УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

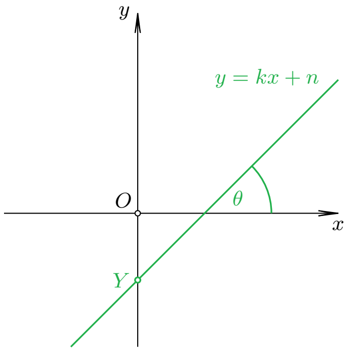
Геометрија И–смер

део 3: Аналитичка геометрија равни

Тијана Шукиловић

9. новембар 2015

Једначина праве у равни

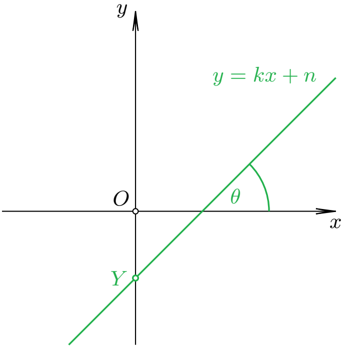


Слика 1: Експлицитна једначина

- Експлицитна једначина:

$$p:\ y = kx + n$$

Једначина праве у равни



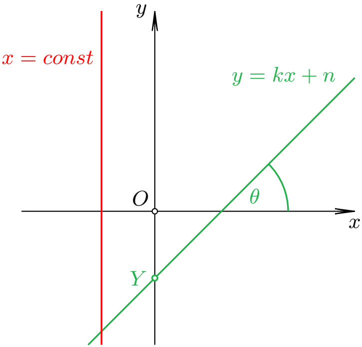
Слика 1: Експлицитна једначина

- Експлицитна једначина:

$$p: \; y = \boxed{k}\, x + \boxed{n}$$

$$k = \tan\theta \qquad n = |OY|$$

Једначина праве у равни



Слика 1: Експлицитна једначина

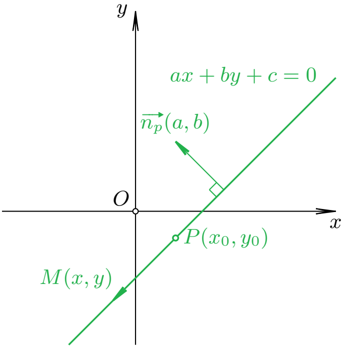
- Експлицитна једначина:

$$p:\ y = \boxed{k}\,x + \boxed{n}$$

$$k = \tan\theta \qquad n = |OY|$$

Вертикалне праве?

Једначина праве у равни

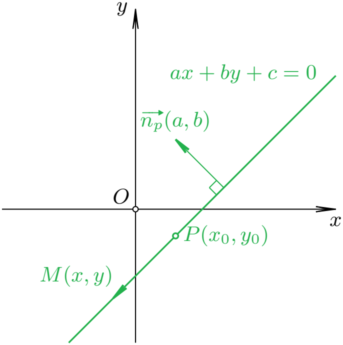


Слика 2: Имплицитна једначина

- Имплицитна једначина:

$$p:\ ax + by + c = 0$$

Једначина праве у равни



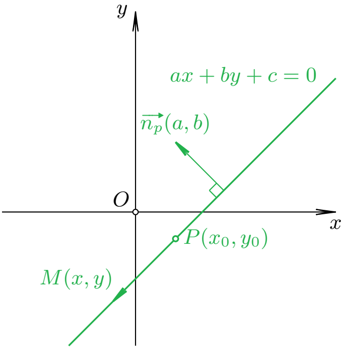
Слика 2: Имплицитна једначина

- Имплицитна једначина:

$$p : \boxed{a}\, x + \boxed{b}\, y + \boxed{c} = 0$$

$$\overrightarrow{n_p} \qquad c = -\overrightarrow{OP} \circ \overrightarrow{n_p}$$

Једначина праве у равни



Слика 2: Имплицитна једначина

- Имплицитна једначина:

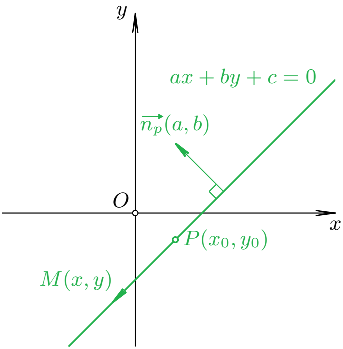
$$p : \boxed{a}\,x + \boxed{b}\,y + \boxed{c} = 0$$

$$\overrightarrow{n_p} \qquad\qquad c = -\overrightarrow{OP} \circ \overrightarrow{n_p}$$

$$|\overrightarrow{n_p}|^2 = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$$

Нормализована једначина

Једначина праве у равни

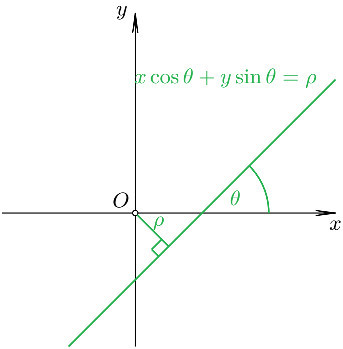


Слика 2: Имплицитна једначина

Пример 1

Одредити нормализовану једначину праве која садржи тачку $M(1,1)$ и чији је нормални вектор $\overrightarrow{n_p} = (4, -3)$.

Једначина праве у равни

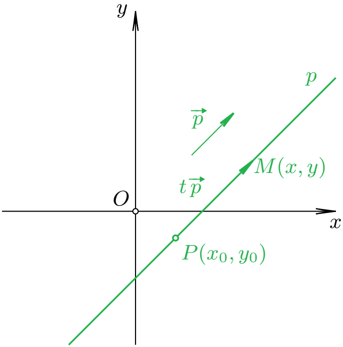


Слика 3: Нормална једначина

- Нормална једначина:

$$p:\ x\cos\theta + y\sin\theta = \rho$$

Једначина праве у равни

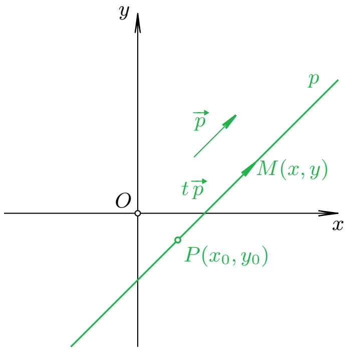


Слика 4: Параметарска једначина

- Параметарска једначина:

$$p: \ M(t) = P + t\overrightarrow{p}, \ t \in \mathbb{R}$$

Једначина праве у равни



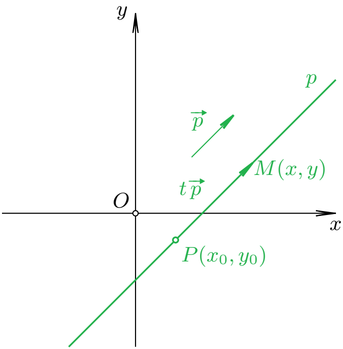
Слика 4: Параметарска једначина

- Параметарска једначина:

$$p:\ M(t) = P + t\,\boxed{\overrightarrow{p}},\ t \in \mathbb{R}$$

брзина кретања

Једначина праве у равни



Слика 4: Параметарска једначина

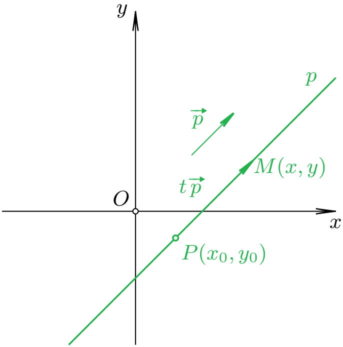
- Параметарска једначина:

$$p: \; M(t) = P + t\,\boxed{\vec{p}}, \; t \in \mathbb{R}$$

брзина кретања

$$\begin{aligned} x &= x_0 + tp_x, \\ y &= y_0 + tp_y, \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Једначина праве у равни



Слика 4: Параметарска једначина

- Параметарска једначина:

$$p: \; M(t) = P + t\boxed{\vec{p}}, \quad t \in \mathbb{R}$$

брзина кретања

$$x = x_0 + tp_x,$$
$$y = y_0 + tp_y, \quad t \in \mathbb{R}$$

Равномерно праволинијско кретање

Параметарски $\longrightarrow$ имплицитни облик

- Параметарски облик:

$$x = x_0 + tp_x, \quad y = y_0 + tp_y, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Параметарски $\longrightarrow$ имплицитни облик

- Параметарски облик:

$$x = x_0 + tp_x, \quad y = y_0 + tp_y, \quad t \in \mathbb{R}.$$

- Канонски облик:

$$t = \frac{x - x_0}{p_x} = \frac{y - y_0}{p_y}.$$

Параметарски $\longrightarrow$ имплицитни облик

- Параметарски облик:

$$x = x_0 + tp_x, \quad y = y_0 + tp_y, \quad t \in \mathbb{R}.$$

- Канонски облик:

$$t = \frac{x - x_0}{p_x} = \frac{y - y_0}{p_y}.$$

- Имплицитни облик:

$$p_y x - p_x y + (p_x y_0 - p_y x_0) = 0.$$

Имплицитни ⟶ параметарски облик

- Имплицитни облик:

$$ax + by + c = 0.$$

Имплицитни $\longrightarrow$ параметарски облик

- Имплицитни облик:

$$ax + by + c = 0.$$

- Параметарски облик:

$$\vec{p} = (-b, a), \quad P\left(\frac{-ac}{a^2+b^2}, \frac{-bc}{a^2+b^2}\right).$$

Имплицитни $\longrightarrow$ параметарски облик

- Имплицитни облик:

$$ax + by + c = 0.$$

- Параметарски облик:

$$\vec{p} = (-b, a), \quad P\left(\frac{-ac}{a^2+b^2}, \frac{-bc}{a^2+b^2}\right).$$

Пример 2

Дата је права $p: 3x - 4y + 6 = 0$. Одредити параметарски облик праве p и угао који права p заклапа са x-осом.

Примери

Пример 3

Одредити имплицитну једначину праве које садржи тачку $M(1,2)$ и паралелна је са y-осом.

Пример 4

Одредити параметарску једначуну праве која садржи тачку $P(-2,3)$ и нормална је на праву $q: \ 2x+3y-1=0$.

Параметризација дужи и полуправе

- Дуж $[AB]$:

$$M(t) = A + t\overrightarrow{AB}, \quad t \in [0,1].$$

Параметризација дужи и полуправе

- Дуж $[AB]$:

$$M(t) = A + t\overrightarrow{AB}, \quad t \in [0, 1].$$

- Полуправа $[AB)$:

$$M(t) = A + t\overrightarrow{AB}, \quad t \in [0, +\infty).$$

Параметризација дужи и полуправе

- Дуж $[AB]$:

$$M(t) = A + t\overrightarrow{AB}, \quad t \in [0,1].$$

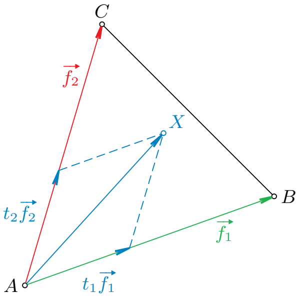
- Полуправа $[AB)$:

$$M(t) = A + t\overrightarrow{AB}, \quad t \in [0,+\infty).$$

Пример 5

Одредити параметарску једначину дужи $[AB]$ ако је $A(2,-3)$, $B(10,9)$.
Одредити тачке A_1, A_2 и A_3 које дуж $[AB]$ деле на четири једнака дела.
Да ли тачка $C\left(\frac{2}{3},-5\right)$ припада полуправој $[AB)$?

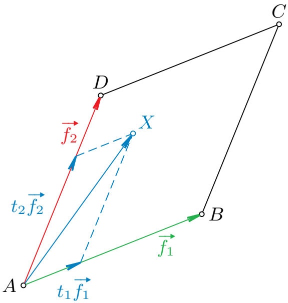
Параметризација троугла



Слика 5: Параметарска једначина троугла

$$X(t_1, t_2) = A + t_1\overrightarrow{AB} + t_2\overrightarrow{AC},\ 0 \leq t_1, t_2 \leq 1,\ t_1 + t_2 \leq 1.$$

Параметризација паралелограма



Слика 6: Параметарска једначина паралелограма

$$X(t_1, t_2) = A + t_1\overrightarrow{AB} + t_2\overrightarrow{AC},\ 0 \leq t_1, t_2 \leq 1.$$

Полураван

- C, D су са исте стране праве p ако: $[CD] \cap p = \{\emptyset\}$.

Полураван

- C, D су са исте стране праве p ако: $[CD] \cap p = \{\emptyset\}$.
- Полураван $=$ скуп свих тачака са исте стране праве p.

