

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Геометрија И–смер

део 2: Афине трансформације и пројекције

Тијана Шукиловић

2. новембар 2016

Дефиниција афиног пресликавања

Дефиниција 1.1

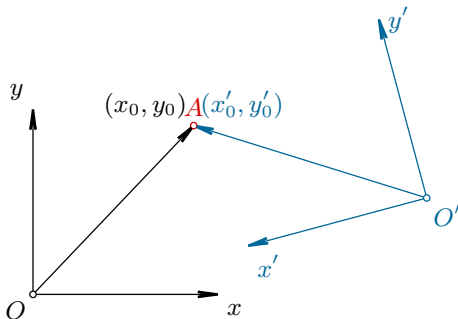
Нека је $\bar{f} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ линеарно пресликавање векторског простора који је придружен простору тачака \mathbb{E} .

Афино пресликавање $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ је пресликавање тачака које је индуковано пресликавањем \bar{f} вектора у смислу да је:

$$f(M) = M', \quad f(N) = N' \quad \iff \quad \bar{f}(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{M'N'}.$$

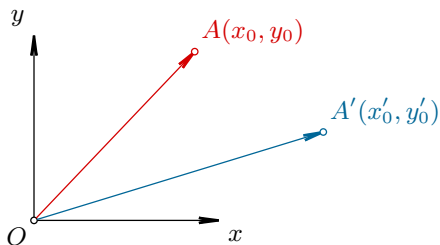
Анимација: Афине трансформације простора

Пасивно и активно гледиште



Слика 1: Пасивно гледиште

Пасивно и активно гледиште



Слика 1: Активно гледиште

Афина пресликавања равни

Дефиниција 2.1

Афино пресликавање равни \mathbb{E}^2 :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad \det(a_{ij}) \neq 0.$$

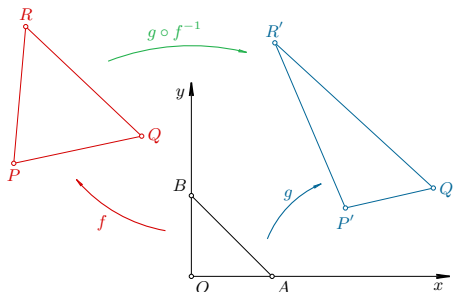
слике базних вектора

слика координатног
почетка

Особине афиних пресликавања

Теорема 2.1

Постоји јединствено афино пресликавање равни које пресликава три неколинеарне тачке P, Q, R у три неколинеарне тачке P', Q', R' , редом.



Слика 2: Доказ теореме

Особине афиних пресликавања

Теорема 2.2 (Особине афиних пресликавања равни)

- Пресликавају праве у праве;

Особине афиних пресликавања

Теорема 2.2 (Особине афиних пресликавања равни)

- Пресликавају праве у праве;
- Чувају размеру колинеарних дужи;

Особине афиних пресликавања

Теорема 2.2 (Особине афиних пресликавања равни)

- Пресликавају праве у праве;
- Чувају размеру колинеарних дужи;
- Чувају паралелност правих;

Особине афиних пресликавања

Теорема 2.2 (Особине афиних пресликавања равни)

- Пресликавају праве у праве;
- Чувају размеру колинеарних дужи;
- Чувају паралелност правих;
- Однос површина слике и оригинала једнак је

$$\frac{P(\mathcal{F}')}{P(\mathcal{F})} = |\det(a_{ij})|;$$

Особине афиних пресликавања

Теорема 2.2 (Особине афиних пресликавања равни)

- Пресликавају праве у праве;
- Чувају размеру колинеарних дужи;
- Чувају паралелност правих;
- Однос површина слике и оригинала једнак је
$$\frac{P(\mathcal{F}')}{P(\mathcal{F})} = |\det(a_{ij})|;$$
- Пресликавања за која је $\det(a_{ij}) > 0$ чувају оријентацију, а за која је $\det(a_{ij}) < 0$ мењају оријентацију равни.

Примери

Пример 2

Дате су тачке $A(-1, -1)$, $B(1, -1)$, $C(1, 1)$, $D(-1, 1)$; $A'(4, 5)$, $B'(8, 7)$, $C'(6, 9)$, $D'(2, 7)$.

- Одредити једначине афиног пресликавања које пресликава квадрат $ABCD$ у паралелограм $A'B'C'D'$.
- Одредити једначину слике круга уписаног у квадрат. Која је то крива?
- Колика је површина слике круга?
- Да ли пресликавање чува оријентацију?

