, \quad \phi \in \mathbb{R}$$

# Парабола

## Последица 2.1

Свака тачка $M$ параболе је једнако удаљена од жиже и од директрисе параболе.




Слика 19: Парабола $y^2 = 2px$, $p > 0$

- Дефиниција параболе

# Елементи параболе $y^2 = 2px$, $p > 0$

- $p$ – параметар параболе;
- $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ – жижа параболе;
- $d:\ x = -\frac{p}{2}$ – директриса параболе;
- $o$ – оса параболе (овде: $x$-оса);
- $T$ – теме параболе (овде: $O$).

# Параметризација параболе

Стандардна параметризација:

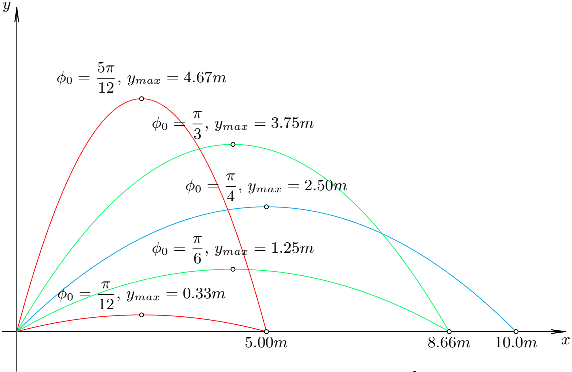
$$x = \frac{t^2}{2p}, \quad y = t, \quad t \in \mathbb{R},$$

Једначина косог хица:

$$\begin{aligned} x(t) &= (v_0 \cos \phi_0)t, \;\; t \geq 0 \\ y(t) &= -\frac{g}{2}t^2 + (v_0 \sin \phi_0)t + h, \;\; t \geq 0, \end{aligned}$$

где је $v_0$ почетна брзина, $h$ висина, а $\phi_0$ угао (у односу на тло) под којим се хитац испаљује. Са $g$ је означено гравитационо убрзање.

# Коси хитац



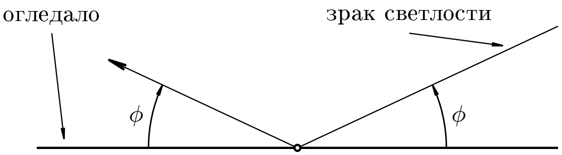

Слика 20: Коси хици са почетном брзином $v_0 = 10\frac{m}{s}$, за углове $\phi_0 = \frac{k\pi}{12}$, $k = 1, \ldots, 5$

# Примери косог хица

- Спорт: Projectile motion in sport
- MIT експеримент: Monkey and a gun
- Фонтане: The Mathematical Tourist

# Закон одбијања светлости

Светлост се одбија од глатке површине тако да је упадни угао зрака светлости једнак одбојном углу.

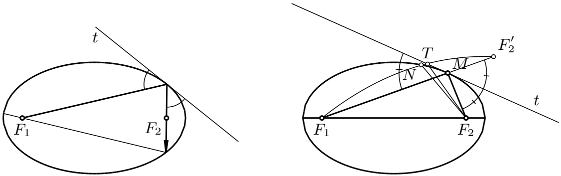



Слика 21: Закон одбијања светлости

# Оптичка особина елипсе

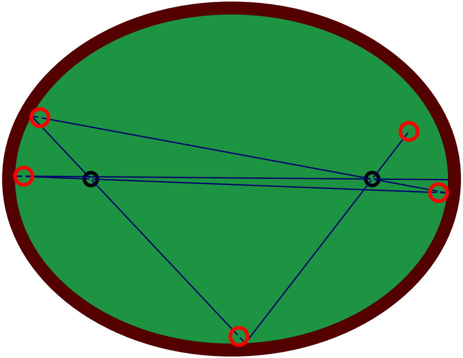
### Теорема 2.4

Светлосни зрак који извире из жиже елипсе и одбија се од елипсе, пролази кроз другу жижу елипсе.