Полураван

- C, D су са исте стране праве p ако: $[CD] \cap p = \{\emptyset\}$.
- Полураван = скуп свих тачака са исте стране праве p.
- $p: \; f(x, y) = ax + by + c = 0$:

$$C, D \stackrel{\cdot\cdot}{-} p \Longleftrightarrow \operatorname{sign}(f(C)) = \operatorname{sign}(f(D)).$$

Полураван

- C, D су са исте стране праве p ако: $[CD] \cap p = \{\emptyset\}$.
- Полураван = скуп свих тачака са исте стране праве p.
- $p: \ f(x, y) = ax + by + c = 0$:

$$C, D \stackrel{..}{-} p \iff \text{sign}(f(C)) = \text{sign}(f(D)).$$

- $p: \ A, B \in p$:

$$C, D \stackrel{..}{-} p \iff \text{sign}(D_{ABC}) = \text{sign}(D_{ABD}).$$

Полураван

- C, D су са исте стране праве p ако: $[CD] \cap p = \{\emptyset\}$.
- Полураван = скуп свих тачака са исте стране праве p.
- $p: \ f(x,y) = ax + by + c = 0$:

$$C, D \stackrel{..}{-} p \Longleftrightarrow \operatorname{sign}(f(C)) = \operatorname{sign}(f(D)).$$

- $p: \ A, B \in p$:

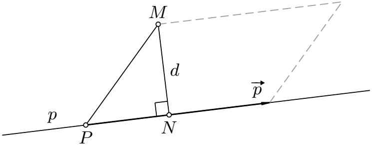
$$C, D \stackrel{..}{-} p \Longleftrightarrow \operatorname{sign}(D_{ABC}) = \operatorname{sign}(D_{ABD}).$$

- $p: \ P, \ \vec{p}, \ A \equiv P, \ B = A + \vec{p}$.

Растојање тачке од праве

Теорема 1.1 (важи и у простору)

$$d(M,p) = d = \frac{|\overrightarrow{p} \times \overrightarrow{PM}|}{|\overrightarrow{p}|}.$$

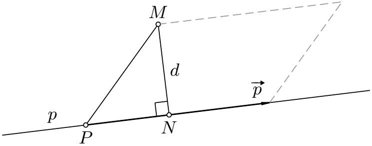


Слика 7: Растојање тачке од праве

Растојање тачке од праве

Теорема 1.1 (важи и у простору)

$$d(M,p) = d = \frac{|\overrightarrow{p} \times \overrightarrow{PM}|}{|\overrightarrow{p}|}.$$



Слика 7: Растојање тачке од праве

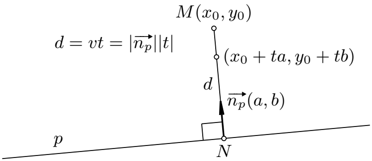
Пример 6

Одредити растојање тачке $M(1,1)$ од праве $p: P(-2,0), \overrightarrow{p} = (3,4)$.

Растојање тачке од праве

Теорема 1.2

$$d(M,p) = d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

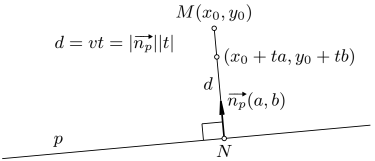


Слика 8: Растојање тачке од праве

Растојање тачке од праве

Теорема 1.2

$$d(M,p) = d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$



Слика 8: Растојање тачке од праве

Пример 7

Одредити растојање тачке $M(1,1)$ од праве
$p:\ 3x + 4y - 5 = 0.$

Пресек имплицитно задатих правих

- Решити систем:

$$p : a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
$$q : a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

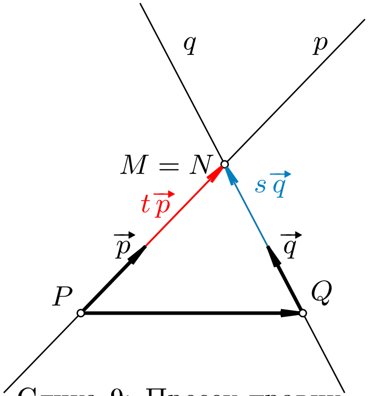
- Крамерово правило:

$$\Delta = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}, \ \Delta_x = \begin{pmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{pmatrix}, \ \Delta_y = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{pmatrix}.$$

  - $\Delta \neq 0$ – праве се секу у $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta}$;
  - $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$ – праве се поклапају;
  - $\Delta = 0$, $\Delta_x \neq 0$ или $\Delta_y \neq 0$ – праве су паралелне.

Пресек параметарски задатих правих

$$P + t\overrightarrow{p} = M = N = Q + s\overrightarrow{q}$$



Слика 9: Пресек правих

Пресек параметарски задатих правих

- $D(\vec{p}, \vec{q}) \neq 0$ – праве се секу

$$t = \frac{D(\overrightarrow{PQ}, \vec{q})}{D(\vec{p}, \vec{q})}, \ s = \frac{D(\overrightarrow{PQ}, \vec{p})}{D(\vec{p}, \vec{q})}$$

Пресек параметарски задатих правих

- $D(\vec{p}, \vec{q}) \neq 0$ – праве се секу

$$t = \frac{D(\overrightarrow{PQ}, \vec{q})}{D(\vec{p}, \vec{q})}, \ s = \frac{D(\overrightarrow{PQ}, \vec{p})}{D(\vec{p}, \vec{q})}$$

- $D(\vec{p}, \vec{q}) = 0$, $D(\overrightarrow{PQ}, \vec{q}) = 0$ – праве се поклапају

Пресек параметарски задатих правих

- $D(\vec{p}, \vec{q}) \neq 0$ – праве се секу

$$t = \frac{D(\overrightarrow{PQ}, \vec{q})}{D(\vec{p}, \vec{q})}, \ s = \frac{D(\overrightarrow{PQ}, \vec{p})}{D(\vec{p}, \vec{q})}$$

- $D(\vec{p}, \vec{q}) = 0$, $D(\overrightarrow{PQ}, \vec{q}) = 0$ – праве се поклапају
- $D(\vec{p}, \vec{q}) = 0$, $D(\overrightarrow{PQ}, \vec{q}) \neq 0$ – праве су паралелне

Пресек параметарски задатих правих

- $D(\vec{p}, \vec{q}) \neq 0$ – праве се секу

$$t = \frac{D(\overrightarrow{PQ}, \vec{q})}{D(\vec{p}, \vec{q})}, \quad s = \frac{D(\overrightarrow{PQ}, \vec{p})}{D(\vec{p}, \vec{q})}$$

- $D(\vec{p}, \vec{q}) = 0$, $D(\overrightarrow{PQ}, \vec{q}) = 0$ – праве се поклапају
- $D(\vec{p}, \vec{q}) = 0$, $D(\overrightarrow{PQ}, \vec{q}) \neq 0$ – праве су паралелне

Пример 8

Одредити пресек правих p и q које су задате тачком и вектором правца:
(а) $P(3,1)$, $\vec{p} = (1,0)$, $Q(2,3)$, $\vec{q} = (1,1)$;
(б) $P(3,1)$, $\vec{p} = (1,0)$, $Q(2,3)$, $\vec{q} = (-2,0)$;
(в) $P(3,1)$, $\vec{p} = (1,-2)$, $Q(2,3)$, $\vec{q} = (-2,4)$.

