

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Геометрија II–смер

део 5: Полигони у равни

Тијана Шукиловић

21. децембар 2015

Полигонска линија и полигон

Дефиниција 1.1

Полигонска линија $A_0 \dots A_{n-1} A_n$ је унија дужи $A_0 A_1, \dots, A_{n-1} A_n$ које називамо **ивице** полигонске линије. Тачке A_0, \dots, A_n називају се **темена** полигонске линије.

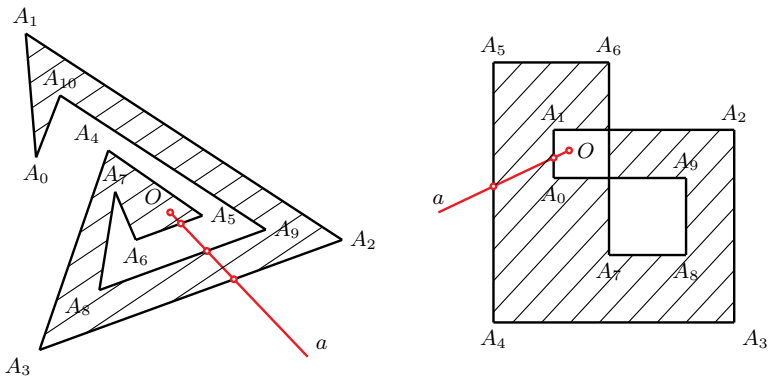
Полигонска линија и полигон

Дефиниција 1.1

Полигонска линија $A_0 \dots A_{n-1} A_n$ је унија дужи $A_0 A_1, \dots, A_{n-1} A_n$ које називамо **ивице** полигонске линије. Тачке A_0, \dots, A_n називају се **темена** полигонске линије.

- затворена полигонска линија = **полигон**
- суседна темена/ивице
- прост/сложен полигон
- дијагонала полигона
- унутрашња дијагонала полигона

Унутршњост полигона



Слика 1: Унутрашњост простог и сложеног полигона

Триангулација полигона

- Триангулација је разлагање неког лика на троуглове.

Триангулација полигона

- Триангулација је разлагање неког лика на троуглове.
- Триангулација простог полигона је разлагање његове унутрашњости унутрашњим дијагоналама које се међусобно не секу.

Триангулација полигона

- Триангулација је разлагање неког лика на троуглове.
- Триангулација простог полигона је разлагање његове унутрашњости унутрашњим дијагоналама које се међусобно не секу.

Лема 1.1

Сваки прост полигон са више од 3 темена има унутрашњу дијагоналу.

Триангулација полигона

- Триангулација је разлагање неког лика на троуглове.
- Триангулација простог полигона је разлагање његове унутрашњости унутрашњим дијагоналама које се међусобно не секу.

Лема 1.1

Сваки прост полигон са више од 3 темена има унутрашњу дијагоналу.

Теорема 1.1

Сваки прост полигон допушта триангулацију и свака триангулација полигона са n темена се састоји од тачно $n - 2$ троугла.

Проблем уметничке галерије

Проблем: Поставити минималан број чувара који покривају читаву галерију.

Проблем уметничке галерије

Проблем: Поставити минималан број чувара који покривају читаву галерију.

Галерија = прост полигон са n ивица;

Чувари = тачке унутар полигона.

Проблем уметничке галерије

Проблем: Поставити минималан број чувара који покривају читаву галерију.

Галерија = прост полигон са n ивица;

Чувари = тачке унутар полигона.

Chvátal: Горња граница = $\frac{n}{3}$ чувара!

Проблем уметничке галерије

Проблем: Поставити минималан број чувара који покривају читаву галерију.

Галерија = прост полигон са n ивица;

Чувари = тачке унутар полигона.

Chvátal: Горња граница = $\frac{n}{3}$ чувара!

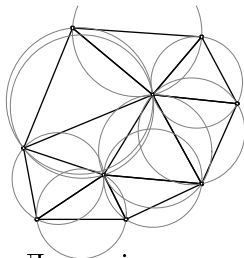
Алгоритам:

- Триангулисати полигон;
- Обојити темена подеоних троуглова (3-бојење);
- Изабрати за чуваре темена обојена истом бојом.

