УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Геометрија И–смер

део 4: Аналитичка геометрија у простору

Тијана Шукиловић

7. децембар 2015

Имплицитна једначина равни

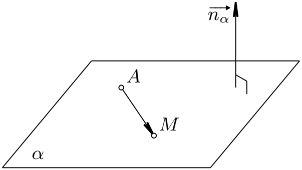
Раван α је одређена тачком $A(x_0, y_0, z_0)$ која јој припада и нормалним вектором равни $\overrightarrow{n_\alpha}$.

Имплицитна једначина равни

Раван α је одређена тачком $A(x_0, y_0, z_0)$ која јој припада и нормалним вектором равни $\overrightarrow{n_\alpha}$.

$$M(x,y,z) \in \alpha \Longrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{n_\alpha}$$

$$\begin{aligned}
0 &= \overrightarrow{n_\alpha} \circ \overrightarrow{AM} \\
&= (a,b,c) \circ (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \\
&= a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) \\
&= ax + by + cz \underbrace{-ax_0 - by_0 - cz_0}_{d}
\end{aligned}$$



Слика 1: Имплицитна једначина равни

Нормализована једначина равни

Имлицитна једначина равни:

$$ax + by + cz + d = 0, \quad \overrightarrow{n_\alpha} = (a, b, c)$$

Нормализована једначина равни

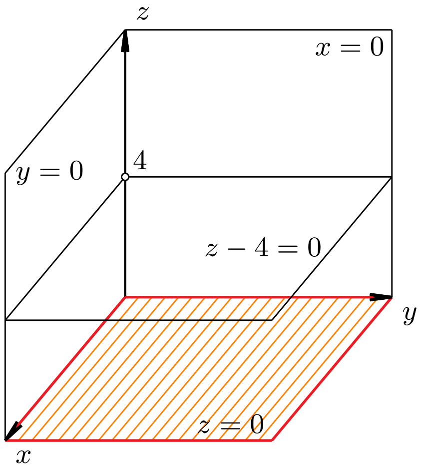
Имлицитна једначина равни:

$$ax + by + cz + d = 0, \quad \overrightarrow{n_\alpha} = (a, b, c)$$

Нормализована једначина равни:

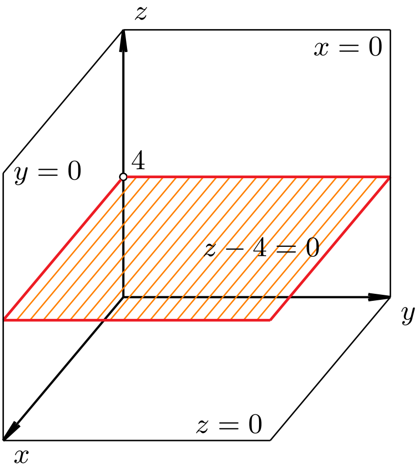
$$ax + by + cz + d = 0, \quad |\overrightarrow{n_\alpha}|^2 = a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