Представљање афиних пресликавања матрицама

A – линеарни део

b – транслаторни део

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

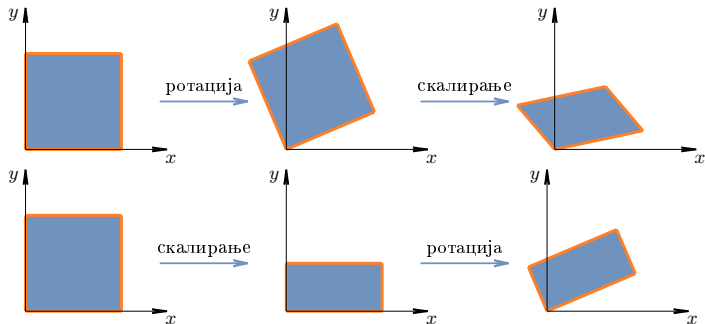
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

A_b

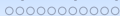
Представљање афиних пресликавања матрицама

Теорема 2.3

Производ матрица A_b одговара композицији афиних пресликавања.



Слика 3: Афина пресликавања не комутирају!



Транслација

Транслација $\mathcal{T}_{\vec{b}}$ за вектор $\vec{b}(b_1, b_2)$ дата је формулама:

$$x' = x + b_1,$$

$$y' = y + b_2,$$

или у матричном облику:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Транслација

Транслација $\mathcal{T}_{\vec{b}}$ за вектор $\vec{b}(b_1, b_2)$ дата је формулама:

$$x' = x + b_1,$$

$$y' = y + b_2,$$

или у матричном облику:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

- Како се представља линеарни део транслације?

Транслација

Транслација $\mathcal{T}_{\vec{b}}$ за вектор $\vec{b}(b_1, b_2)$ дата је формулама:

$$x' = x + b_1,$$

$$y' = y + b_2,$$

или у матричном облику:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

- Како се представља линеарни део транслације?
- Шта је композиција транслација?

Транслација

Транслација $\mathcal{T}_{\vec{b}}$ за вектор $\vec{b}(b_1, b_2)$ дата је формулама:

$$x' = x + b_1,$$

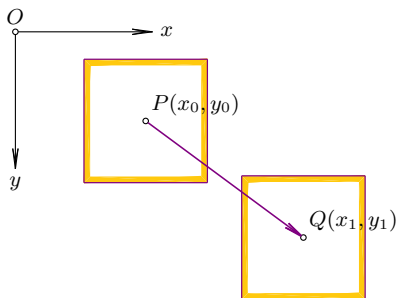
$$y' = y + b_2,$$

или у матричном облику:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

- Како се представља линеарни део транслације?
- Шта је композиција транслација?
- Да ли транслације комутирају?

Примери



Слика 4: „Pan” алатка

Пример 3

Представити као афину трансформацију „pan” алатку: Ако је миш притиснут у $P(x_0, y_0)$, а отпуштен у тачки $Q(x_1, y_1)$ слика се транслира из P у Q .

Ротација

Ротација око координатног почетка, за угао $\phi \in [0, 2\pi)$:

$$\mathcal{R}_\phi : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Ротација

Ротација око координатног почетка, за угао $\phi \in [0, 2\pi)$:

$$\mathcal{R}_\phi : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Ротација око произвољне тачке $Q(q_1, q_2)$ за угао ϕ :

$$\mathcal{R}_{Q,\phi} = \mathcal{T}_{\vec{OQ}} \circ \mathcal{R}_\phi \circ \mathcal{T}_{\vec{QO}}.$$

Ротација

Ротација око координатног почетка, за угао $\phi \in [0, 2\pi)$:

$$\mathcal{R}_\phi : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Ротација око произвољне тачке $Q(q_1, q_2)$ за угао ϕ :

$$\mathcal{R}_{Q,\phi} = \mathcal{T}_{\vec{OQ}} \circ \mathcal{R}_\phi \circ \mathcal{T}_{\vec{QO}}.$$

Пример 4

Одредити 3×3 матрицу ротације око тачке $S(1, -2)$ за угао од $\frac{2\pi}{3}$, као и формуле тог пресликавања.

У коју тачку се пресликава координатни почетак при овој ротацији?

Матрица ротације

$$R_\phi := \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \quad \text{— матрица ротације за угао } \phi.$$

Теорема 2.4

Особине матрице ротације:

- $(R_\phi)^{-1} = R_{-\phi} = (R_\phi)^T$;
- $\det R_\phi = 1$;
- $R_\phi R_\theta = R_{\phi+\theta} = R_\theta R_\phi$.

Рефлексија у односу на праву

Рефлексија у односу на праву p_0 кроз координатни почетак, која гради угао $\frac{\phi}{2}$ са x -осом:

$$\mathcal{S}_{p_0} : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ \sin \phi & -\cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Рефлексија у односу на праву

Рефлексија у односу на праву p_0 кроз координатни почетак, која гради угао $\frac{\phi}{2}$ са x -осом:

$$\mathcal{S}_{p_0} : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ \sin \phi & -\cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Рефлексија у односу на произвољну праву $p \parallel p_0$:

$$\mathcal{S}_p = \mathcal{T}_{\vec{OQ}} \circ \mathcal{S}_{p_0} \circ \mathcal{T}_{\vec{QO}}.$$

Рефлексија у односу на праву

Рефлексија у односу на праву p_0 кроз координатни почетак, која гради угао $\frac{\phi}{2}$ са x -осом:

$$\mathcal{S}_{p_0} : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ \sin \phi & -\cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Рефлексија у односу на произвољну праву $p \parallel p_0$:

$$\mathcal{S}_p = \mathcal{T}_{\overrightarrow{OQ}} \circ \mathcal{S}_{p_0} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{QO}}.$$

Пример 5

Одредити формуле рефлексије у односу на праву:

а) $x = -1$; б) $y = 3$; в) $4x - 3y + 6 = 0$.