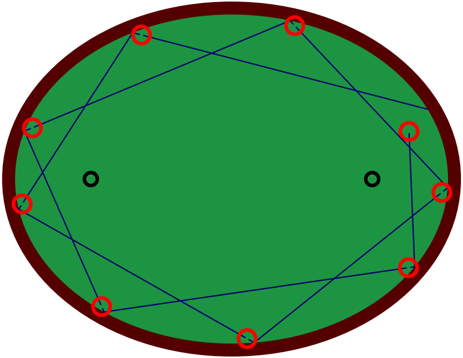

Слика 22: Оптичка особина елипсе

# Елиптички билијар



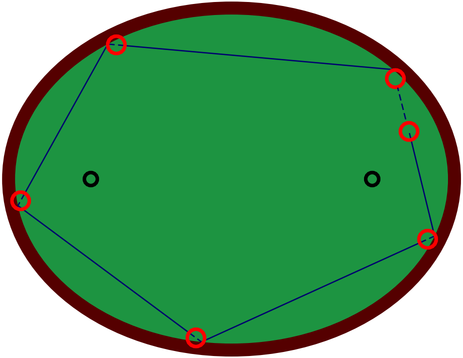
Слика 23: Елиптички билијар

# Елиптички билијар



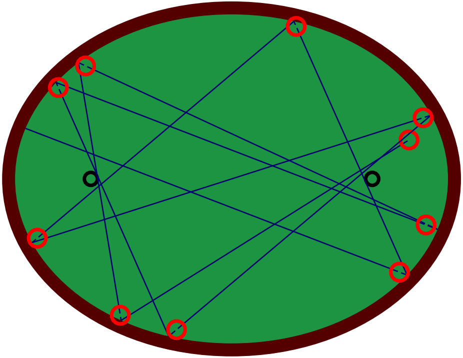
Слика 23: Елиптички билијар

# Елиптички билијар



Слика 23: Елиптички билијар

# Елиптички билијар

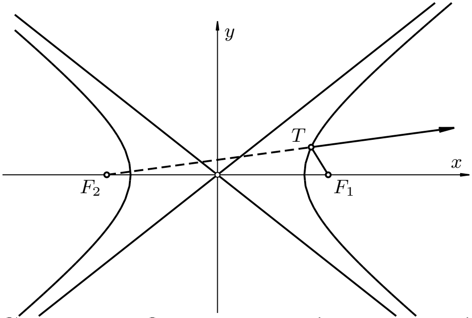


Слика 23: Елиптички билијар

# Оптичка особина хиперболе

## Теорема 2.5

Светлосни зрак који извире из жиже хиперболе и одбија се од хиперболе, колинеаран је са другом жижом хиперболе.

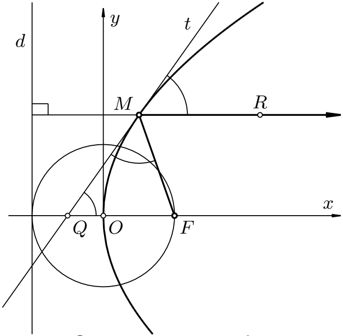



Слика 24: Оптичка особина хиперболе

# Оптичка особина параболе

### Теорема 2.6

Светлосни зрак који извире из жиже параболе одбија се од параболе паралелно њеној оси.




Слика 25: Оптичка особина параболе

# Криве другог реда

### Дефиниција 2.4

Крива другог реда је скуп тачака равни чије координате $(x, y)$ задовољавају једначину другог степена:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

# Криве другог реда

### Дефиниција 2.4

Крива другог реда је скуп тачака равни чије координате $(x, y)$ задовољавају једначину другог степена:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Колико год претходна једначина изгледала компликовано, може се показати да она геометријски описује елипсу, хиперболу, параболу или неку једноставну „дегенерисану” криву.