Пресек дужи

$$[AB]: \ A + t\overrightarrow{AB}, \qquad [CD]: C + s\overrightarrow{CD}, \ t, s \in [0, 1]$$

Пресек дужи

$$[AB]:\ A + t\overrightarrow{AB}, \qquad [CD]:\ C + s\overrightarrow{CD},\ t,s \in [0,1]$$

- Дужи се секу ако је $D(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}) \neq 0$ и

$$0 \leq t = \frac{D(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CD})}{D(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})},\ s = \frac{D(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB})}{D(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})} \leq 1$$

Пресек дужи

$$[AB]:\ A + t\overrightarrow{AB}, \qquad [CD]:\ C + s\overrightarrow{CD},\ t, s \in [0,1]$$

- Дужи се секу ако је $D(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \neq 0$ и

$$0 \leq t = \frac{D(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CD})}{D(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})},\ s = \frac{D(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})}{D(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} \leq 1$$

- Ако је $D(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 0$ и $D(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CD}) = 0$:

$$\left.\begin{array}{l}\text{дужи се поклапају}\\ \text{дужи се делимично преклапају}\\ \text{дужи се не секу}\end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{c}\text{потребна додатна}\\ \text{анализа!}\end{array}$$

Пресек дужи

$$[AB]: \ A + t\overrightarrow{AB}, \qquad [CD]: \ C + s\overrightarrow{CD}, \ t, s \in [0,1]$$

- Дужи се секу ако је $D(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \neq 0$ и

$$0 \leq t = \frac{D(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CD})}{D(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})}, \ s = \frac{D(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})}{D(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} \leq 1$$

- Ако је $D(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 0$ и $D(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CD}) = 0$:

$$\left.\begin{array}{l}\text{дужи се поклапају}\\ \text{дужи се делимично преклапају}\\ \text{дужи се не секу}\end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{c}\text{потребна додатна}\\ \text{анализа!}\end{array}$$

- Дужи се не секу у свим осталим случајевима.

Пресек полуправих и дужи

Пример 9

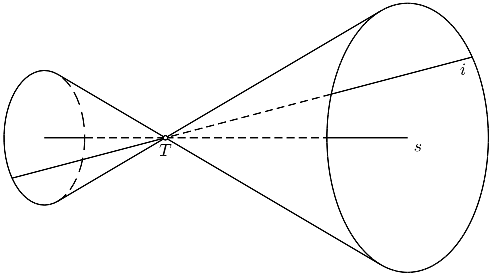
Одредити пресек полуправих $[AB) : A(1, 2), B(-2, 3)$ и $[CD) : C(0, 1), D(2, -1)$.

Пример 10

Одредити пресек дужи AB и CD, где је $A(12, 3)$, $B(12, 5)$, $C(5, 7)$, $D(-2, 1)$.

Конус

Нека су i и s две праве у простору које се секу у тачки T.
Кружни конус са теменом T је површ која се добија ротацијом праве i око осе s.
Ротирана права i (у разним положајима) назива се изводница конуса, а права s се назива оса конуса.



Слика 10: Кружни конус

Конусни пресек

Дефиниција 2.1

Конусни пресек је пресек конуса са произвољном равни α.

Круг

Конусни пресек

Дефиниција 2.1

Конусни пресек је пресек конуса са произвољном равни α.

Елипса

Конусни пресек

Дефиниција 2.1

Конусни пресек је пресек конуса са произвољном равни α.

Хипербола

Конусни пресек

Дефиниција 2.1

Конусни пресек је пресек конуса са произвољном равни α.

Парабола

Конике

Дефиниција 2.2

Коника је пресек конуса са равни α која НЕ садржи теме конуса.

Теорема 2.1

У равни α конике постоје права d и тачка F такве да је однос растојања

$$\frac{MF}{d(M,d)} = e = const$$

произвољне тачке M конике од тачке F и праве d константан.

Ексцентрицитет конике

Дефиниција 2.3

Број $e \geq 0$ назива се ексцентрицитет конике,

Ексцентрицитет конике

Дефиниција 2.3

Број $e \geq 0$ назива се ексцентрицитет конике, тачка F жижа,

Ексцентрицитет конике

Дефиниција 2.3

Број $e \geq 0$ назива се ексцентрицитет конике, тачка F жижа, а права d директриса конике.

Ексцентрицитет конике

Дефиниција 2.3

Број $e \geq 0$ назива се ексцентрицитет конике, тачка F жижа, а права d директриса конике.

Ексцентрицитет одређује тип конике:

- за $e = 0$ – круг;
- за $0 < e < 1$ – елипса;
- за $e = 1$ – парабола;
- за $e > 1$ – хипербола.

Примери коника у природи

- 1. Кеплеров закон:
  Тела Сунчевог система се крећу око Сунца по коници, а Сунце се налази у жижи те конике.
  - Земља: $e = 0.0167$
  - Јупитер: $e = 0.048775$
  - Халејева комета: $e = 0.995$

Примери коника у природи

- 1. Кеплеров закон:
  Тела Сунчевог система се крећу око Сунца по коници, а Сунце се налази у жижи те конике.
    - Земља: $e = 0.0167$
    - Јупитер: $e = 0.048775$
    - Халејева комета: $e = 0.995$
- Путања косог хица је парабола.

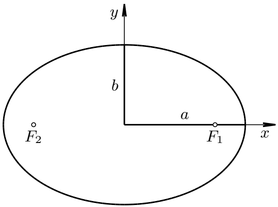
Примери коника у природи

- 1. Кеплеров закон:
  Тела Сунчевог система се крећу око Сунца по коници, а Сунце се налази у жижи те конике.
  - Земља: $e = 0.0167$
  - Јупитер: $e = 0.048775$
  - Халејева комета: $e = 0.995$
- Путања косог хица је парабола.
- Сунчева сенка врха штапа у току дана је коника.

Примери коника у природи

- 1. Кеплеров закон:
  Тела Сунчевог система се крећу око Сунца по коници, а Сунце се налази у жижи те конике.
    - Земља: $e = 0.0167$
    - Јупитер: $e = 0.048775$
    - Халејева комета: $e = 0.995$
- Путања косог хица је парабола.
- Сунчева сенка врха штапа у току дана је коника.
- Сенка кружног предмета на раван зид је коника.

Елипса



Слика 11: Елипса

Канонска једначина елипсе:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > b > 0.$$

Елементи елипсе

- $a > b > 0$ – полуосе елипсе;

Елементи елипсе

- $a > b > 0$ – полуосе елипсе;
- $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ – жиже елипсе;

Елементи елипсе

- $a > b > 0$ – полуосе елипсе;
- $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ – жиже елипсе;
- $d_1 : x = \dfrac{a}{e}$, $d_2 : x = -\dfrac{a}{e}$ – директрисе елипсе;

Елементи елипсе

- $a > b > 0$ – полуосе елипсе;
- $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ – жиже елипсе;
- $d_1 : x = \dfrac{a}{e}$, $d_2 : x = -\dfrac{a}{e}$ – директрисе елипсе;
- $e = \dfrac{c}{a}$ – ексцентрицитет елипсе.