Матрица рефлексije

$$S_\phi := \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ \sin \phi & -\cos \phi \end{pmatrix} - \text{матрица рефлексije.}$$

Теорема 2.5

Особине матрице рефлексije:

- $(S_\phi)^{-1} = (S_\phi)^T$;
- $S_\phi^2 = Id$;
- $\det S_\phi = -1$;
- $S_\phi S_\theta = R_{\phi-\theta}$.

Скалирање

Скалирање у правцу координатних оса, са центром у координатном почетку и коефицијентима $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$:

$$\mathcal{H}_{\lambda_1, \lambda_2} : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Скалирање

Скалирање у правцу координатних оса, са центром у координатном почетку и коефицијентима $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$:

$$\mathcal{H}_{\lambda_1, \lambda_2} : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Скалирање са центром у произвољној тачки:

$$\mathcal{H}_{Q, \lambda_1, \lambda_2} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{OQ}} \circ \mathcal{H}_{\lambda_1, \lambda_2} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{QO}}.$$

Примери

- За које вредности λ_1 и λ_2 је скалирање $\mathcal{H}_{\lambda_1, \lambda_2}$ рефлексија у односу на x -осу (y -осу)?

Примери

- За које вредности λ_1 и λ_2 је скалирање $\mathcal{H}_{\lambda_1, \lambda_2}$ рефлексija у односу на x -осу (y -осу)?
- За које вредности λ_1 и λ_2 је скалирање $\mathcal{H}_{Q, \lambda_1, \lambda_2}$ централна рефлексija у односу на тачку Q ?

Примери

- За које вредности λ_1 и λ_2 је скалирање $\mathcal{H}_{\lambda_1, \lambda_2}$ рефлексija у односу на x -осу (y -осу)?
- За које вредности λ_1 и λ_2 је скалирање $\mathcal{H}_{Q, \lambda_1, \lambda_2}$ централна рефлексija у односу на тачку Q ?
- За које вредности λ_1 и λ_2 је скалирање хомотетија?

Примери

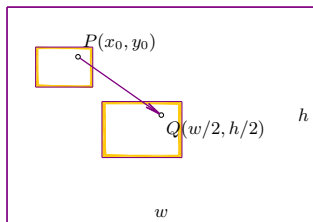
- За које вредности λ_1 и λ_2 је скалирање $\mathcal{H}_{\lambda_1, \lambda_2}$ рефлексija у односу на x -осу (y -осу)?
- За које вредности λ_1 и λ_2 је скалирање $\mathcal{H}_{Q, \lambda_1, \lambda_2}$ централна рефлексija у односу на тачку Q ?
- За које вредности λ_1 и λ_2 је скалирање хомотетија?
- Да ли скалирање чува однос дужине и ширине, углове?
А хомотетија?

Примери

Пример 6

Представити као афине трансформације следеће догађаје:

- „*Zoom in*”: Кликом миша у тачку $P(x_0, y_0)$, слика се увећава λ пута, а тачка P постаје центар екрана резолуције $w \times h$.



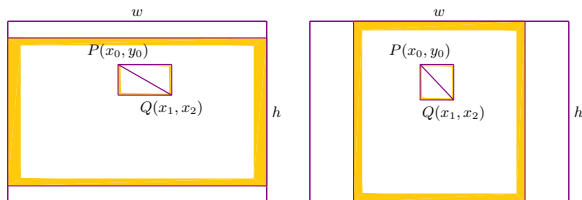
Слика 5: „*Zoom in*” алатка

Примери

Пример 6

Представити као афине трансформације следеће догађаје:

- „*Zoom to window*”: Миш је притиснут у тачки $P(x_0, y_0)$, а отпуштен у тачки $Q(x_1, y_1)$. Увећати прозор са дијагоналном PQ преко целог екрана. При томе водити рачуна да се увећана слика уклопи у екран или по ширини, или по висини – у зависности од пропорција прозора. Сматрати да је екран резолуције $1920 : 1080 = 16 : 9$.



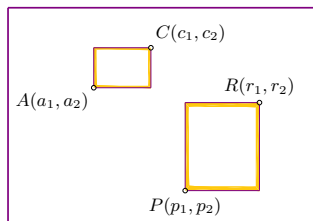
Слика 5: „*Zoom to window*” алатка

Примери

Пример 6

Представити као афине трансформације следеће догађаје:

- Пресликати прозор чије су лево-доње теме $A(a_1, a_2)$ и горње-десно теме $C(c_1, c_2)$ у прозор одређен дијагоналним теменима $P(p_1, p_2)$ и $R(r_1, r_2)$.