Алгоритми за триангулацију полигона

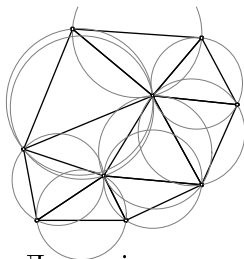
- унутрашњим дијагоналама
- „завртањем ушију”
- триангулација монотоних полигона и монотоних планина
- Делонијева триангулација
- триангулација у линеарном времену

Делонијева триангулација



Слика 3: Делонијева триангулација

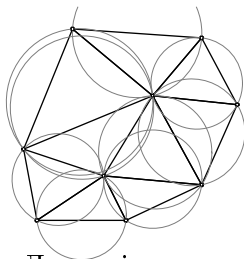
Делонијева триангулација



Слика 3: Делонијева триангулација

Делонијева триангулација **минимизује максималан полупречник круга** описаног око троугла триангулације.

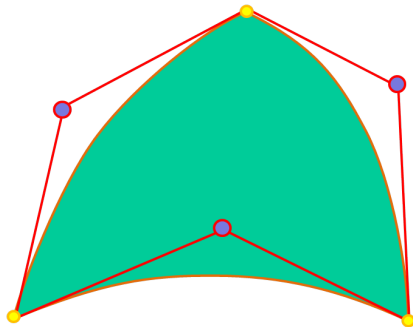
Делонијева триангулација



Слика 3: Делонијева триангулација

Делонијева триангулација **минимизује максималан полупречник круга** описаног око троугла триангулације. Поступком максимизације најмањег угла се **не минимизује највећи угао, нити се минимизују дужине страница.**

„Криволинијска” триангулација



Слика: Безијеров троугао са контролним полигоном

„Криволинијска” триангулација

„Криволинијска” триангулација

„Криволинијска” триангулација

Површина простог полигона

- Оријентисана површина полигона $P(A_0A_1 \dots A_{n-1})$

Површина простог полигона

- Оријентисана површина полигона $P(A_0A_1 \dots A_{n-1})$

Теорема 1.2

За прост полигон $A_0A_1 \dots A_{n-1}$ и произвољну тачку равни A важи:

$$P(A_0, A_1, \dots, A_{n-1}) = P(A, A_0, A_1) + \dots + P(A, A_{n-1}, A_0).$$

Површина простог полигона

- Оријентисана површина полигона $P(A_0A_1 \dots A_{n-1})$

Теорема 1.2

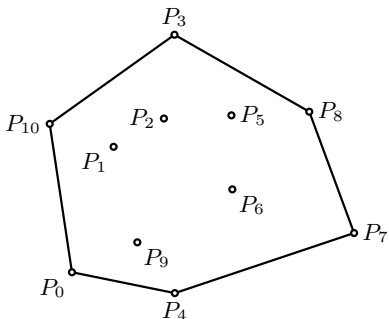
За прост полигон $A_0A_1 \dots A_{n-1}$ и произвољну тачку равни A важи:

$$P(A_0, A_1, \dots, A_{n-1}) = P(A, A_0, A_1) + \dots + P(A, A_{n-1}, A_0).$$

$$\begin{aligned} P(A_0, A_1, \dots, A_{n-1}) &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (x_k y_{k+1} - x_{k+1} y_k) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} x_k (y_{k+1} - y_{k-1}) \end{aligned}$$

Конвексни омотач

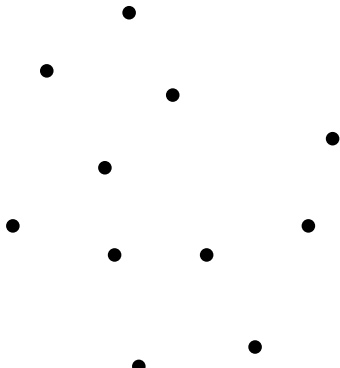
- КОНВЕКСАН ЛИК
- КОНВЕКСАН ОМОТАЧ СКУПА ТАЧАКА



Слика 4: Пример конвексног омотача скупа од 11 тачака

Алгоритам „ивичне дужи” (спори алгоритам)

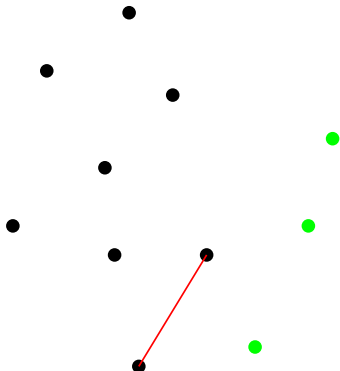
- Временска сложеност $O(n^3)$



Слика 5: Пример – 11 тачака

Алгоритам „ивичне дужи” (спори алгоритам)