# Свођење криве на канонски облик

## Теорема 2.7

За сваку криву другог реда, дату у ортонормираном реперу $Oe$, постоји нови ортонормирани репер $Qf$, исте оријентације, у ком она има тачно једну од следећих једначина:

$$(E) \quad \frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1, \qquad \text{(елипса)}$$

$$(H) \quad \frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 1, \qquad \text{(хипербола)}$$

$$(P) \quad y''^2 = 2px'', \qquad \text{(парабола)}$$

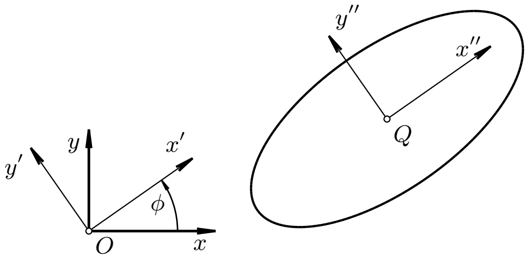
# Свођење криве на канонски облик

## Теорема 2.7

$$
\begin{aligned}
&(D1) && \frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = -1, && \text{(празан скуп или имагинарна елипса)}\\
&(D2) && \frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 0, && \text{(тачка)}\\
&(D3) && \frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 0, && \text{(две праве које се секу)}\\
&(D4) && x''^2 = a^2, && \text{(две паралелне праве)}\\
&(D5) && x''^2 = 0, && \text{(„двострука” права)}\\
&(D6) && x''^2 = -a^2 && \text{(празан скуп).}
\end{aligned}
$$

где је $p > 0$, $a, b > 0$ и $a \geq b$ за $(E), (D1), (D2)$ и $(D3)$.

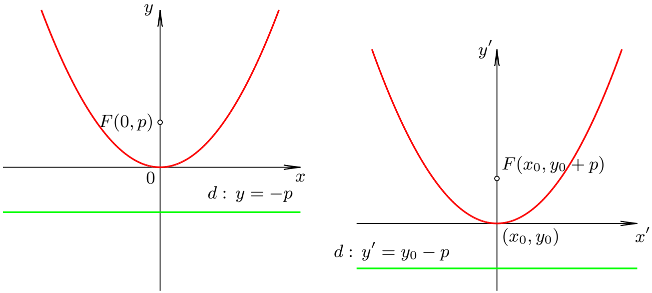
# Свођење криве на канонски облик




Слика 26: Свођење елипсе на канонски облик

- транслација
- ротација

# Свођење криве на канонски облик транслацијом




Слика 27: Транслација параболе

$$x' = x + x_0, \qquad y' = y + y_0$$

# Свођење криве на канонски облик ротацијом

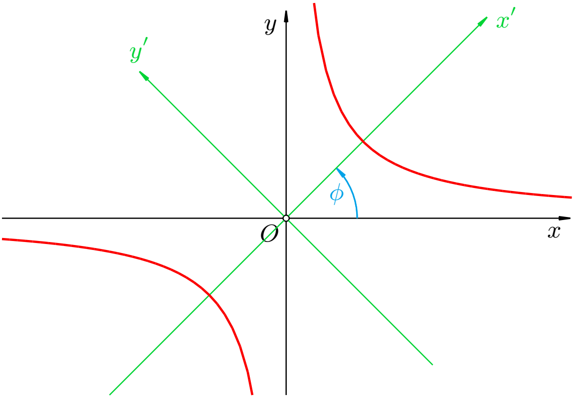
$$x = \cos\phi\, x' - \sin\phi\, y', \qquad y = \sin\phi\, x' + \cos\phi\, y'$$

$$\cot 2\phi = \frac{\cos 2\phi}{\sin 2\phi} = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}, \phi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos 2\phi = \frac{\cot 2\phi}{+\sqrt{1 + \cot^2 2\phi}}$$

$$\cos\phi = +\sqrt{\frac{1 + \cos 2\phi}{2}}, \qquad \sin\phi = +\sqrt{\frac{1 - \cos 2\phi}{2}}$$

# Пример: Ротација хиперболе




Слика 28: Хипербола $xy = 1$

# Безијерове криве

## Дефиниција 3.1

Нека су $P_0, P_1 \ldots P_n$, $n \geq 2$ тачке равни. Безијерова крива степена $n$ је:

$$\alpha_n(t) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} P_i = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) P_i, \quad t \in [0,1].$$

Тачке $P_i$ називају се контролне тачке, а полиноми $B_i(t)$ Бернштајнови полиноми или базне функције.
Полигонска линија $P_0 P_1 \ldots P_n$ се зове контролна полигонска линија.