Примери



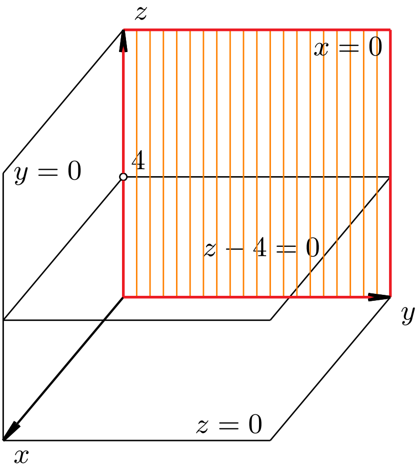
Слика 2: Раван $z = 0$

Примери



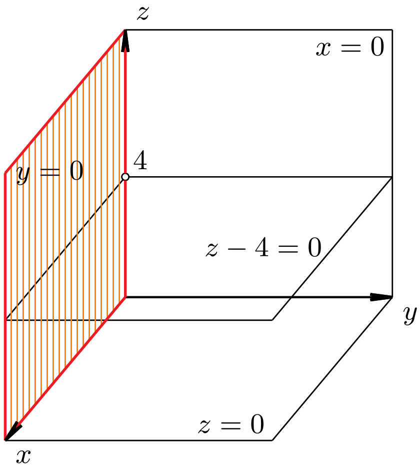
Слика 2: Раван $z - 4 = 0$

Примери



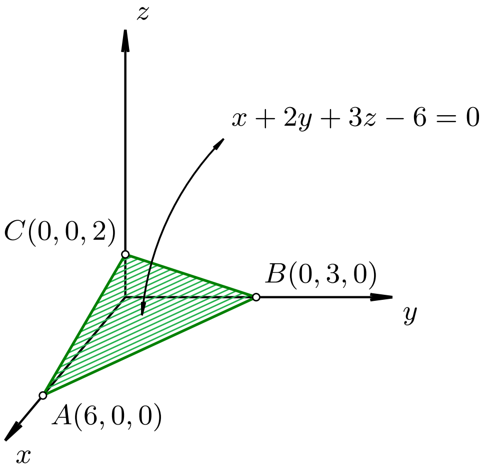
Слика 2: Раван $x = 0$

Примери



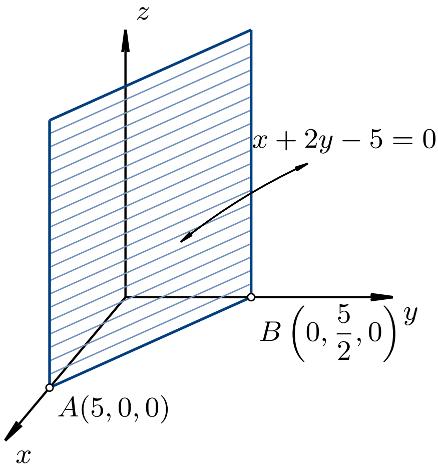
Слика 2: Раван $y = 0$

Пример – скицирати раван



Слика 3: Раван $x + 2y + 3z - 6 = 0$

Пример – скицирати раван



Слика 3: Раван $x + 2y - 5 = 0$

Полуростор

Полупростор је скуп свих тачака са исте стране неке равни $\alpha : ax + by + cz + d = 0$.
Одређен је једначином $ax + by + cz + d > 0$, односно $ax + by + cz + d < 0$.

Полуростор

Полупростор је скуп свих тачака са исте стране неке равни $\alpha:\ ax+by+cz+d=0$.
Одређен је једначином $ax+by+cz+d>0$, односно $ax+by+cz+d<0$.

Пример 1

Да ли се тачке $A(1,1,1)$ и $C(-1,-1,3)$ налазе са исте стране равни $\beta:\ x-3y+4z-12=0$.

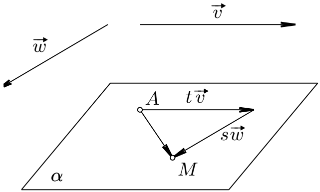
Параметарска једначина равни

Раван α је одређена тачком $A(x_0, y_0, z_0)$ која јој припада и два вектора $\vec{v}$, $\vec{u}$ паралелна α.

Параметарска једначина равни

Раван α је одређена тачком $A(x_0, y_0, z_0)$ која јој припада и два вектора $\vec{v}$, $\vec{u}$ паралелна α.

$$M(t,s) = M = A + t\vec{v} + s\vec{w}, \quad t, s \in \mathbb{R}$$

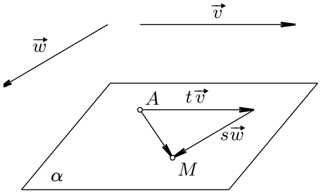


Слика 4: Параметарска једначина равни

Параметарска једначина равни

Раван α је одређена тачком $A(x_0, y_0, z_0)$ која јој припада и два вектора $\vec{v}$, $\vec{u}$ паралелна α.

$$M(t, s) = M = A + t\vec{v} + s\vec{w}, \quad t, s \in \mathbb{R}$$



Параметарска једначина равни:

$$x = x_0 + tv_x + sw_x,$$
$$y = y_0 + tv_y + sw_y,$$
$$z = z_0 + tv_z + sw_z, \quad t, s \in \mathbb{R}$$

Слика 4: Параметарска једначина равни

Прелазак из једног облика равни у други

Параметарски ⟶ имплицитни:

$$\overrightarrow{n_\alpha} = \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = (a, b, c)$$

$$d = -ax_0 - by_0 - cz_0 = -\overrightarrow{n_\alpha} \circ \overrightarrow{OA}$$

Прелазак из једног облика равни у други

Параметарски $\longrightarrow$ имплицитни:

$$\overrightarrow{n_\alpha} = \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = (a, b, c)$$

$$d = -ax_0 - by_0 - cz_0 = -\overrightarrow{n_\alpha} \circ \overrightarrow{OA}$$