Елементи елипсе

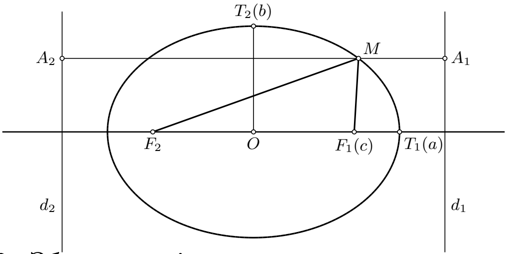
- $a > b > 0$ – полуосе елипсе;
- $F_1(c, 0),\ F_2(-c, 0),\ c = \sqrt{a^2 - b^2}$ – жиже елипсе;
- $d_1 : x = \dfrac{a}{e},\ d_2 : x = -\dfrac{a}{e}$ – директрисе елипсе;
- $e = \dfrac{c}{a}$ – ексцентрицитет елипсе.
- за $a = b$ елипса је круг!

Фокусне особине елипсе

Теорема 2.2

Збир растојања произвољне тачке елипсе од њених жижа је константан:

$$MF_1 + MF_2 = 2a.$$



Слика 12: Збир растојања тачке елипсе од њених жижа

Параметарска једначина круга/елипсе

- Параметарска једначина круга:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad \theta \in [0, 2\pi),$$

r је полупречник круга, θ је угао између вектора положаја тачке и позитивног дела x-осе.

Параметарска једначина круга/елипсе

- Параметарска једначина круга:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad \theta \in [0, 2\pi),$$

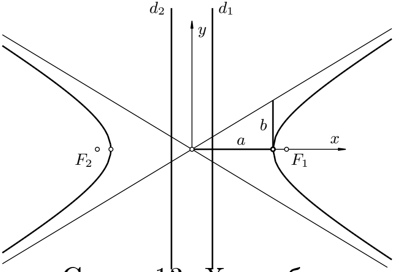
  r је полупречник круга, θ је угао између вектора положаја тачке и позитивног дела x-осе.

- Параметарска једначина елипсе:

$$x = a\cos\theta, \quad y = b\sin\theta, \quad \theta \in [0, 2\pi),$$

  a, b су полуосе елипсе, али θ НИЈЕ угао између вектора положаја тачке и позитивног дела x-осе.

Хипербола



Слика 13: Хипербола

Канонска једначина хиперболе:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Елементи хиперболе

- $a, b > 0$ – полуосе хиперболе;

Елементи хиперболе

- $a, b > 0$ – полуосе хиперболе;
- $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$, $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ – жиже хиперболе;

Елементи хиперболе

- $a, b > 0$ – полуосе хиперболе;
- $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$, $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ – жиже хиперболе;
- $d_1 : x = \dfrac{a}{e}$, $d_2 : x = -\dfrac{a}{e}$ – директрисе хиперболе;

Елементи хиперболе

- $a, b > 0$ – полуосе хиперболе;
- $F_1(c, 0),\ F_2(-c, 0),\ c = \sqrt{a^2 + b^2}$ – жиже хиперболе;
- $d_1 : x = \dfrac{a}{e},\ d_2 : x = -\dfrac{a}{e}$ – директрисе хиперболе;
- $e = \dfrac{c}{a}$ – ексцентрицитет хиперболе;

Елементи хиперболе

- $a, b > 0$ – полуосе хиперболе;
- $F_1(c, 0),\ F_2(-c, 0),\ c = \sqrt{a^2 + b^2}$ – жиже хиперболе;
- $d_1 : x = \dfrac{a}{e},\ d_2 : x = -\dfrac{a}{e}$ – директрисе хиперболе;
- $e = \dfrac{c}{a}$ – ексцентрицитет хиперболе;
- $a_1 : y = \dfrac{b}{a}x,\ a_2 : y = -\dfrac{b}{a}x$ – асимптоте хиперболе.

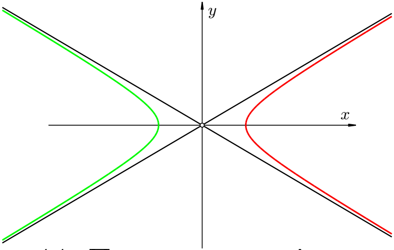
Фокусне особине хиперболе

Теорема 2.3

Апсолутна вредност разлике растојања произвољне тачке хиперболе од њених жижа је константан:

$$|MF_1 - MF_2| = 2a.$$

Параметризација хиперболе



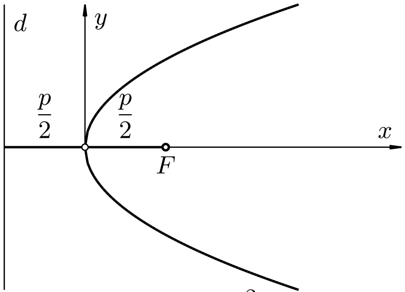
Слика 14: Параметризација хиперболе

$$x = +a\cosh\phi, \quad y = b\sinh\phi, \quad \phi \in \mathbb{R}$$
$$x = -a\cosh\phi, \quad y = b\sinh\phi, \quad \phi \in \mathbb{R}$$

Парабола

Последица 2.1

Свака тачка M параболе је једнако удаљена од жиже и од директрисе параболе.



Слика 15: Парабола $y^2 = 2px$, $p > 0$

Елементи параболе $y^2 = 2px$, $p > 0$

- p – параметар параболе;
- $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ – жижа параболе;
- $d : \ x = -\frac{p}{2}$ – директриса параболе;
- o – оса параболе (овде: x-оса);
- T – теме параболе (овде: O).

Параметризација параболе

Стандардна параметризација:

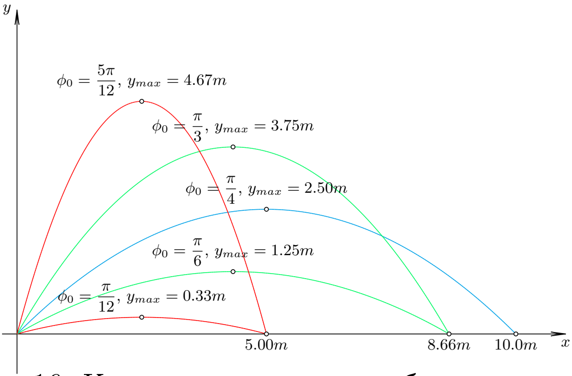
$$x = \frac{t^2}{2p}, \quad y = t, \quad t \in \mathbb{R},$$

Једначина косог хица:

$$\begin{aligned} x(t) &= (v_0 \cos \phi_0)t, \;\; t \geq 0 \\ y(t) &= -\frac{g}{2}t^2 + (v_0 \sin \phi_0)t + h, \;\; t \geq 0, \end{aligned}$$

где је v_0 почетна брзина, h висина, а ϕ_0 угао (у односу на тло) под којим се хитац испаљује. Са g је означено гравитационо убрзање.