# Безијерове криве на прозивољном интервалу

- $t \in [0, 1]$:

$$\alpha_n(t) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} P_i = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) P_i.$$

# Безијерове криве на прозивољном интервалу

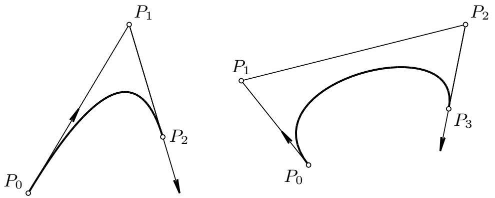
- $t \in [0,1]$:

$$\alpha_n(t) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} P_i = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) P_i.$$

- $u \in [a,b]$:

$$\alpha_n(u) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \left(\frac{u-a}{b-a}\right)^i \left(\frac{b-u}{b-a}\right)^{n-i} P_i.$$

# Безијерове криве 2. и 3. степена

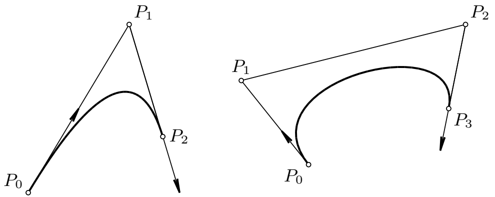



Слика 29: Безијерове криве степена 2 и 3

Крива 2. степена одређена је са три контролне тачке:

$$\alpha_2(t) = (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2, \quad t \in [0,1];$$

# Безијерове криве 2. и 3. степена




Слика 29: Безијерове криве степена 2 и 3

Крива 2. степена одређена је са три контролне тачке:

$$\alpha_2(t) = (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2, \quad t \in [0,1];$$

Крива 3. степена одређена је са четири контролне тачке:

$$\alpha_3(t) = (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t)P_2 + t^3 P_3, \quad t \in [0,1].$$

# Матрична репрезентација Безијерове криве

$$\alpha_2(t) = \begin{pmatrix}1, & t, & t^2\end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}.$$

### Пример 11

Извести формуле матричне репрезентације кубне Безијерове криве.

# Особине

- $\deg \alpha_n = n.$

# Особине

- $\deg \alpha_n = n$.
- $\alpha_n(0) = P_0, \quad \alpha_n(1) = P_n$.

# Особине

- $\deg \alpha_n = n$.
- $\alpha_n(0) = P_0, \quad \alpha_n(1) = P_n$.
- Тангентни вектор у $P_0$ је $\overrightarrow{P_0P_1}$, а у $P_n$ је $\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$.

# Особине

- $\deg \alpha_n = n$.
- $\alpha_n(0) = P_0, \quad \alpha_n(1) = P_n$.
- Тангентни вектор у $P_0$ је $\overrightarrow{P_0P_1}$, а у $P_n$ је $\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$.
- $P_k \to P_k + \vec{v}: \quad \bar{\alpha}_n(t) = \alpha_n(t) + B_{n,k}(t)\vec{v}$.

# Особине

- $\deg \alpha_n = n$.
- $\alpha_n(0) = P_0, \quad \alpha_n(1) = P_n$.
- Тангентни вектор у $P_0$ је $\overrightarrow{P_0P_1}$, а у $P_n$ је $\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$.
- $P_k \to P_k + \vec{v}: \quad \bar{\alpha}_n(t) = \alpha_n(t) + B_{n,k}(t)\vec{v}$.
- Особина ненегативности.

# Особине

- $\deg \alpha_n = n$.
- $\alpha_n(0) = P_0, \quad \alpha_n(1) = P_n$.
- Тангентни вектор у $P_0$ je $\overrightarrow{P_0P_1}$, а у $P_n$ je $\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$.
- $P_k \to P_k + \vec{v}: \quad \bar{\alpha}_n(t) = \alpha_n(t) + B_{n,k}(t)\vec{v}$.
- Особина ненегативности.
- Особина конвексног омотача.

# Особине

- $\deg \alpha_n = n$.
- $\alpha_n(0) = P_0, \quad \alpha_n(1) = P_n$.
- Тангентни вектор у $P_0$ је $\overrightarrow{P_0P_1}$, а у $P_n$ је $\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$.
- $P_k \to P_k + \vec{v}: \quad \bar{\alpha}_n(t) = \alpha_n(t) + B_{n,k}(t)\vec{v}$.
- Особина ненегативности.
- Особина конвексног омотача.
- Особина мање варијације.

