Uvod u organizaciju i arhitekturu računara 1

Stefan Mišković

1 Brojni sistemi

1.1 Nepozicioni i pozicioni sistemi

Svi brojni sistemi se mogu podeliti na nepozicione i pozicione. Kod nepozicionih brojnih sistema svaka cifra ukazuje na istu vrednost bez obzira na kom se mestu nalazi. Primeri nepozicionih brojnih sistema su egipatski i rimski brojni sistem. Cifre koje figurišu kod rimskog sistema su I, V, X, L, C, D i M, koje redom imaju vrednosti 1, 5, 10, 50, 100, 500 i 1000. Njihova vrednost će uvek biti ista, bez obzira na kojoj poziciji u broju se nalaze. Na primer, broj MDCCXXXII, zapisan u rimskom sistemu, ima vrednost 1732 u dekadnom. Oba pojavljivanja cifre C u tom broju označavaju vrednost 100, a sva tri pojavljivanja cifre X u tom broju označavaju vrednost 10.

Kod pozicionih brojnih sistema, ista cifra može imati različite vrednosti u zavisnosti od toga na kom mestu se nalazi. Primer pozicionog brojnog sistema je dekadni sistem. Na primer, kod broja 2322, sve tri dvojke imaju različito značenje. Jedna označava cifru jedinica, druga cifru desetica, a treća cifru hiljada, i shodno tome sve imaju različite vrednosti.

Pozicioni brojni sistemi mogu imati fiksnu ili promenljivu osnovu. Sistemi sa fiksnom osnovom su, na primer, dekadni ili binarni sistem. U prvom slučaju, ona iznosi 10, a u drugom 2. Primer pozicionog sistema sa promenljivom osnovom je sistem za računanje vremena, zapisan u obliku sat:minut:sekunda. Osnovne sistema, gledajući zdesna ulevo su redom 60, 60 i 24, budući da ima 60 sekundi u minutu, 60 minuta u satu i 24 sata u danu. Primer zapisa broja u tom sistemu je 13:25:37.

1.2 Pozicioni sistemi sa fiksnom osnovom

Neka je dat proizvoljan ceo broj x u osnovi n, zapisan sa k cifara. On se može zapisati u obliku $(x)_n = x_{k-1}x_{k-2}\dots x_1x_0$. Mesto cifre u zapisu broja se naziva pozicija cifre, a ovde nulta pozicija odgovara cifri najmanje težine, a $(k-1)$-va pozicija cifri najveće težine. Broj cifara k predstavlja ujedno i dužinu broja. Oznaka $(x)_n$ označava da je broj x zapisan u osnovi n. Na primer, broj $(3125)_{10}$ je broj zapisan u dekadnom sistemu i dužine je 4. Cifra najmanje težine je 5, a cifra najveće težine 3.

Da bi se definisao brojni sistem sa fiksnom osnovom, dovoljno je navesti vrednosti njegovih cifara, kao i vrednost osnove. U nastavku će biti navedeno nekoliko takvih brojnih sistema.

- Kod dekadnog sistema, osnova je 10, a cifre su 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 i 9. Primeri zapisa brojeva su 3125 i 4329. Kao i kod svakog sistema iz ove grupe, prva cifra ne sme biti 0, a svaka druga može biti bilo koja cifra iz skupa.

- Kod binarnog sistema, osnova je 2, a cifre su 0 i 1. Primeri zapisa brojeva su 101 i 11111.
- Kod oktalnog sistema, osnova je 8, a cifre su 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 i 7. Primeri zapisa brojeva su 7013 i 41236.
- Kod troičnog sistema, osnova je 3, a cifre su 0, 1 i 2. Primeri zapisa brojeva su 2012 i 111102. Važno je napomenuti da brojevi poput 301 ili 4302 ne mogu pripadati ovom sistemu, jer cifre 3 i 4 ne pripadaju skupu cifara. Za sve cifre važi da je njihova vrednost manja od vrednosti osnove.
- Kod heksadekadnog sistema, osnova je 16, a cifre su 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E i F. Ovo je primer sistema kod koga se koristi nekoliko prvih slova abecede za zapis, pored standardnih dekadnih cifara. Primeri zapisa brojeva su A3EE5 i 114F.
- Kog negabinarnog sistema, osnova je -2, a cifre su 0 i 1. Kao i kod binarnog sistema, primeri zapisa brojeva mogu biti 101 i 11111, ali pri prevođenju u dekadni sistem, oni ne bi imali istu vrednost kao pri prevođenju u dekadni iz binarnog sistema. Ovo je primer sistema gde je osnova negativan ceo broj.
- Drugi primer sistema čija je osnova negativan ceo broj može biti negadekadni sistem, čija je osnova -10, a cifre 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 i 9. Primeri zapisa brojeva mogu biti 3125 i 4329, ali njihove vrednosti nisu identične i u dekadnom brojnom sistemu.
- Osnova sistema može biti i racionalan ili realan broj. Na primer, postoji sistem sa osnovom 0.5 čije su cifre 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 i 9. Primeri zapisa brojeva mogu biti 3125 i 4329, ali njihove vrednosti nisu identične i u dekadnom brojnom sistemu.
- Kod balansiranog troičnog sistema, osnova je 3 kao kod troičnog, a cifre su 0, 1 i -1. Primeri zapisa brojeva su 101101 i $1(-1)0(-1)11$.