Имплицитни $\longrightarrow$ параметарски:

$$\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{n_\alpha} \text{ -- произвољан}$$

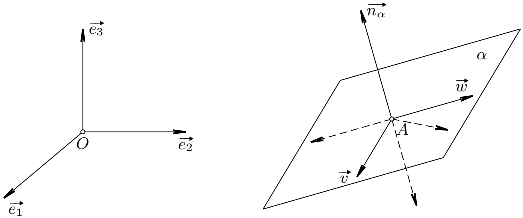
$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{n_\alpha} \times \overrightarrow{v}$$

$$a \neq 0 : A\left(-\frac{d}{a}, 0, 0\right)$$

Избор координатног система везаног за раван

$$\boxed{\alpha:\ ax+by+cz+d=0} \longrightarrow \boxed{\alpha':\ z'=0}$$

WCS UCS



Слика 5: Координатни систем прилагођен датој равни

Примери

Пример 2

a) Одредити ортонормирани координатни систем (x', y', z') у односу на раван $\alpha : x - y - 2 = 0$ и написати везу тих координата са координатама (x, y, z).

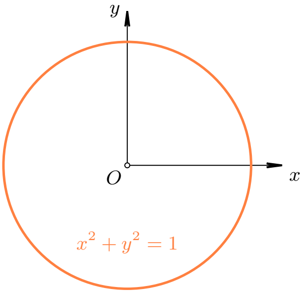
Примери

Пример 2

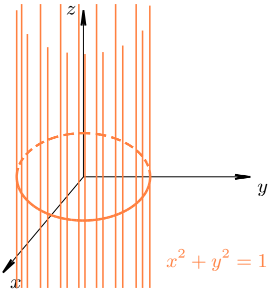
а) Одредити ортонормирани координатни систем (x', y', z') у односу на раван $\alpha : x - y - 2 = 0$ и написати везу тих координата са координатама (x, y, z).

б) Одредити параметризацију круга са центром у тачки $C(1, -1, 2) \in \alpha$, полупречника $r = 3$.

Једначине круга у равни и простору

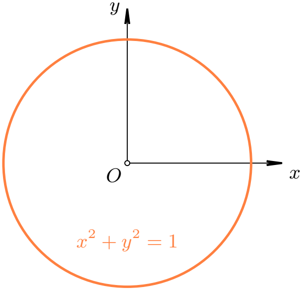


Слика 6: Круг

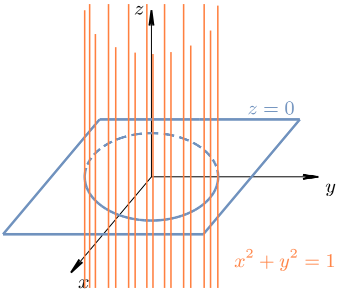


Слика 7: Цилиндар

Једначине круга у равни и простору



Слика 6: Круг



Слика 7: Цилиндар $\longrightarrow$ круг

Параметарска једначина праве

Права у простору се задаје тачком $P(x_0, y_0, z_0)$ и ненула вектором правца $\overrightarrow{p}(p_x, p_y, p_z)$:

$$M(t) = M = P + t\overrightarrow{p}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Параметарска једначина праве

Права у простору се задаје тачком $P(x_0, y_0, z_0)$ и ненула вектором правца $\vec{p}(p_x, p_y, p_z)$:

$$M(t) = M = P + t\vec{p}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Параметарска једначина праве:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + tp_x, \\ y &= y_0 + tp_y, \\ z &= z_0 + tp_z, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Параметарска једначина праве

Права у простору се задаје тачком $P(x_0, y_0, z_0)$ и ненула вектором правца $\vec{p}(p_x, p_y, p_z)$:

$$M(t) = M = P + t\vec{p}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Параметарска једначина праве:

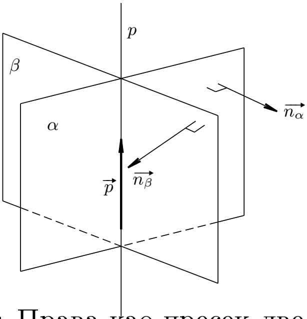
$$\begin{aligned} x &= x_0 + tp_x, \\ y &= y_0 + tp_y, \\ z &= z_0 + tp_z, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Канонска једначина праве:

$$\frac{x - x_0}{p_x} = \frac{y - y_0}{p_y} = \frac{z - z_0}{p_z}.$$

Права као пресек две равни

$$\left.\begin{array}{l}\alpha:\ a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0\\ \beta:\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0\end{array}\right\}\Longrightarrow \overrightarrow{p}=\overrightarrow{n_\alpha}\times\overrightarrow{n_\beta}$$



Слика 8: Права као пресек две равни

Примери

Пример 3

Праву $p: x - z = 0, 2x - y + 1 = 0$ записати параметарски.