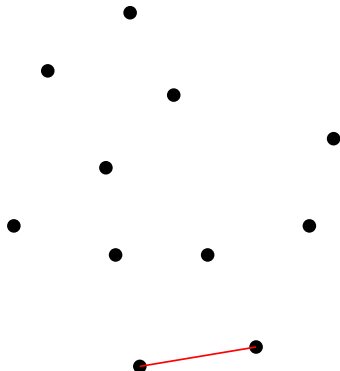
- Временска сложеност $O(n^3)$



Слика 5: Пример – унутрашња дуж

Алгоритам „ивичне дужи“ (спори алгоритам)

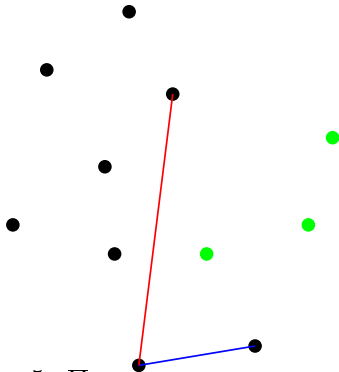
- Временска сложеност $O(n^3)$



Слика 5: Пример – ивична дуж

Алгоритам „ивичне дужи“ (спори алгоритам)

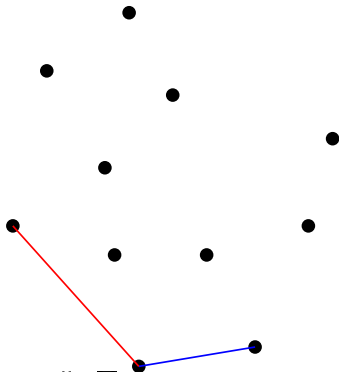
- Временска сложеност $O(n^3)$



Слика 5: Пример – унутрашња дуж

Алгоритам „ивичне дужи” (спори алгоритам)

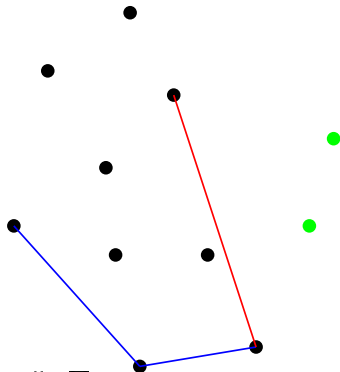
- Временска сложеност $O(n^3)$



Слика 5: Пример – ивична дуж

Алгоритам „ивичне дужи“ (спори алгоритам)

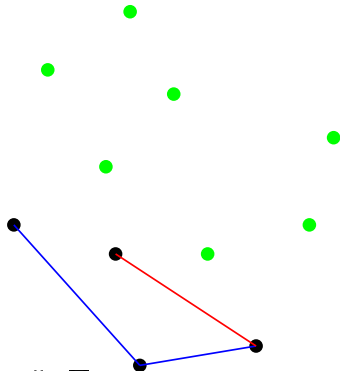
- Временска сложеност $O(n^3)$



Слика 5: Пример – унутрашња дуж

Алгоритам „ивичне дужи” (спори алгоритам)

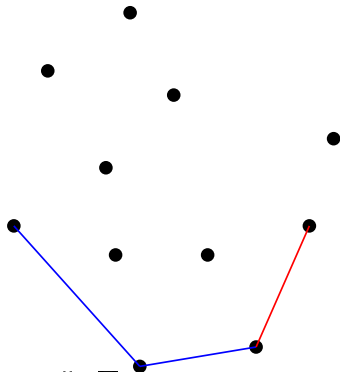
- Временска сложеност $O(n^3)$



Слика 5: Пример – унутрашња дуж

Алгоритам „ивичне дужи” (спори алгоритам)

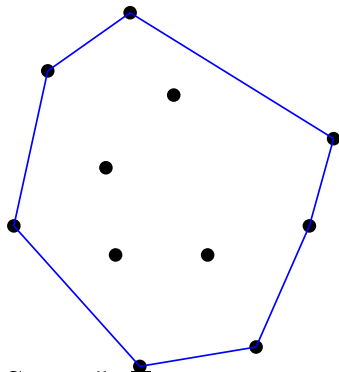
- Временска сложеност $O(n^3)$



Слика 5: Пример – ивична дуж

Алгоритам „ивичне дужи” (спори алгоритам)