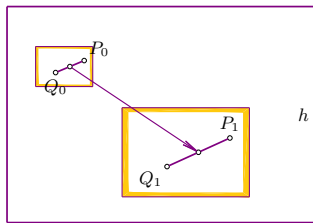
Слика 5: Прозор

Примери

Пример 6

Представити као афине трансформације следеће догађаје:

- „*Pinch to zoom*”: У почетном тренутку додир једног прста је регистрован у тачки P_0 а другог у тачки Q_0 . У следећем тренутку први прст се налази у тачки P_1 , а други у тачки Q_1 . Увећати слику за однос дужина $\lambda = P_1Q_1 : P_0Q_0$, при чему се средиште дужи P_0Q_0 пресликава у средиште дужи P_1Q_1 .



Слика 5: „*Pinch to zoom*” алатка.

Смицање

Смицање са коефицијентом λ у правцу x -осе:

$$\mathcal{S}_x(\lambda) : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Смицање

Смицање са коефицијентом λ у правцу x -осе:

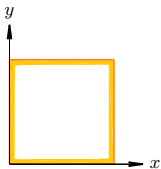
$$\mathcal{S}_x(\lambda) : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Смицање са коефицијентом λ у правцу y -осе:

$$\mathcal{S}_y(\lambda) : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Реализација ротације помоћу смицање

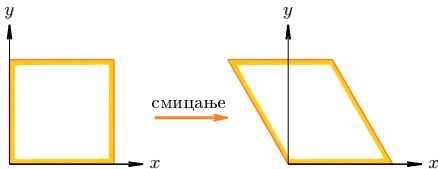
$$\begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\cos \phi - 1}{\sin \phi} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sin \phi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\cos \phi - 1}{\sin \phi} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Слика 6: Реализација ротације помоћу три смицања

Реализација ротације помоћу смицање

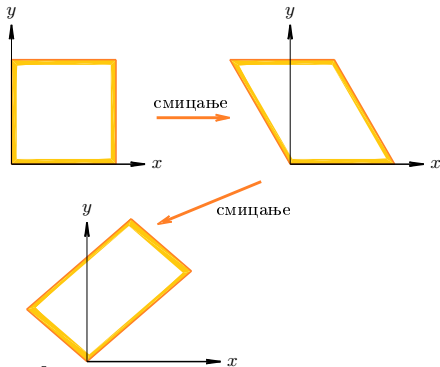
$$\begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\cos \phi - 1}{\sin \phi} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sin \phi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\cos \phi - 1}{\sin \phi} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Слика 6: Реализација ротације помоћу три смицања

Реализација ротације помоћу смицање

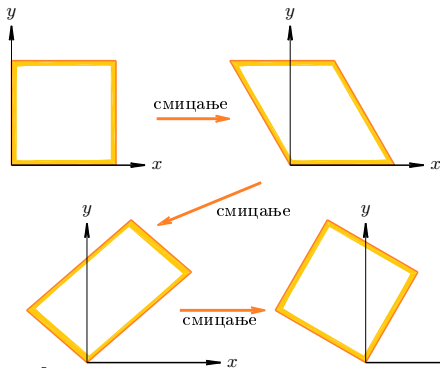
$$\begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\cos \phi - 1}{\sin \phi} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sin \phi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\cos \phi - 1}{\sin \phi} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Слика 6: Реализација ротације помоћу три смицања

Реализација ротације помоћу смицање

$$\begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\cos \phi - 1}{\sin \phi} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sin \phi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\cos \phi - 1}{\sin \phi} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Слика 6: Реализација ротације помоћу три смицања

Изометрије

Дефиниција 2.2

Пресликавања која чувају дужину у еуклидском простору \mathbb{E} произвољне димензије називају се **изометрије**.

Изометрије

Дефиниција 2.2

Пресликавања која чувају дужину у еуклидском простору \mathbb{E}^n произвољне димензије називају се **изометрије**.

Изометрије које чувају оријентацију зову се **кретања**.

Изометрије

Дефиниција 2.2

Пресликавања која чувају дужину у еуклидском простору \mathbb{E}^n произвољне димензије називају се **изометрије**.

Изометрије које чувају оријентацију зову се **кретања**.

Теорема 2.6

Транслација, ротација око произвољне тачке и рефлексација у односу на произвољну праву су изометрије равни.

Изометрије

Дефиниција 2.2

Пресликавања која чувају дужину у еуклидском простору \mathbb{E}^n произвољне димензије називају се **изометрије**.

Изометрије које чувају оријентацију зову се **кретања**.

Теорема 2.6

Транслација, ротација око произвољне тачке и рефлексација у односу на произвољну праву су изометрије равни.

Које трансформације равни су кретања?