Пример 4

Праву $p: x = t + 4,\ y = -t + 1,\ z = 3t,\ t \in \mathbb{R}$ записати као пресек две равни.

Пример 5

Одредити једначину праве која садржи тачке $A(1, 2, 3)$ и $B(3, 2, 1)$.

Прамен равни

Теорема 1.1

Скуп свих равни које садрже праву $p = \alpha \cap \beta$ је дат једначином:

$$\gamma : \lambda_1(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + \lambda_2(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0,$$

за $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Прамен равни

Теорема 1.1

Скуп свих равни које садрже праву $p = \alpha \cap \beta$ је дат једначином:

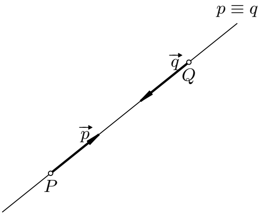
$$\gamma : \lambda_1(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + \lambda_2(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0,$$

за $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Пример 6

Одредити једначину равни која садржи тачку $M(1, 4, -2)$ и праву $p : x - y - 1 = 0, z - 2x = 0$.

Међусобни положаји две праве

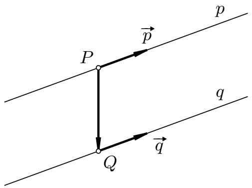


Слика 9: Праве које се поклапају

$$\boxed{\vec{p} \quad \vec{q} \quad \overrightarrow{PQ}}$$

колинеарни

Међусобни положаји две праве

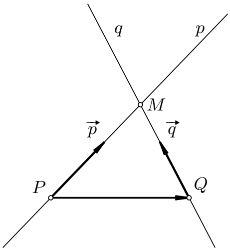


Слика 9: Паралелне праве

$\boxed{\vec{p} \quad \vec{q}}$ $\boxed{\overrightarrow{PQ}}$

колинеарни неколинеаран

Међусобни положаји две праве

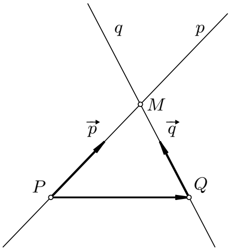


Слика 9: Праве које се секу

$\vec{p}$ $\vec{q}$ $\overrightarrow{PQ}$

неколинеарни

Међусобни положаји две праве

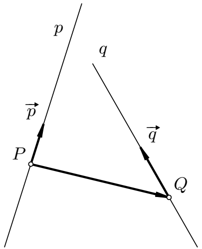


Слика 9: Праве које се секу

$\boxed{\vec{p} \quad \vec{q} \quad \overrightarrow{PQ}}$

копланарни

Међусобни положаји две праве



Слика 9: Мимоилазне праве

$$\boxed{\vec{p} \quad \vec{q} \quad \overrightarrow{PQ}}$$

некопланарни

Пример 7

Одредити међусобни положај правих:

(а) $p : \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-19}{5} = \dfrac{z-2}{1}, \quad q : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z+2}{4};$

(б) $p : \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-2}{0} = \dfrac{z-2}{-1}, \quad q : 2x = y,\ 3x = z;$

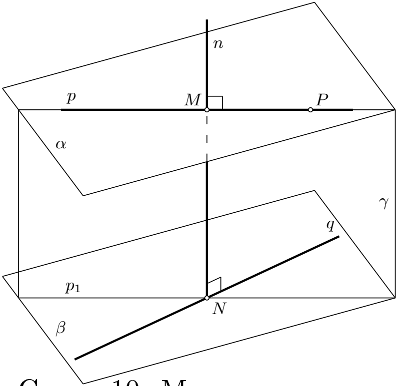
(в) $p : \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-2}{0} = \dfrac{z-2}{-1}, \quad q : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{0} = \dfrac{z-3}{-1};$

(г) $p : \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-2}{0} = \dfrac{z-2}{-1}, \quad q : \dfrac{x+1}{-2} = \dfrac{y-2}{0} = \dfrac{z+7}{2}.$

Мимоилазне праве

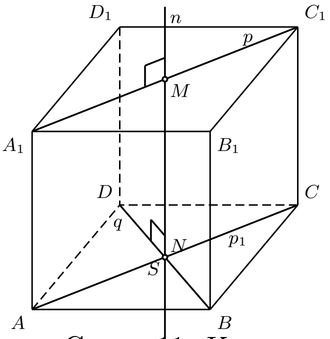
Теорема 2.1

Мимоилазне праве p и q имају јединствену заједничку нормалу, тј. праву која сече обе праве и нормална је на њих.