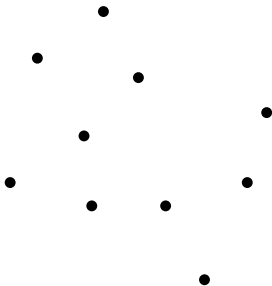
- Временска сложеност $O(n^3)$



Слика 5: Пример – омотач

Алгоритам „паковање поклона” (gift wrap)

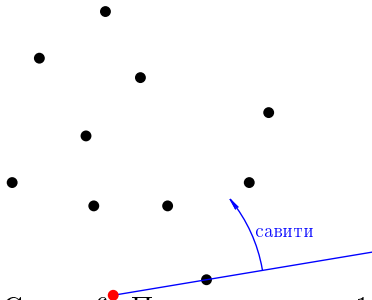
- Временска сложеност $O(n^2)$



Слика 6: Пример – P_0 = најнижа (крајња десна) тачка

Алгоритам „паковање поклона” (gift wrap)

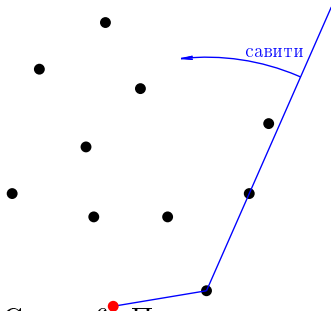
- Временска сложеност $O(n^2)$



Слика 6: Пример – корак 1

Алгоритам „паковање поклона” (gift wrap)

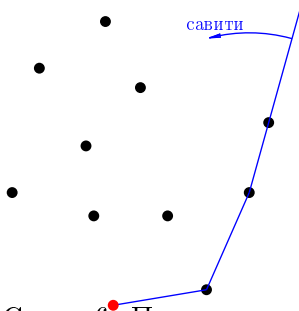
- Временска сложеност $O(n^2)$



Слика 6: Пример – корак 2

Алгоритам „паковање поклона” (gift wrap)

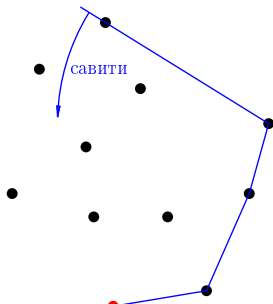
- Временска сложеност $O(n^2)$



Слика 6: Пример – корак 3

Алгоритам „паковање поклона” (gift wrap)

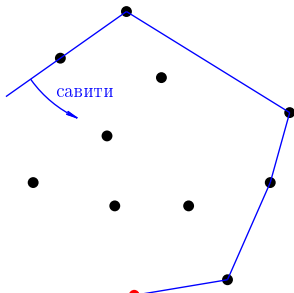
- Временска сложеност $O(n^2)$



Слика 6: Пример – корак 4

Алгоритам „паковање поклона” (gift wrap)

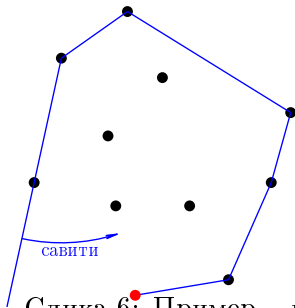
- Временска сложеност $O(n^2)$



Слика 6: Пример – корак 5

Алгоритам „паковање поклона” (gift wrap)

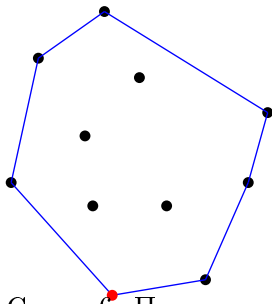
- Временска сложеност $O(n^2)$



Слика 6: Пример – корак 6

Алгоритам „паковање поклона” (gift wrap)

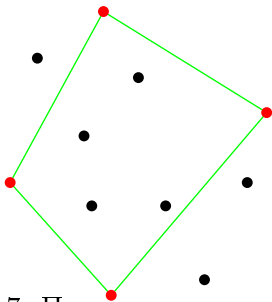
- Временска сложеност $O(n^2)$



Слика 6: Пример – омотач

„Брзи” алгоритам (quickhull)

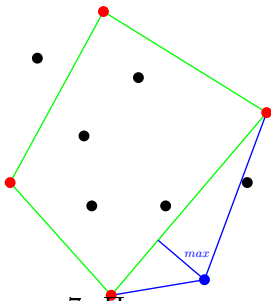
- Временска сложеност $O(n \log n)$



Слика 7: Пример – почетни четвороугао

„Брзи” алгоритам (quickhull)