1.3 Zapis mešovitih brojeva

Broj je mešovit ukoliko ima cifara sa obe strane decimalne tačke. Mešovit broj x se u osnovi n može zapisati kao $(x)_n = x_{k-1}x_{k-2}\dots x_1x_0.x_{-1}x_{-2}\dots x_{-l}$. Njegova dužina, odnosno ukupan broj cifara, iznosi $k+l$. Ako je broj oblika $x_{k-1}x_{k-2}\dots x_1x_0$, radi se o celom broju, a ako je oblika $0.x_{-1}x_{-2}\dots x_{-l}$, reč je o razlomljenom broju. Ovakav zapis se naziva zapis mešovitih brojeva u običajenom obliku. Na primer, $(1326.43278)_{10}$ i $(1011.011)_2$ su primeri zapisa dva mešovita broja u dekadnom i binarnom sistemu.

Drugi način zapisa mešovitih brojeva je zapis u fiksnom zarezu. Ideja je da se svaki mešovit broj zapisuje pomoću m cifara, od kojih l ($l \leq m$) cifara predstavlja razlomljeni deo, a preostalih $m-l$ cifara celobrojni deo broja. Takav zapis u fiksnom zarezu se označava sa $m.l$. Ukoliko je broj cifara u celobrojnom delu veći od $m-l$, broj ne može da se zapiše. Ukoliko je broj cifara u razlomljenom delu veći od l, može se izvršiti odsecanje ili zaokruživanje. Ukoliko je broj cifara u razlomljenom delu manji od l, ostatak zapisa se dopunjuje nulama. Da bismo ovo objasnili primerom, pretpostavimo zbog jednostavnosti da je reč o dekadnom sistemu, jer je slična situacija i u drugim sistemima. U nastavku je prikazan zapis dekadnog mešovitog broja 135.43914 za različite vrednosti m i l. Pritom zvezdice označavaju da broj ne može biti zapisan, a donja crta prazninu.

```
8.5 |  135.43914
9.6 | 135.439140
8.6 |   ********
6.3 |    135.439
8.3 |  __135.439
```

Treći način zapisa mešovitih brojeva je zapis u pokretnom zarezu. Ideja je da se svaki broj može napisati u obliku $f \cdot n^e$, gde je n osnova sistema, f frakcija, a e eksponent. Na primer, dekadni broj 123.456 se može napisati u obliku $12.3456 \cdot 10^1$ ili u obliku $123456 \cdot 10^{-3}$. Zapravo, postoji beskonačno mnogo zapisa ovog broja u datom obliku. Zapis oblika $f_0.f_{-1}f_{-2}\dots f_{-l}$, kod koga je $f_0 \neq 0$ se naziva normalizovan. Ovde je sa $f_0.f_{-1}f_{-2}\dots f_{-l}$ označena frakcija. Normalizovan zapis dekadnog broja 123.456 je $1.23456 \cdot 10^2$. Kako se osnova n najčešće podrazumeva, broj se u pokretnom zarezu najčešće piše u obliku (f, e). Tako su neki od zapisa pomenutog dekadnog broja oblika $(12.3456, 1)$, $(123456, -3)$ i $(1.23456, 2)$. Poslednji zapis je i normalizovan.

1.4 Prevođenje u dekadni sistem

Neka je broj x u osnovi n zapisan u obliku $x_{k-1}x_{k-2}\dots x_1x_0$. Vrednost broja x u osnovi 10 je jednaka $x_{k-1}n^{k-1} + x_{k-2}n^{k-2} + \cdots + x_1n^1 + x_0n^0 = \sum_{i=0}^{k-1} x_in^i$. Ako je broj x razlomljen i oblika $0.x_{-1}x_{-2}\dots x_{-l}$, za njegovo prevođenje u osnovu 10, razmatraju se negativni stepeni osnove n. Vrednost broja x u dekadnoj osnova je tada $x_{-1}n^{-1} + x_{-2}n^{-2} + \cdots + x_{-l}n^{-l} = \sum_{i=-l}^{0} x_in^i$. Prevođenje mešovitog broja x iz osnove n u osnovu 10 se dobija uniranjem prethodne dve formule i dato je sa

$$\begin{aligned}(x)_n &= (x_{k-1}x_{k-2}\dots x_1x_0.x_{-1}x_{-2}\dots x_{-l})_n \\ &= x_{k-1}n^{k-1} + x_{k-2}n^{k-2} + \cdots + x_1n^1 + x_0n^0 + x_{-1}n^{-1} + x_{-2}n^{-2} + \cdots + x_{-l}n^{-l} \\ &= \sum_{i=-l}^{k-1} x_in^i.\end{aligned}$$

U prva dva izraza, broj x i njegove cifre u zapisu su dati u osnovi n. U formuli gde se vrši sabiranje, i cifre i osnova n su u dekadnoj osnovi. Zbog takvih situacija, na primer, heksadekadne cifre A, B, C, D, E i F, kada figurišu u sumi pri prevođenju, treba tretirati kao dekadne brojeve 10, 11, 12, 13, 14 i 15, respektivno.