Слика 10: Мимоилазне праве

Примери

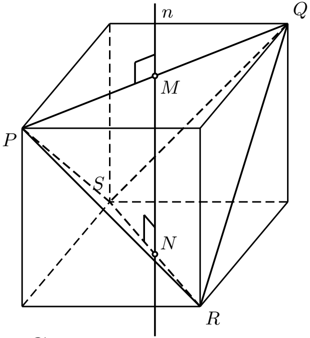


Слика 11: Коцка

Пример 8

Дијагонале наспрамних пљосни коцке су мимоилазне праве, а њихова заједничка нормала је одређена средиштима тих дијагонала.

Примери



Слика 12: Тетраедар

Пример 9

Шта је заједничка нормала мимоилазних ивица PQ и RS правилног тетраедра $PQRS$?

Међусобни положаји праве и равни

Права p и раван α могу да:

- се секу;
- буду паралелне;
- права припада равни.

Међусобни положаји праве и равни

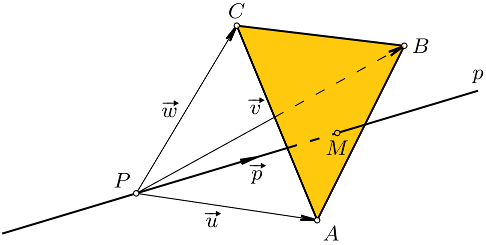
Права p и раван α могу да:

- се секу;
- буду паралелне;
- права припада равни.

Пример 10

Одредити међусобни положај праве $p : \dfrac{x+4}{0} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-1}{1}$ и равни $\alpha : x - 2y + 5z - 1 = 0$.

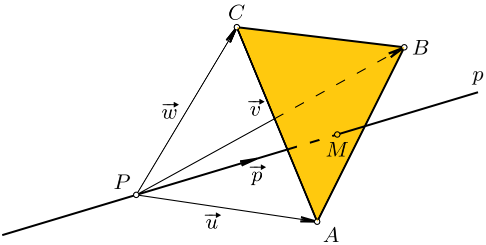
Продор праве кроз троугао



Слика 13: Продор праве кроз троугао

$$\operatorname{sign}[\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}, \vec{p}] = \operatorname{sign}[\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PC}, \vec{p}] = \operatorname{sign}[\overrightarrow{PC}, \overrightarrow{PA}, \vec{p}]$$

Продор праве кроз троугао

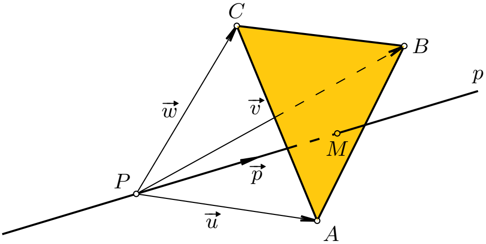


Слика 13: Продор праве кроз троугао

$$M = P + t\vec{p},$$

$$t = \frac{[\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PC}]}{[\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}, \vec{p}] + [\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PC}, \vec{p}] + [\overrightarrow{PC}, \overrightarrow{PA}, \vec{p}]}$$

Продор праве кроз троугао

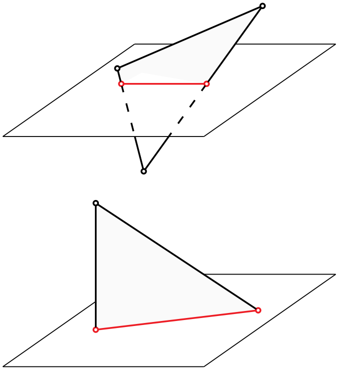


Слика 13: Продор праве кроз троугао

Пример 11

Да ли права $p: \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z+1}{2}$ сече троугао ABC, $A(2,4,6)$, $B(-4,2,0)$, $C(6,4,-2)$?