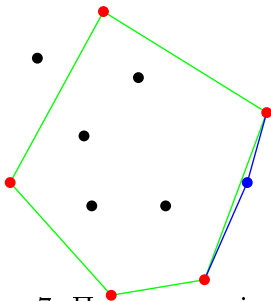
- Временска сложеност $O(n \log n)$



Слика 7: Пример – доњи десни

„Брзи” алгоритам (quickhull)

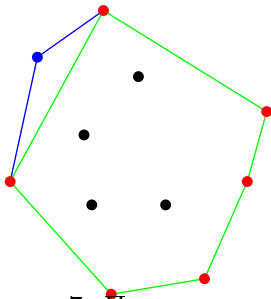
- Временска сложеност $O(n \log n)$



Слика 7: Пример – најдаља од нове

„Брзи” алгоритам (quickhull)

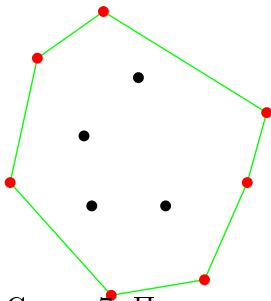
- Временска сложеност $O(n \log n)$



Слика 7: Пример – горњи леви

„Брзи” алгоритам (quickhull)

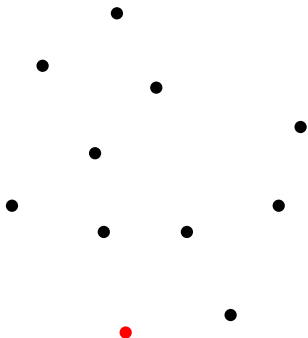
- Временска сложеност $O(n \log n)$



Слика 7: Пример – омотач

Грахамов алгоритам

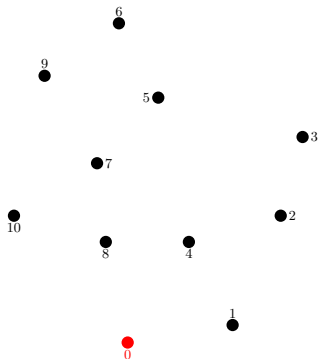
- Временска сложеност $O(n \log n)$



Слика 8: Пример – P_0 = најнижа (крајња десна) тачка

Грахамов алгоритам

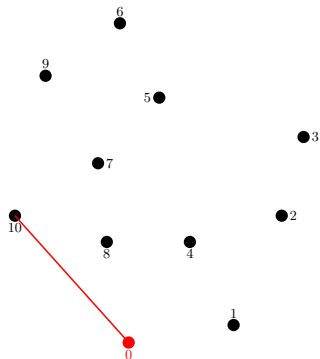
- Временска сложеност $O(n \log n)$



Слика 8: Пример – сортиране тачке (према углу)

Грахамов алгоритам

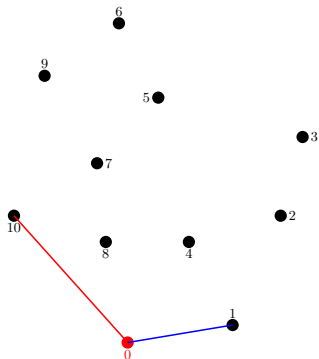
- Временска сложеност $O(n \log n)$



Слика 8: Пример – стек: [10 0]

Грахамов алгоритам

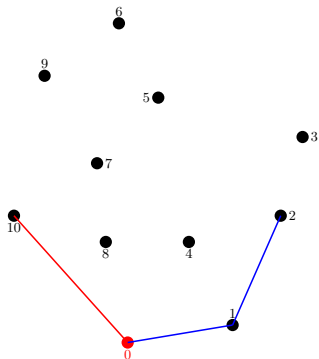
- Временска сложеност $O(n \log n)$



Слика 8: Пример – стек: [10 0 1]

Грахамов алгоритам

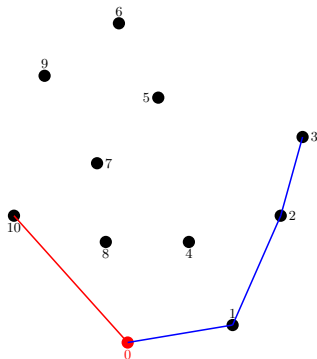
- Временска сложеност $O(n \log n)$



Слика 8: Пример – стек: $[10\ 0\ 1\ 2]$

Грахамов алгоритам

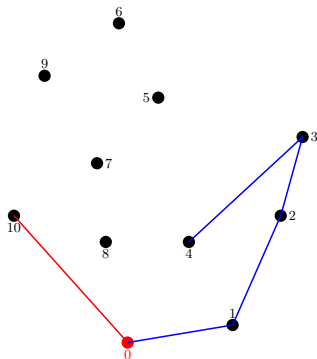
- Временска сложеност $O(n \log n)$



Слика 8: Пример – стек: [10 0 1 2 3]