Афина пресликавања простора

Тачка $M(x, y, z)$ простора се пресликава у тачку $M'(x', y', z')$ по правилу:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad \det(a_{ij}) \neq 0.$$

Афина пресликавања простора

Тачка $M(x, y, z)$ простора се пресликава у тачку $M'(x', y', z')$ по правилу:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad \det(a_{ij}) \neq 0.$$

Пресликавање се представља 4×4 матрицом:

$$A_b := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Изометрије простора

Теорема 3.1

Свака изометрија простора \mathbb{E}^n је афино пресликавање.

Изометрије простора

Теорема 3.1

Свака изометрија простора \mathbb{E}^n је афино пресликавање.

Теорема 3.2

Афино пресликавање f је изометрија акко $AA^T = A^T A = E$.

Изометрије простора

Теорема 3.1

Свака изометрија простора \mathbb{E}^n је афино пресликавање.

Теорема 3.2

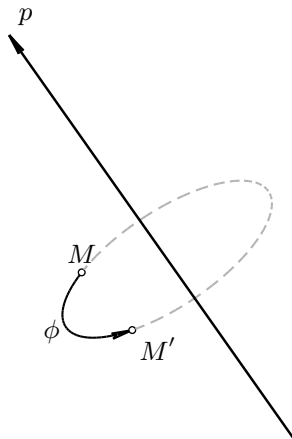
Афино пресликавање f је изометрија акко $AA^T = A^T A = E$.

Теорема 3.3 (Особине изометрија простора)

Следећа тврђења су еквивалентна за $f : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$:

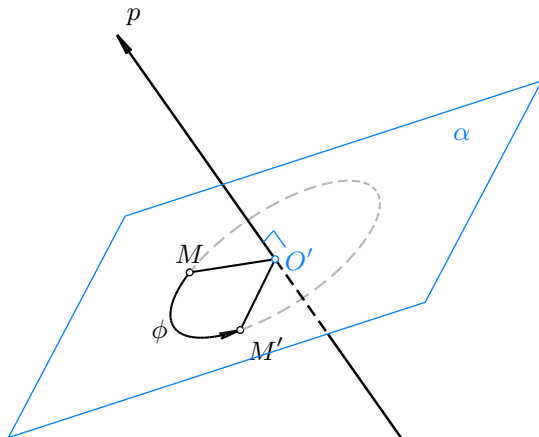
- f је изометрија (чува дужине);
- f чува скаларни производ;
- f пресликава ортонормирану базу у ортонормирану базу.

Ротације око праве у простору



Слика 7: Ротација око праве p за угао ϕ

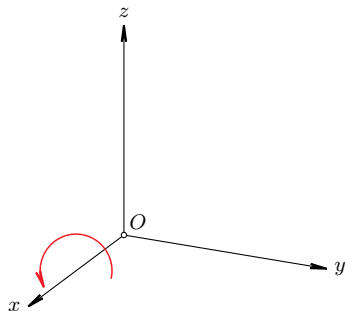
Ротације око праве у простору



Слика 7: Ротација око праве p за угао ϕ

Ротација око координатних оса

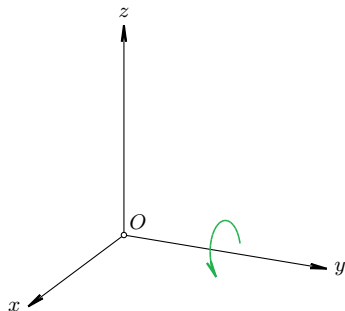
$$[\mathcal{R}_{Ox}(\phi)]_e = R_x(\phi) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$$



Слика 8: Ротација око x -осе

Ротација око координатних оса

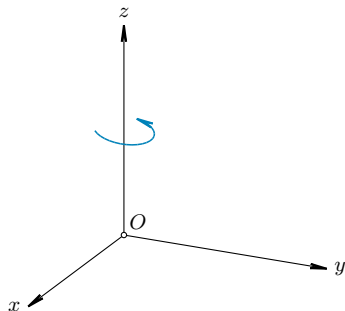
$$[\mathcal{R}_{Oy}(\theta)]_e = R_y(\theta) := \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}$$



Слика 8: Ротација око y -осе

Ротација око координатних оса

$$[\mathcal{R}_{Oz}(\psi)]_e = R_z(\psi) := \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Слика 8: Ротација око z -осе

Формуле ротације око праве у простору

Теорема 3.4 (Формула Родригеза)

Матрица ротације $[\mathcal{R}_p(\phi)]_e$, у стандардној бази e , за угао ϕ око праве p_0 која садржи координатни почетак је:

$$[\mathcal{R}_{p_0}(\phi)]_e = pp^T + \cos \phi (E - pp^T) + \sin \phi p_{\times},$$

где је p_{\times} матрица векторског множења јединичним вектором p :

$$p_{\times} := \begin{pmatrix} 0 & -p_3 & p_2 \\ p_3 & 0 & -p_1 \\ -p_2 & p_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ротација око произвољне праве

Ротација око произвољне праве $p \parallel p_0$, $P \in p$:

$$\mathcal{R}_p(\phi) = \mathcal{T}_{\overrightarrow{OP}} \circ \mathcal{R}_{p_0}(\phi) \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{PO}}.$$

Ротација око произвољне праве

Ротација око произвољне праве $p \parallel p_0$, $P \in p$:

$$\mathcal{R}_p(\phi) = \mathcal{T}_{\vec{OP}} \circ \mathcal{R}_{p_0}(\phi) \circ \mathcal{T}_{\vec{PO}}.$$

Пример 7

Одредити формуле ротације за угао $\phi = \frac{3\pi}{2}$ око праве p у простору која садржи тачку $Q(1, 0, 0)$ и има вектор правца $\vec{p} = (1, 2, 2)$.