Пресек троугла и равни



Слика 14: Пресек равни и троугла

Растојање тачке од праве/равни

Теорема 3.1

Растојање тачке M од праве p задате тачком P и вектором правца P дато је формулом:

$$d = \frac{|\vec{p} \times \overrightarrow{PM}|}{|\vec{p}|}.$$

Растојање тачке од праве/равни

Теорема 3.1

Растојање тачке M од праве p задате тачком P и вектором правца P дато је формулом:

$$d = \frac{|\vec{p} \times \overrightarrow{PM}|}{|\vec{p}|}.$$

Теорема 3.2

Растојање тачке $M(x_0, y_0, z_0)$ од равни $\alpha : \ ax + by + cz + d = 0$ дато је формулом:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Примери

Пример 12

Одредити растојање тачке $M(1,0,-1)$ од:

а) Праве $p: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z}{2}$;

б) Равни $\alpha: x + y - 4z = 0$.

Растојање између мимоилазних правих

Теорема 3.3

Растојање између мимоилазних правих p и q дато је формулом:

$$d = \frac{|[\vec{p}, \vec{q}, \overrightarrow{PQ}]|}{|\vec{p} \times \vec{q}|}.$$

Растојање између мимоилазних правих

Теорема 3.3

Растојање између мимоилазних правих p и q дато је формулом:

$$d = \frac{|[\vec{p}, \vec{q}, \overrightarrow{PQ}]|}{|\vec{p} \times \vec{q}|}.$$

Пример 13

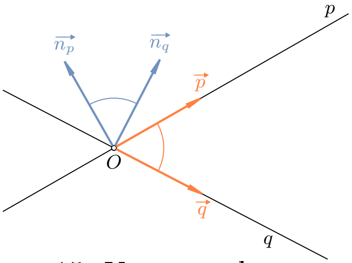
Одредити заједничку нормалну и растојање између мимоилазних правих

$$p : \frac{x-6}{3} = \frac{y-5}{4} = \frac{z}{0},$$
$$q : \frac{x+1}{4} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z-15}{-5}.$$

Углови између правих и равни

- Угао између правих p и q је оштар угао између њихових нормалних вектора.

$$\angle(p,q) = \text{оштар}\angle(\vec{p},\vec{q}) = \arccos\frac{|\vec{p}\circ\vec{q}|}{|\vec{p}|\cdot|\vec{q}|}$$

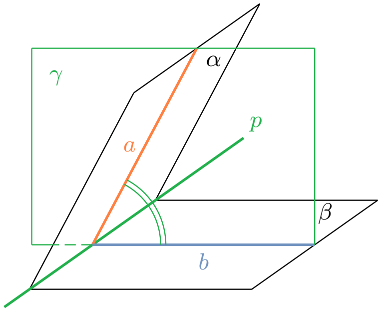


Слика 15: Угао између две праве

Углови између правих и равни

- Угао између равни α и β је оштар угао између правих a и b.

$$\angle(\alpha,\beta) = \arccos\frac{|\overrightarrow{n_\alpha}\circ\overrightarrow{n_\beta}|}{|\overrightarrow{n_\alpha}|\cdot|\overrightarrow{n_\beta}|}$$

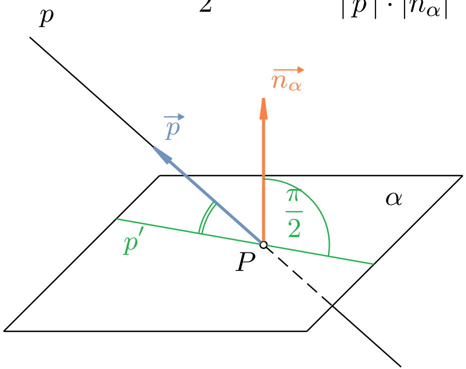


Слика 16: Угао између две равни

Углови између правих и равни

- Угао између праве p и равни α је угао између праве p и њене нормалне пројекције p' на раван α.

$$\angle(p,\alpha) = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{|\overrightarrow{p} \circ \overrightarrow{n_\alpha}|}{|\overrightarrow{p}| \cdot |\overrightarrow{n_\alpha}|}$$



Слика 17: Угао између праве и равни

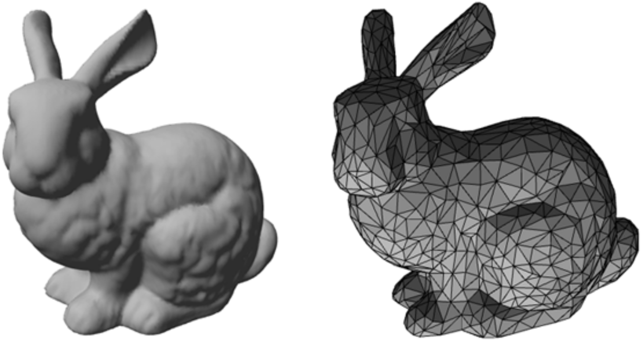
Примери

Пример 14

Одредити тачку продора праве $p : \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z-5}{-4}$ кроз раван $\alpha : 3x + y + 5z - 7 = 0$.