Грахамов алгоритам

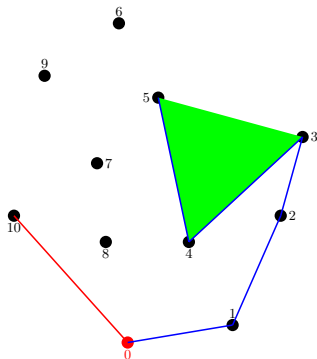
- Временска сложеност $O(n \log n)$



Слика 8: Пример – стек: [10 0 1 2 3 4]

Грахамов алгоритам

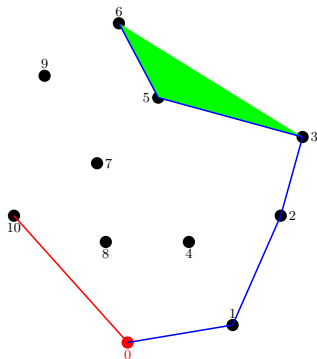
- Временска сложеност $O(n \log n)$



Слика 8: Пример – стек: $[10\ 0\ 1\ 2\ 3\ \cancel{4}\ 5]$

Грахамов алгоритам

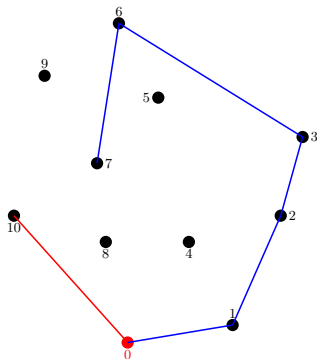
- Временска сложеност $O(n \log n)$



Слика 8: Пример – стек: $[10\ 0\ 1\ 2\ 3\ \cancel{6}]$

Грахамов алгоритам

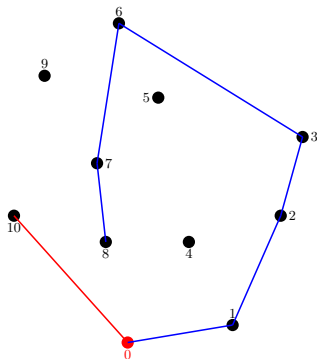
- Временска сложеност $O(n \log n)$



Слика 8: Пример – стек: [10 0 1 2 3 6 7]

Грахамов алгоритам

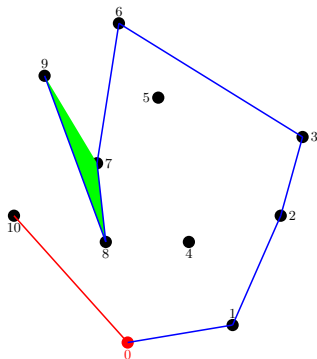
- Временска сложеност $O(n \log n)$



Слика 8: Пример – стек: [10 0 1 2 3 6 7 8]

Грахамов алгоритам

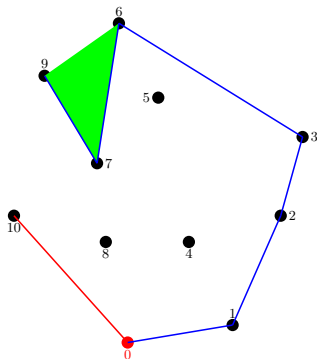
- Временска сложеност $O(n \log n)$



Слика 8: Пример – стек: $[10 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 6 \ 7 \ \cancel{9}]$

Грахамов алгоритам

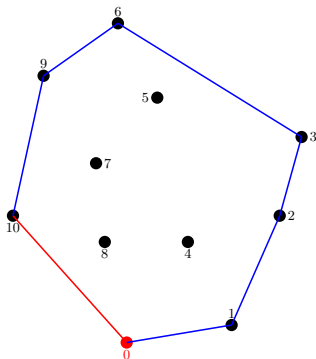
- Временска сложеност $O(n \log n)$



Слика 8: Пример – стек: $[10\ 0\ 1\ 2\ 3\ 6\ \cancel{9}\ 9]$

Грахамов алгоритам

- Временска сложеност $O(n \log n)$



Слика 8: Пример – омотач [10 0 1 2 3 6 9]