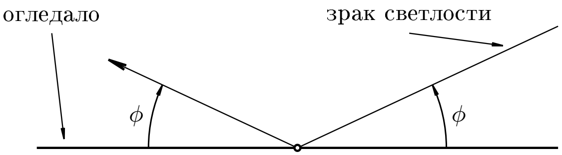
Коси хитац



Слика 16: Коси хици са почетном брзином $v_0 = 10\frac{m}{s}$, за углове $\phi_0 = \frac{k\pi}{12}$, $k = 1, \ldots, 5$

Закон одбијања светлости

Светлост се одбија од глатке површине тако да је упадни угао зрака светлости једнак одбојном углу.

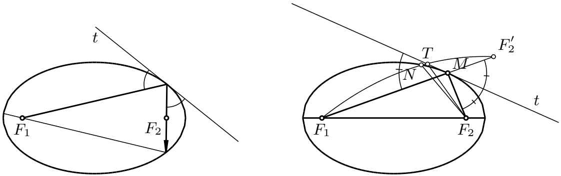


Слика 17: Закон одбијања светлости

Оптичка особина елипсе

Теорема 2.4

Светлосни зрак који извире из жиже елипсе и одбија се од елипсе, пролази кроз другу жижу елипсе.

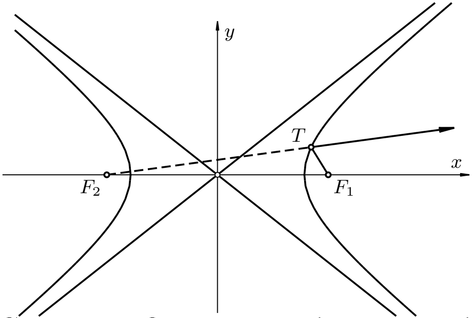


Слика 18: Оптичка особина елипсе

Оптичка особина хиперболе

Теорема 2.5

Светлосни зрак који извире из жиже хиперболе и одбија се од хиперболе, колинеаран је са другом жижом хиперболе.

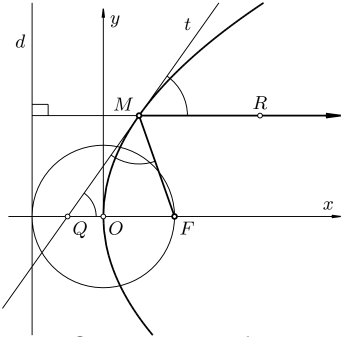


Слика 19: Оптичка особина хиперболе

Оптичка особина параболе

Теорема 2.6

Светлосни зрак који извире из жиже параболе одбија се од параболе паралелно њеној оси.



Слика 20: Оптичка особина параболе

Криве другог реда

Дефиниција 2.4

Крива другог реда је скуп тачака равни чије координате (x, y) задовољавају једначину другог степена:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Криве другог реда

Дефиниција 2.4

Крива другог реда је скуп тачака равни чије координате (x, y) задовољавају једначину другог степена:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Колико год претходна једначина изгледала компликовано, може се показати да она геометријски описује елипсу, хиперболу, параболу или неку једноставну „дегенерисану” криву.

Свођење криве на канонски облик

Теорема 2.7

За сваку криву другог реда, дату у ортонормираном реперу Oe, постоји нови ортонормирани репер Qf, исте оријентације, у ком она има тачно једну од следећих једначина:

$$(E) \quad \frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1, \qquad \text{(елипса)}$$

$$(H) \quad \frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 1, \qquad \text{(хипербола)}$$

$$(P) \quad y''^2 = 2px'', \qquad \text{(парабола)}$$

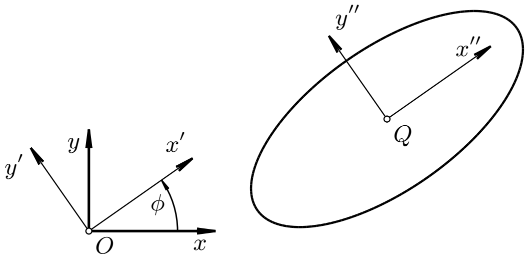
Свођење криве на канонски облик

Теорема 2.7

$$
\begin{array}{lll}
(D1) & \dfrac{x''^2}{a^2} + \dfrac{y''^2}{b^2} = -1, & \text{(празан скуп или имагинарна елипса)} \\
(D2) & \dfrac{x''^2}{a^2} + \dfrac{y''^2}{b^2} = 0, & \text{(тачка)} \\
(D3) & \dfrac{x''^2}{a^2} - \dfrac{y''^2}{b^2} = 0, & \text{(две праве које се секу)} \\
(D4) & x''^2 = a^2, & \text{(две паралелне праве)} \\
(D5) & x''^2 = 0, & \text{(„двострука” права)} \\
(D6) & x''^2 = -a^2 & \text{(празан скуп).}
\end{array}
$$

где је $p > 0$, $a, b > 0$ и $a \geq b$ за $(E), (D1), (D2)$ и $(D3)$.

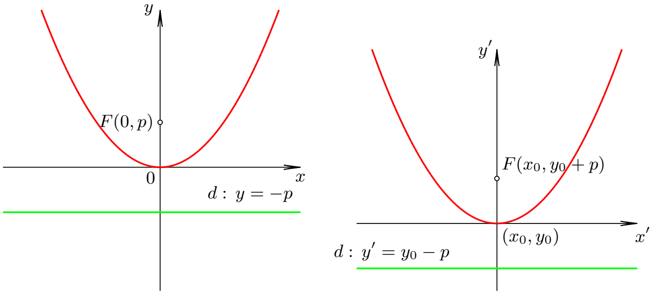
Свођење криве на канонски облик



Слика 21: Свођење елипсе на канонски облик

- транслација
- ротација

Свођење криве на канонски облик транслацијом



Слика 22: Транслација параболе

$$x' = x + x_0, \qquad y' = y + y_0$$

Свођење криве на канонски облик ротацијом

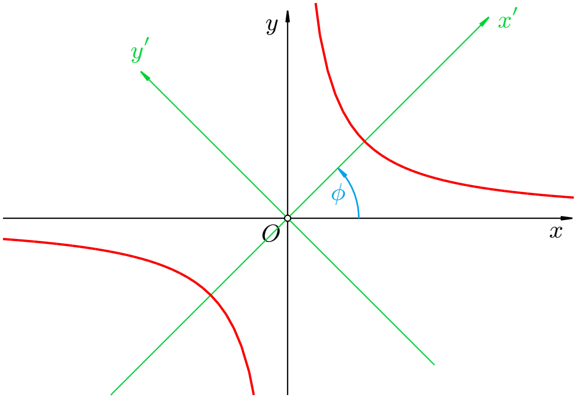
$$x = \cos\phi\, x' - \sin\phi\, y', \qquad y = \sin\phi\, x' + \cos\phi\, y'$$