Колики угао права p заклапа са равни α?

Полиедарски модел глатке површи



Полиедарска површ

Дефиниција 4.1

Полиедарска површ $\mathcal{M}$ је објекат простора који је унија коначно много пљосни:

1. Пљосни су конвексни полигони;
2. Свака ивица припада највише двема пљоснима (унутрашње и рубне ивице);
3. Пресек две пљосни може бити само ивица.

Полиедарска површ

Дефиниција 4.1

Полиедарска површ $\mathcal{M}$ је објекат простора који је унија коначно много пљосни:

1. Пљосни су конвексни полигони;
2. Свака ивица припада највише двема пљоснима (унутрашње и рубне ивице);
3. Пресек две пљосни може бити само ивица.

- апстрактна полиедарска површ

Полиедарска површ

Дефиниција 4.1

Полиедарска површ $\mathcal{M}$ је објекат простора који је унија коначно много пљосни:

1. Пљосни су конвексни полигони;
2. Свака ивица припада највише двема пљоснима (унутрашње и рубне ивице);
3. Пресек две пљосни може бити само ивица.

- апстрактна полиедарска површ
- полиедар

Полиедарска површ

Дефиниција 4.1

Полиедарска површ $\mathcal{M}$ је објекат простора који је унија коначно много пљосни:

1. Пљосни су конвексни полигони;
2. Свака ивица припада највише двема пљоснима (унутрашње и рубне ивице);
3. Пресек две пљосни може бити само ивица.

- апстрактна полиедарска површ
- полиедар
- повезана површ

Табела темена и повезаности

- Табела темена
- Табела повезаности

Табела темена и повезаности

- Табела темена
- Табела повезаности

Табела темена и повезаности

- Табела темена
- Табела повезаности

Пример 15

Одредити табелу повезаности тетраедра.

Табела темена и повезаности

- Табела темена
- Табела повезаности

Пример 15

Одредити табелу повезаности тетраедра.

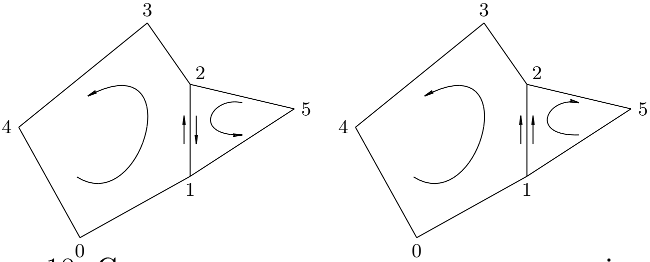
Пример 16

Дата је апстрактна полиедарска површ табелом повезаности:

$$p_0 = \langle 0,1,3\rangle,\ \ p_1 = \langle 0,1,5,4\rangle,\ \ p_2 = \langle 1,2,6,5\rangle,$$
$$p_3 = \langle 5,6,7\rangle,\ \ p_4 = \langle 7,4,0,3\rangle,\ \ p_5 = \langle 2,6,7,3\rangle.$$

(а) Одредити јој листу темена и ивица;
(б) Испитати да ли површ повезана;
(в) Одредити јој руб и број компонената руба;
(г) Скицирати површ.

Оријентабилност полиедарске површи



Слика 18: Суседне пљосни исте и различите оријентације

$\mathcal{M}$ – оријентабилна ако су сваке две суседне пљосни исте оријентације.

Оријентабилност

Пример 17

Коцка је оријентабилна.

Оријентабилност

Пример 17

Коцка је оријентабилна.

Теорема 4.1

Полиедарски модели неке глатке површи су или сви оријентабилни или сви неоријентабилни.

Оријентабилност

Пример 17

Коцка је оријентабилна.

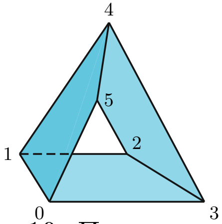
Теорема 4.1

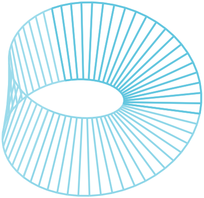
Полиедарски модели неке глатке површи су или сви оријентабилни или сви неоријентабилни.