# Особине

- $\deg \alpha_n = n$.
- $\alpha_n(0) = P_0, \quad \alpha_n(1) = P_n$.
- Тангентни вектор у $P_0$ je $\overrightarrow{P_0P_1}$, a y $P_n$ je $\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$.
- $P_k \to P_k + \vec{v}: \quad \bar{\alpha}_n(t) = \alpha_n(t) + B_{n,k}(t)\vec{v}$.
- Особина ненегативности.
- Особина конвексног омотача.
- Особина мање варијације.
- Афина инваријантност.

# Особине

- $\deg \alpha_n = n$.
- $\alpha_n(0) = P_0, \quad \alpha_n(1) = P_n$.
- Тангентни вектор у $P_0$ је $\overrightarrow{P_0P_1}$, а у $P_n$ је $\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$.
- $P_k \to P_k + \vec{v}: \quad \bar{\alpha}_n(t) = \alpha_n(t) + B_{n,k}(t)\vec{v}$.
- Особина ненегативности.
- Особина конвексног омотача.
- Особина мање варијације.
- Афина инваријантност.

**Теорема 3.1**

Безијерова крива степена два је део параболе.

# Де-Кастељау алгоритам

Одређивање тачке на кривој $\alpha_n(t)$ за неко $t \in [0, 1]$:

1. $P_{00} = P_0,\ P_{01} = P_1, \ldots, P_{0n-1} = P_{n-1},\ P_{0n} = P_n$

# Де-Кастељау алгоритам

Одређивање тачке на кривој $\alpha_n(t)$ за неко $t \in [0, 1]$:

1. $P_{00} = P_0,\ P_{01} = P_1, \ldots, P_{0n-1} = P_{n-1},\ P_{0n} = P_n$
2. $P_{1i} = (1-t)P_{0i} + tP_{0i+1},\ \ i = 0, \ldots, n-1$

# Де-Кастељау алгоритам

Одређивање тачке на кривој $\alpha_n(t)$ за неко $t \in [0,1]$:

1. $P_{00} = P_0,\ P_{01} = P_1, \dots, P_{0n-1} = P_{n-1},\ P_{0n} = P_n$
2. $P_{1i} = (1-t)P_{0i} + tP_{0i+1},\ \ i = 0, \dots, n-1$

   $\vdots$

# Де-Кастељау алгоритам

Одређивање тачке на кривој $\alpha_n(t)$ за неко $t \in [0,1]$:

1. $P_{00} = P_0,\ P_{01} = P_1, \dots, P_{0n-1} = P_{n-1},\ P_{0n} = P_n$
2. $P_{1i} = (1-t)P_{0i} + tP_{0i+1},\ \ i = 0, \dots, n-1$

   $\vdots$
3. $P_{ki} = (1-t)P_{k-1i} + tP_{k-1i+1},\ \ i = 0, \dots, n-k$

# Де-Кастељау алгоритам

Одређивање тачке на кривој $\alpha_n(t)$ за неко $t \in [0,1]$:

1. $P_{00} = P_0,\ P_{01} = P_1, \ldots, P_{0n-1} = P_{n-1},\ P_{0n} = P_n$
2. $P_{1i} = (1-t)P_{0i} + tP_{0i+1},\ \ i = 0, \ldots, n-1$

   $\vdots$
3. $P_{ki} = (1-t)P_{k-1i} + tP_{k-1i+1},\ \ i = 0, \ldots, n-k$
4. $P_{n0} = (1-t)P_{n-1\,0} + tP_{n-1\,1}$

# Де-Кастељау алгоритам

Одређивање тачке на кривој $\alpha_n(t)$ за неко $t \in [0,1]$:

1. $P_{00} = P_0,\ P_{01} = P_1, \ldots, P_{0n-1} = P_{n-1},\ P_{0n} = P_n$
2. $P_{1i} = (1-t)P_{0i} + tP_{0i+1},\ \ i = 0, \ldots, n-1$