Рефлексија у односу на раван

Теорема 3.5

Матрица рефлексије $[\mathcal{S}_\alpha]_e$, у стандардној бази e , у односу на раван α која садржи координатни почетак O , и чији јединични нормални вектор има колону координата p , је дата са:

$$[\mathcal{S}_\alpha]_e = E - 2pp^T.$$

Рефлексија у односу на раван

Теорема 3.5

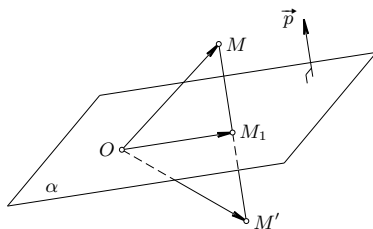
Матрица рефлексије $[\mathcal{S}_\alpha]_e$, у стандардној бази e , у односу на раван α која садржи координатни почетак O , и чији јединични нормални вектор има колону координата p , је дата са:

$$[\mathcal{S}_\alpha]_e = E - 2pp^T.$$

Ако раван $\beta \parallel \alpha$ не садржи координатни почетак, него неку тачку B , тада се рефлексија \mathcal{S}_β представља са:

$$\mathcal{S}_\beta = \mathcal{T}_{\overrightarrow{OB}} \circ \mathcal{S}_\alpha \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{BO}}.$$

Примери



Слика 9: Рефлексија у односу на раван кроз O

Пример 8

Одредити формуле рефлексије у односу на раван

$$\alpha : 2x - y + 2z = 0.$$

Ојлерове теореме

Теорема 3.6 (I Ојлерова)

Свако кретање f простора \mathbb{E}^3 које има фиксну неку тачку O' је ротација око неке оријентисане праве p која садржи O' , за угао $\phi \in [0, 2\pi)$.

Ојлерове теореме

Теорема 3.6 (I Ојлерова)

Свако кретање f простора \mathbb{E}^3 које има фиксну неку тачку O' је ротација око неке оријентисане праве p која садржи O' , за угао $\phi \in [0, 2\pi)$.

Теорема 3.7 (II Ојлерова)

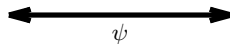
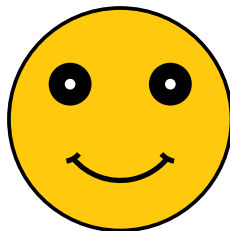
Свако кретање f простора \mathbb{E}^3 које чува координатни почетак може се представити као композиција три сопствене ротације око координатних оса:

$$f = \mathcal{R}_{Ox_2}(\phi) \circ \mathcal{R}_{Oy_1}(\theta) \circ \mathcal{R}_{Oz}(\psi),$$

где су $\psi, \phi \in [0, 2\pi), \theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, тзв. **Ојлерови или Тејт-Брајанови углови**.

Ојлерови углови

ψ – угао скретања (енг. yaw)

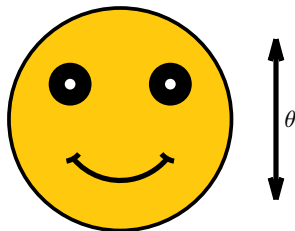


Слика 10: Скретање

Ојлерови углови

ψ – угао скретања (енг. yaw)

θ – угао пропињања (енг. pitch)



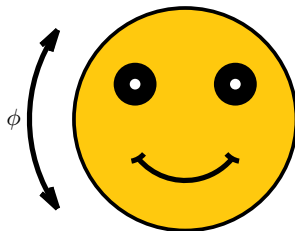
Слика 10: Пропињање

Ојлерови углови

ψ – угао скретања (енг. yaw)

θ – угао пропињања (енг. pitch)

ϕ – угао ваљања (енг. roll)



Слика 10: Ваљање

Веза сопствених и светских ротација

Анимација: Ојлерови углови

Веза сопствених и светских ротација

Анимација: Ојлерови углови

Пажња!!!

У II Ојлеровој теореме ротације се изводе у **сопственом координатном систему** (везаном за објекат).

Веза сопствених и светских ротација

Анимација: Ојлерови углови

Пажња!!!