Теорема 4.2

Сваки прост полиедар је оријентабилна површ.

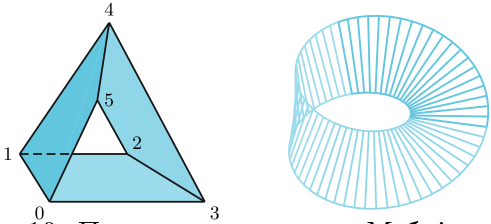
Мебијусова трака





Слика 19: Полиедарски модели Мебијусове траке

Мебијусова трака



Слика 19: Полиедарски модели Мебијусове траке

Пример 18

Полиедарски модел Мебијусове траке је неоријентабилан.

Ојлерова карактеристика и род површи

Ојлерова карактеристика полиедарске површи $\mathcal{M}$ је број

$$\chi(\mathcal{M}) = \boxed{T} - \boxed{I} + \boxed{P}$$

темена ивице пљосни

Ојлерова карактеристика и род површи

Ојлерова карактеристика полиедарске површи $\mathcal{M}$ је број

$$\chi(\mathcal{M}) = \underbrace{\boxed{T}}_{\text{темена}} - \underbrace{\boxed{I}}_{\text{ивице}} + \underbrace{\boxed{P}}_{\text{пљосни}}$$

Теорема 4.3

Сви полиедарски модели неке глатке површи имају исту Ојлерову карактеристику.

Ојлерова карактеристика и род површи

Ојлерова карактеристика полиедарске површи $\mathcal{M}$ је број

$$\chi(\mathcal{M}) = \underbrace{\boxed{T}}_{\text{темена}} - \underbrace{\boxed{I}}_{\text{ивице}} + \underbrace{\boxed{P}}_{\text{пљосни}}$$

Теорема 4.3

Сви полиедарски модели неке глатке површи имају исту Ојлерову карактеристику.

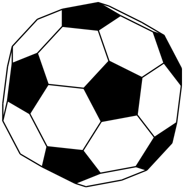
Важи:

$$\chi(\mathcal{M}) = 2 - 2\underbrace{\boxed{r}}_{\text{род полиедра}}$$

Примери

Пример 19

Ако је $\mathcal{M}$ полиедарски модел сфере, тада је $\chi(\mathcal{M}) = 2$.



Слика 20: Полиедарски модел сфере

Пример 20

Ојлерова карактеристика Мебијусове траке је нула.

Примери

Пример 21

Дата је полиедарска површ:

$$
\begin{aligned}
p_0 &= \langle 0, 1, 4, 3 \rangle, & p_5 &= \langle 4, 5, 8, 7 \rangle, \\
p_1 &= \langle 1, 2, 5, 4 \rangle, & p_6 &= \langle 8, 7, 1, 2 \rangle, \\
p_2 &= \langle 2, 0, 3, 5 \rangle, & p_7 &= \langle 0, 1, 7, 6 \rangle \\
p_3 &= \langle 6, 8, 5, 3 \rangle, & p_8 &= \langle 0, 6, 8, 2 \rangle. \\
p_4 &= \langle 6, 3, 4, 7 \rangle
\end{aligned}
$$

а) Доказати да је она полиедар, тј. да нема руб.

б) Израчунати њену Ојлерову карактериску и род.

Платонова тела

Теорема 4.4

Постоји тачно пет Платонових тела.

Платонова тела

Теорема 4.4

Постоји тачно пет Платонових тела.

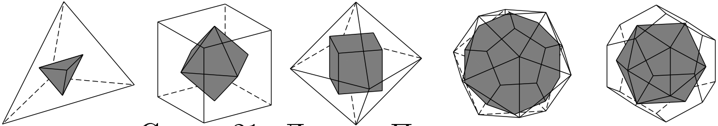
полиедар	p	q	T	I	P
тетраедар	3	3	4	6	4
коцка (хексаедар)	3	4	8	12	6
октаедар	4	3	6	12	8
додекаедар	3	5	20	30	12
икосаедар	5	3	12	30	20

Платонова тела

Теорема 4.4

Постоји тачно пет Платонових тела.

полиедар	p	q	T	I	P
тетраедар	3	3	4	6	4
коцка (хексаедар)	3	4	8	12	6
октаедар	4	3	6	12	8
додекаедар	3	5	20	30	12
икосаедар	5	3	12	30	20



Слика 21: Дуална Платонова тела