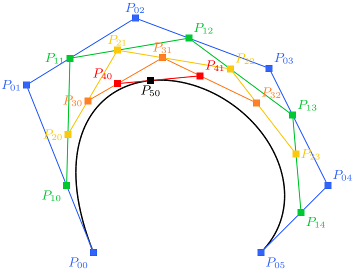
   $\vdots$
3. $P_{ki} = (1-t)P_{k-1i} + tP_{k-1i+1},\ \ i = 0, \ldots, n-k$
4. $P_{n0} = (1-t)P_{n-1\,0} + tP_{n-1\,1}$

$P_{n-1\,0}P_{n-1\,1}$ – тангента на криву у тачки $t$

# Де-Кастељау алгоритам

## Пример 12

Показати да је де-Кастељау алгоритам коректан.



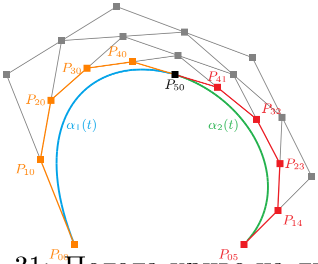

Слика 30: Де-Кастељау алгоритам за криву 5. степена и $t = 0.4$

- Цртање криве 5. степена

# Подела криве на два дела

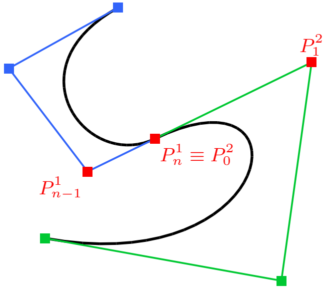
Криву $\alpha$ делимо на две криве $\alpha_1$ и $\alpha_2$:

$$\alpha_1 : P_0 = P_{00}, P_{10}, P_{20}, \ldots P_{n0} = \alpha(t),$$
$$\alpha_2 : \alpha(t) = P_{n0}, P_{n-11}, P_{n-22}, \ldots, P_{0n} = P_n.$$




Слика 31: Подела криве на два дела

# Глатко спајање кривих

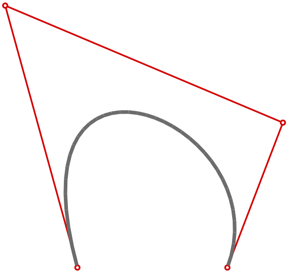



Слика 32: Глатко спајање кривих

# Повећање степена криве

$$\alpha_n(t): \; P_0, \ldots, P_n, \quad \bar{\alpha}_{n+1}(t):$$

$$Q_0 = P_0, \; Q_i = \frac{i}{n+1} P_{i-1} + \left(1 - \frac{i}{n+1}\right) P_i, \; 1 \leq i \leq n, \; Q_{n+1} = P_n.$$

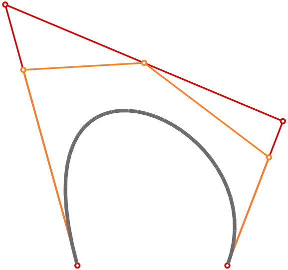


Слика 33: Повећање степена Безијерове криве

# Повећање степена криве

$$\alpha_n(t): \; P_0, \ldots, P_n, \quad \bar{\alpha}_{n+1}(t):$$

$$Q_0 = P_0, \; Q_i = \frac{i}{n+1} P_{i-1} + \left(1 - \frac{i}{n+1}\right) P_i, \; 1 \leq i \leq n, \; Q_{n+1} = P_n.$$

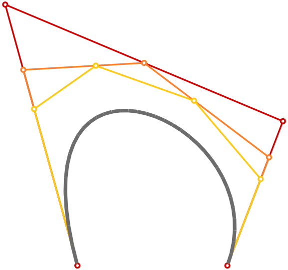


Слика 33: Повећање степена Безијерове криве

# Повећање степена криве

$$\alpha_n(t): \; P_0, \ldots, P_n, \quad \bar{\alpha}_{n+1}(t):$$

$$Q_0 = P_0, \; Q_i = \frac{i}{n+1} P_{i-1} + \left(1 - \frac{i}{n+1}\right) P_i, \; 1 \le i \le n, \; Q_{n+1} = P_n.$$