$$\cot 2\phi = \frac{\cos 2\phi}{\sin 2\phi} = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}, \phi \in [0, \frac{\pi}{2})$$

$$\cos 2\phi = \frac{\cot 2\phi}{+\sqrt{1 + \cot^2 2\phi}}$$

$$\cos\phi = +\sqrt{\frac{1 + \cos 2\phi}{2}}, \qquad \sin\phi = +\sqrt{\frac{1 - \cos 2\phi}{2}}$$

Пример: Ротација хиперболе



Слика 23: Хипербола $xy = 1$

Безијерове криве

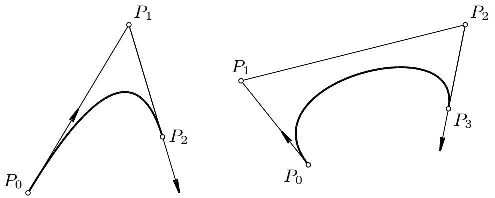
Дефиниција 3.1

Нека су $P_0, P_1 \dots P_n$, $n \geq 2$ тачке равни. Безијерова крива степена n је:

$$\alpha_n(t) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} P_i = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) P_i, \ \ t \in [0,1].$$

Тачке P_i називају се контролне тачке, а полиноми $B_i(t)$ Бернштајнови полиноми или базне функције.
Полигонска линија $P_0 P_1 \dots P_n$ се зове контролна полигонска линија.

Безијерове криве 2. и 3. степена

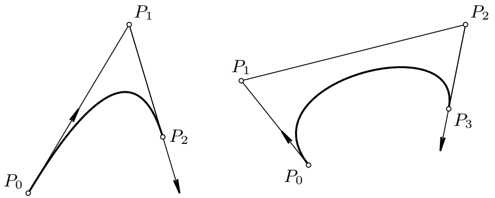


Слика 24: Безијерове криве степена 2 и 3

Крива 2. степена одређена је са три контролне тачке:

$$\alpha_2(t) = (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2, \quad t \in [0,1];$$

Безијерове криве 2. и 3. степена



Слика 24: Безијерове криве степена 2 и 3

Крива 2. степена одређена је са три контролне тачке:

$$\alpha_2(t) = (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2, \ \ t \in [0,1];$$

Крива 3. степена одређена је са четири контролне тачке:

$$\alpha_3(t) = (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t)P_2 + t^3 P_3, \ \ t \in [0,1].$$

Безијерове криве на прозивољном интервалу

- $t \in [0, 1]$:

$$\alpha_n(t) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} P_i = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) P_i.$$

Безијерове криве на прозивољном интервалу

- $t \in [0, 1]$:

$$\alpha_n(t) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} P_i = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) P_i.$$

- $u \in [a, b]$:

$$\alpha_n(u) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \left(\frac{u-a}{b-a}\right)^i \left(\frac{b-u}{b-a}\right)^{n-i} P_i.$$

Матрична репрезентација Безијерове криве

$$\alpha_2(t) = \begin{pmatrix}1, & t, & t^2\end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}.$$

Пример 11

Извести формуле матричне репрезентације кубне Безијерове криве.

Особине

- $\deg \alpha_n = n.$

Особине

- $\deg \alpha_n = n$.
- $\alpha_n(0) = P_0, \quad \alpha_n(1) = P_n$.

Особине

- $\deg \alpha_n = n$.
- $\alpha_n(0) = P_0, \quad \alpha_n(1) = P_n$.
- Тангентни вектор у P_0 је $\overrightarrow{P_0P_1}$, а у P_n је $\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$.

Особине

- $\deg \alpha_n = n$.
- $\alpha_n(0) = P_0, \quad \alpha_n(1) = P_n$.
- Тангентни вектор у P_0 је $\overrightarrow{P_0P_1}$, а у P_n је $\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$.
- $P_k \to P_k + \vec{v}: \quad \bar{\alpha}_n(t) = \alpha_n(t) + B_{n,k}(t)\vec{v}$.

Особине

- $\deg \alpha_n = n$.
- $\alpha_n(0) = P_0, \quad \alpha_n(1) = P_n$.
- Тангентни вектор у P_0 je $\overrightarrow{P_0P_1}$, а у P_n je $\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$.
- $P_k \to P_k + \vec{v}: \quad \bar{\alpha}_n(t) = \alpha_n(t) + B_{n,k}(t)\vec{v}$.
- Особина ненегативности.

Особине

- $\deg \alpha_n = n$.
- $\alpha_n(0) = P_0, \quad \alpha_n(1) = P_n$.
- Тангентни вектор у P_0 је $\overrightarrow{P_0P_1}$, а у P_n је $\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$.
- $P_k \to P_k + \vec{v}: \quad \bar{\alpha}_n(t) = \alpha_n(t) + B_{n,k}(t)\vec{v}$.
- Особина ненегативности.
- Особина конвексног омотача.

Особине

- $\deg \alpha_n = n$.
- $\alpha_n(0) = P_0, \quad \alpha_n(1) = P_n$.
- Тангентни вектор у P_0 је $\overrightarrow{P_0P_1}$, а у P_n је $\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$.
- $P_k \to P_k + \vec{v}: \quad \bar{\alpha}_n(t) = \alpha_n(t) + B_{n,k}(t)\vec{v}$.
- Особина ненегативности.
- Особина конвексног омотача.
- Особина мање варијације.

Особине

- $\deg \alpha_n = n$.
- $\alpha_n(0) = P_0, \quad \alpha_n(1) = P_n$.
- Тангентни вектор у P_0 je $\overrightarrow{P_0P_1}$, а у P_n je $\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$.
- $P_k \to P_k + \vec{v}: \quad \bar{\alpha}_n(t) = \alpha_n(t) + B_{n,k}(t)\vec{v}$.
- Особина ненегативности.
- Особина конвексног омотача.
- Особина мање варијације.
- Афина инваријантност.