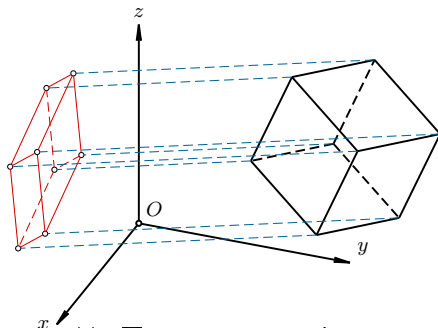
У II Ојлеровој теореме ротације се изводе у **сопственом координатном систему** (везаном за објекат).

Теорема 3.8 (Веза сопствених и светских ротација)

$$[\mathcal{R}_{Ox_2}(\phi) \circ \mathcal{R}_{Oy_1}(\theta) \circ \mathcal{R}_{Oz}(\psi)]_e = [f]_e = R_z(\psi)R_y(\theta)R_x(\phi).$$

Пројектовање

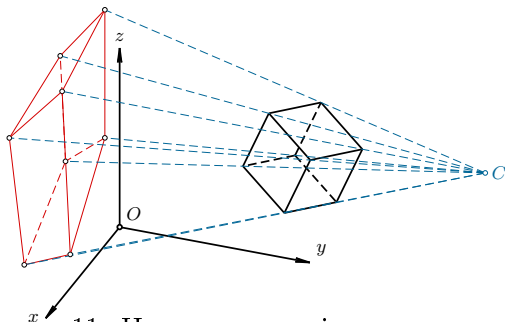
- $f : \mathbb{E}^3 \longrightarrow \mathbb{E}^2$
 - паралелно пројектовање (специјално: ортогонална пројекција)



Слика 11: Паралелно пројектовање

Пројектовање

- $f : \mathbb{E}^3 \longrightarrow \mathbb{E}^2$
 - паралелно пројектовање (специјално: ортогонална пројекција)
 - централно пројектовање



Слика 11: Централно пројектовање

Пројектовање

- $f : \mathbb{E}^3 \longrightarrow \mathbb{E}^2$
 - паралелно пројектовање (специјално: ортогонална пројекција)
 - централно пројектовање

Пројектовање

- $f : \mathbb{E}^3 \longrightarrow \mathbb{E}^2$
 - паралелно пројектовање (специјално: ортогонална пројекција)
 - централно пројектовање

- Да ли је f бијекција?

Пројектовање

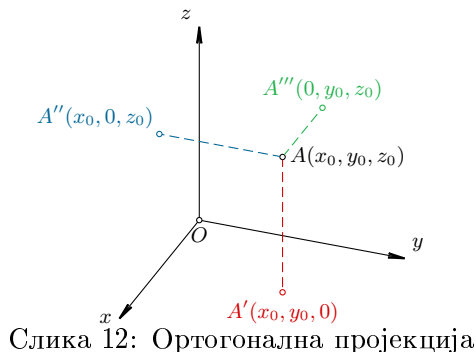
- $f : \mathbb{E}^3 \longrightarrow \mathbb{E}^2$
 - паралелно пројектовање (специјално: ортогонална пројекција)
 - централно пројектовање
- Да ли је f бијекција?
- Да ли је f изометрија

Пројектовање

- $f : \mathbb{E}^3 \longrightarrow \mathbb{E}^2$
 - паралелно пројектовање (специјално: ортогонална пројекција)
 - централно пројектовање

- Да ли је f бијекција?
- Да ли је f изометрија
- Да ли f чува колинеарност, паралелност, углове, средиште дужи?

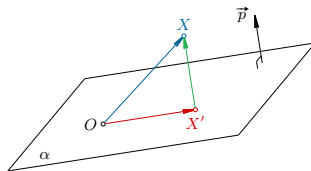
Ортогонална пројекција на координатне равни



Пример 9

Одредити ортогоналну пројекцију квадрата $ABCD$,
 $A(1, 2, -1)$, $B(-1, 0, 2)$, $D(3, 1, 1)$, на xy -раван.

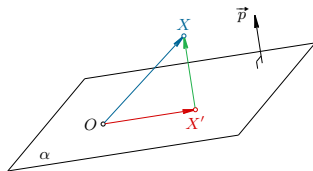
Ортогонална пројекција на произвољну раван



Слика 13: Ортогонална пројекција

$$X' = (E - pp^T)X, \quad p = [\vec{p}], \quad \vec{p} - \text{јединични}$$

Ортогонална пројекција на произвољну раван



Слика 13: Ортогонална пројекција

$$X' = (E - pp^T)X, \quad p = [\vec{p}], \quad \vec{p} - \text{јединични}$$

Пример 10

Одредити ортогоналну пројекцију квадрата из Примера 9 на раван $\alpha : 3y - z = 0$.

Пројекција сфере на раван

- Шта све може бити **ортогонална** пројекција сфере на раван?

Пројекција сфере на раван

- Шта све може бити **ортогонална** пројекција сфере на раван?
- Шта све може бити **централна** пројекција сфере на раван?