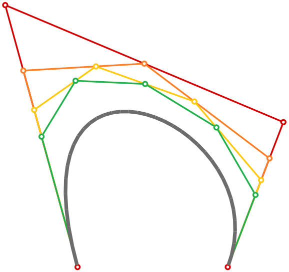


Слика 33: Повећање степена Безијерове криве

# Повећање степена криве

$$\alpha_n(t): \ P_0, \ldots, P_n, \quad \bar{\alpha}_{n+1}(t):$$

$$Q_0 = P_0, \ Q_i = \frac{i}{n+1} P_{i-1} + \left(1 - \frac{i}{n+1}\right) P_i, \ \ 1 \leq i \leq n, \ Q_{n+1} = P_n.$$

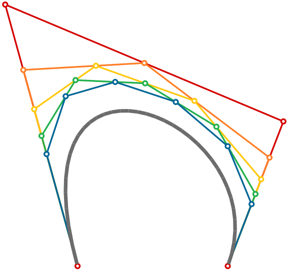


Слика 33: Повећање степена Безијерове криве

# Повећање степена криве

$$\alpha_n(t): \ P_0, \ldots, P_n, \quad \bar{\alpha}_{n+1}(t):$$

$$Q_0 = P_0, \ Q_i = \frac{i}{n+1} P_{i-1} + \left(1 - \frac{i}{n+1}\right) P_i, \ \ 1 \le i \le n, \ Q_{n+1} = P_n.$$

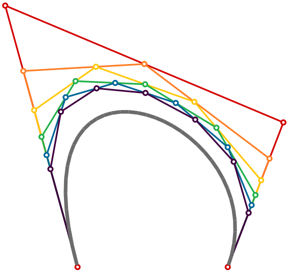


Слика 33: Повећање степена Безијерове криве

# Повећање степена криве

$$\alpha_n(t): \ P_0, \dots, P_n, \quad \bar{\alpha}_{n+1}(t):$$

$$Q_0 = P_0, \ Q_i = \frac{i}{n+1} P_{i-1} + \left(1 - \frac{i}{n+1}\right) P_i, \ 1 \leq i \leq n, \ Q_{n+1} = P_n.$$



Слика 33: Повећање степена Безијерове криве

# Примери

## Пример 13

а) Одредити Безијерову криву $\alpha_2(t)$ чије су контролне тачке $P_0(1,1)$, $P_1(-1,0)$, $P_2(1,-1)$.

б) Одредити једначину тангенте на криву $\alpha_2(t)$ у тачки $t_0 = 0.5$ и показати да је тангента паралелна са правом $P_0P_2$.

в) Повећати степен криве за 1.

г) Одредити једначину тангенте на криву $\bar{\alpha}_3(t)$ у тачки $t_0 = 0.5$. Да ли је тангента паралелна са правом $\bar{P}_0\bar{P}_3$?

# Рационалне Безијерове (RB) krive

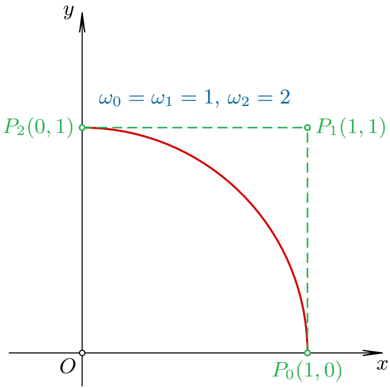
Рационална Безијерова крива степена $n$ са контролним тачкама $P_0, \dots, P_n$ и тежинама $\omega_0, \dots, \omega_n > 0$ је дата параметризацијом:

$$r_n(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n} \omega_i B_{i,n}(t) P_i}{\sum_{i=0}^{n} \omega_i B_{i,n}(t)}, \quad t \in [0, 1],$$

где су $B_{i,n}(t)$ Бернштајнови полиноми.

# Део круга као RB-kriva

## Пример 14




Слика 34: Четвртина круга: $x = \cos\theta,\ y = \sin\theta,\ \theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

као RB-kriva: $x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2},\ y = \dfrac{2t}{1+t^2},\ t \in [0,1]$.