Особине

- $\deg \alpha_n = n$.
- $\alpha_n(0) = P_0, \quad \alpha_n(1) = P_n$.
- Тангентни вектор у P_0 је $\overrightarrow{P_0P_1}$, а у P_n је $\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$.
- $P_k \to P_k + \vec{v}: \quad \bar{\alpha}_n(t) = \alpha_n(t) + B_{n,k}(t)\vec{v}$.
- Особина ненегативности.
- Особина конвексног омотача.
- Особина мање варијације.
- Афина инваријантност.

Теорема 3.1

Безијерова крива степена два је део параболе.

Де-Кастељау алгоритам

Одређивање тачке на кривој $\alpha_n(t)$ за неко $t \in [0,1]$:

1. $P_{00} = P_0,\ P_{01} = P_1, \dots, P_{0n-1} = P_{n-1},\ P_{0n} = P_n$

Де-Кастељау алгоритам

Одређивање тачке на кривој $\alpha_n(t)$ за неко $t \in [0,1]$:

1. $P_{00} = P_0,\ P_{01} = P_1, \ldots, P_{0n-1} = P_{n-1},\ P_{0n} = P_n$
2. $P_{1i} = (1-t)P_{0i} + tP_{0i+1},\ \ i = 0, \ldots, n-1$

Де-Кастељау алгоритам

Одређивање тачке на кривој $\alpha_n(t)$ за неко $t \in [0,1]$:

1. $P_{00} = P_0,\ P_{01} = P_1, \dots, P_{0n-1} = P_{n-1},\ P_{0n} = P_n$
2. $P_{1i} = (1-t)P_{0i} + tP_{0i+1},\ \ i = 0, \dots, n-1$

$\vdots$

Де-Кастељау алгоритам

Одређивање тачке на кривој $\alpha_n(t)$ за неко $t \in [0, 1]$:

1. $P_{00} = P_0,\ P_{01} = P_1, \ldots, P_{0n-1} = P_{n-1},\ P_{0n} = P_n$
2. $P_{1i} = (1-t)P_{0i} + tP_{0i+1},\ \ i = 0, \ldots, n-1$

   $\vdots$

3. $P_{ki} = (1-t)P_{k-1i} + tP_{k-1i+1},\ \ i = 0, \ldots, n-k$

Де-Кастељау алгоритам

Одређивање тачке на кривој $\alpha_n(t)$ за неко $t \in [0,1]$:

1. $P_{00} = P_0,\; P_{01} = P_1, \ldots, P_{0n-1} = P_{n-1},\; P_{0n} = P_n$
2. $P_{1i} = (1-t)P_{0i} + tP_{0i+1},\;\; i = 0, \ldots, n-1$

   $\vdots$

3. $P_{ki} = (1-t)P_{k-1i} + tP_{k-1i+1},\;\; i = 0, \ldots, n-k$
4. $P_{n0} = (1-t)P_{n-1\,0} + tP_{n-1\,1}$

Де-Кастељау алгоритам

Одређивање тачке на кривој $\alpha_n(t)$ за неко $t \in [0,1]$:

1. $P_{00} = P_0,\ P_{01} = P_1, \ldots, P_{0n-1} = P_{n-1},\ P_{0n} = P_n$
2. $P_{1i} = (1-t)P_{0i} + tP_{0i+1},\ \ i = 0, \ldots, n-1$

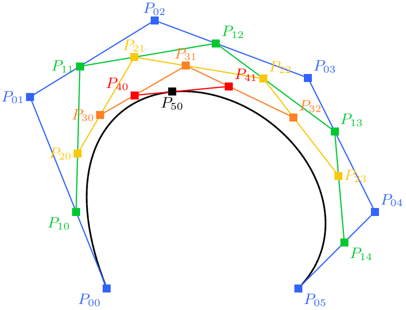
   $\vdots$
3. $P_{ki} = (1-t)P_{k-1i} + tP_{k-1i+1},\ \ i = 0, \ldots, n-k$
4. $P_{n0} = (1-t)P_{n-1\,0} + tP_{n-1\,1}$

$P_{n-1\,0}P_{n-1\,1}$ – тангента на криву у тачки t

Де-Кастељау алгоритам

Пример 12

Показати да је де-Кастељау алгоритам коректан.

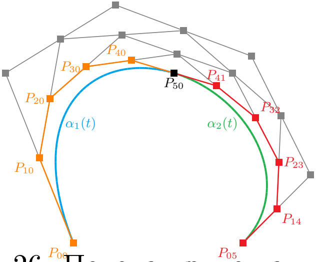


Слика 25: Де-Кастељау алгоритам за криву 5. степена и $t = 0.4$

Подела криве на два дела

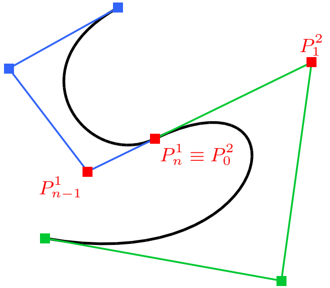
Криву α делимо на две криве α_1 и α_2:

$$\alpha_1 : P_0 = P_{00}, P_{10}, P_{20}, \dots P_{n0} = \alpha(t),$$
$$\alpha_2 : \alpha(t) = P_{n0}, P_{n-11}, P_{n-22}, \dots, P_{0n} = P_n.$$



Слика 26: Подела криве на два дела

Глатко спајање кривих

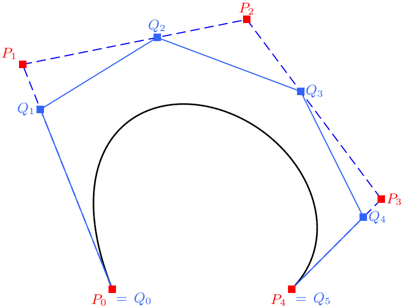


Слика 27: Глатко спајање кривих

Повећање степена криве

$$\alpha_n(t): \ P_0, \dots, P_n, \quad \bar{\alpha}_{n+1}(t):$$

$$Q_0 = P_0, \ Q_i = \frac{i}{n+1} P_{i-1} + \left(1 - \frac{i}{n+1}\right) P_i, \ \ 1 \leq i \leq n, \ Q_{n+1} = P_n.$$



Слика 28: Повећање степена Безијерове криве

Примери

Пример 13

а) Одредити Безијерову криву $\alpha_2(t)$ чије су контролне тачке $P_0(1,1)$, $P_1(-1,0)$, $P_2(1,-1)$.

б) Одредити једначину тангенте на криву $\alpha_2(t)$ у тачки $t_0 = 0.5$ и показати да је тангента паралелна са правом P_0P_2.

в) Повећати степен криве за 1.

г) Одредити једначину тангенте на криву $\bar{\alpha}_3(t)$ у тачки $t_0 = 0.5$. Да ли је тангента паралелна са правом $\bar{P}_0\bar{P}_3$?