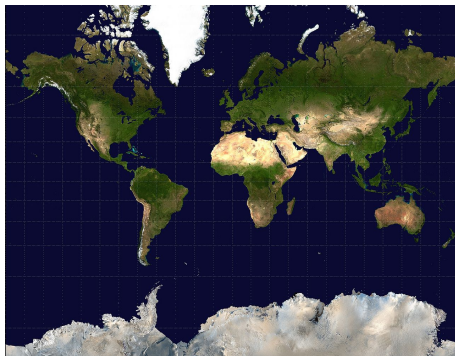
Пројекција сфере на раван

- Шта све може бити **ортогонална** пројекција сфере на раван?
- Шта све може бити **централна** пројекција сфере на раван?
- Картографске пројекције:

Пројекција сфере на раван

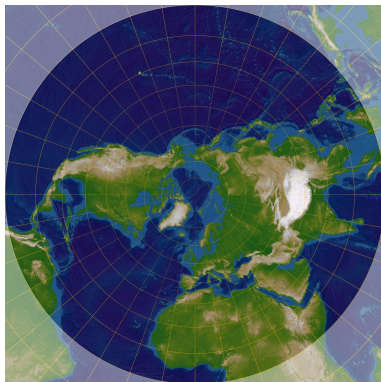
- Шта све може бити **ортогонална** пројекција сфере на раван?
- Шта све може бити **централна** пројекција сфере на раван?
- Картографске пројекције:
 - конформне (чувају углове)
 - еквивалентне (чувају однос површина)
 - еквидистантне (чувају растојања)

Конформне пројекције



Слика: Меркаторова пројекција

Конформне пројекције



Слика: Стереографска пројекција

Конформне пројекције



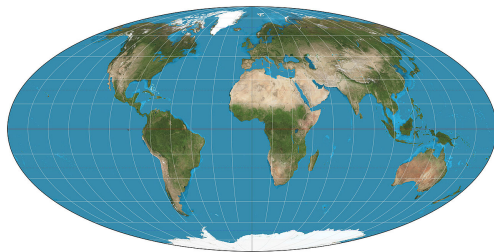
Слика: Ламбертова пројекција (конусна)

Еквивалентне пројекције



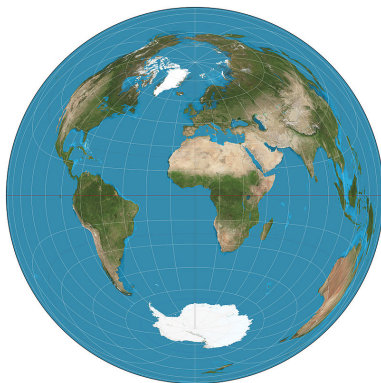
Слика: Бонеова пројекција

Еквивалентне пројекције



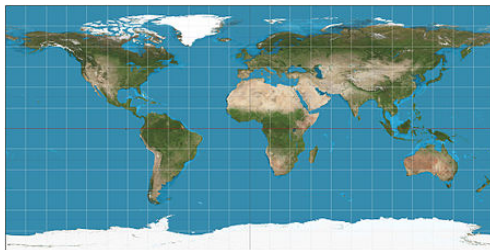
Слика: Молвеиде пројекција

Еквивалентне пројекције



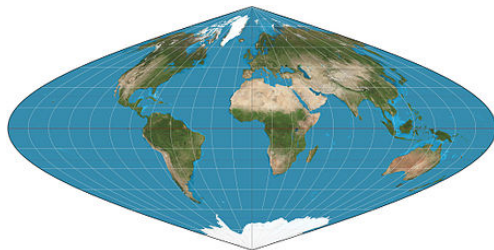
Слика: Ламбертова пројекција (азимутална)

Еквидистантне пројекције



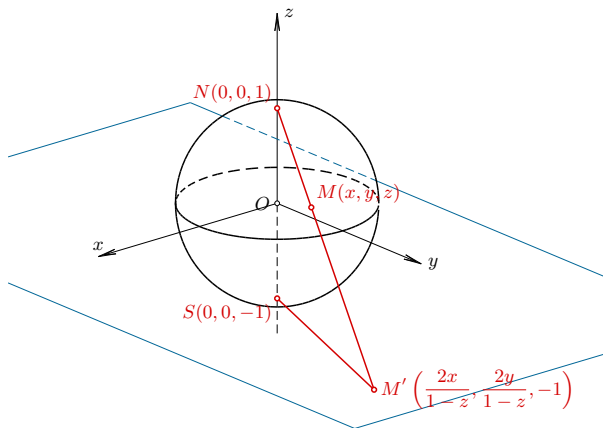
Слика: Географска пројекција (чува растојања дуж меридијана)

Еквидистантне пројекције



Слика: Синусоидална пројекција (чува растојања дуж паралела)

Стереографска пројекција



Слика 17: Стереографска пројекција са северног пола на раван $z = -1$

Особине стереографске пројекције

- Шта је слика круга који припада сфери, а садржи северни пол?
- Специјално, у шта се сликају паралеле?
- Шта је слика меридијана?
- Да ли се чувају углови?
- Да ли се чува однос површина?
- Да ли се чувају растојања дуж меридијана? А дуж паралела?