U nastavku su dati neki primeri prevođenja iz raznih sistema u sistem sa osnovom 10:

- $(10110)_2 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 16 + 4 + 2 = (22)_{10}$.
- $(3127)_8 = 2 \cdot 8^3 + 1 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8^1 + 7 \cdot 8^0 = 3 \cdot 512 + 1 \cdot 64 + 2 \cdot 8 + 7 \cdot 1 = (1623)_{10}$.
- $(1A3)_{16} = 1 \cdot 16^2 + 10 \cdot 16^1 + 3 \cdot 16^0 = 256 + 160 + 3 = (419)_{10}$. Primetimo da je ovde cifri A dodeljena dekadna vrednost 10.
- $(212001)_3 = 2 \cdot 3^5 + 1 \cdot 3^4 + 2 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^0 = (622)_{10}$.
- $(10(-1)(-1)00)_{bt} = 1 \cdot 3^5 + 0 \cdot 3^4 + (-1) \cdot 3^3 + (-1) \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 0 \cdot 3^0 = (207)_{10}$. Ovde je sa *bt* u indeksu označen balansirani troični sistem.

- $(101101)_{-2} = 1\cdot(-2)^5+0\cdot(-2)^4+1\cdot(-2)^3+1\cdot(-2)^2+0\cdot(-2)^1+1\cdot(-2)^0 = (-35)_{10}$.
- $(145)_{0.5} = 1 \cdot 0.5^2 + 4 \cdot 0.5^1 + 5 \cdot 0.5^0 = 0.25 + 2 + 5 = (7.25)_{10}$.
- $(1101.101)_2 = 1\cdot2^3+1\cdot2^2+0\cdot2^1+1\cdot2^0+1\cdot2^{-1}+0\cdot2^{-2}+1\cdot2^{-3} = 8+4+1+0.5+0.125 = (13.625)_{10}$.
- $(233.12)_8 = 2\cdot8^2+3\cdot8^1+3\cdot8^0+1\cdot8^{-1}+2\cdot8^{-2} = 128+24+3+0.125+0.03125 = (155.15625)_{10}$.
- $(0.42)_5 = 4 \cdot 5^{-1} + 2 \cdot 2^{-2} = 0.8 + 0.08 = (0.88)_{10}$.

1.5 Prevođenje iz dekadnog sistema

Neka ceo broj x treba prevesti iz osnove 10 u osnovu n. Neka je pritom zapis broja x u osnovi n dat sa $(x)_n = x_{k-1}x_{k-2}\ldots x_1x_0$. Važi da je $(x)_{10} = (x)_n$, odakle je

$$(x)_{10} = x_{k-1}n^{k-1} + x_{k-2}n^{k-2} + \cdots + x_1n^1 + x_0n^0.$$

Deljenjem obe strane sa n se dobija

$$\frac{(x)_{10}}{n} = x_{k-1}n^{k-2} + x_{k-2}n^{k-3} + \cdots + x_1n^0 + x_0n^{-1}.$$

Ako označimo $(x')_{10} = x_{k-1}n^{k-2} + x_{k-2}n^{k-3} + \cdots + x_1n^0$, dobija se

$$\frac{(x)_{10}}{n} = (x')_{10} + \frac{x_0}{n}.$$

Očigledno je da je $(x')_{10}$ ceo broj. Kako su sve cifre sistema manje od osnove sistema, važi da je $x_0 \leq n$, pa je vrednost $\frac{x_0}{n}$ razlomljeni broj.

Na osnovu prethodnog sledi da se deljenjem polaznog dekadnog broja $(x)_{10}$ osnovom n može dobiti cifra x_0 na najnižoj poziciji, jer ona predstavlja ostatak pri tom deljenju. Količnik $(x')_{10}$ predstavlja međurezultat, na koji se može ponoviti prethodni postupak (broj $(x')_{10}$ se sada posmatra kao početna vrednost $(x)_{10}$ koja se deli sa n u cilju dobijanja naredne cifre).

Dakle, algoritam za prevođenje celog dekadnog broja u osnovu n se sastoji od niza uzastopnih deljenja brojem n, pri čemu se sva deljenja vrše u dekadnoj osnovi. Ostaci koji se redom dobijaju pri tim deljenjima predstavljaju cifre rezultata u osnovi n, a količnici su međurezultati nad kojim se primenjuje uzastopno deljenje. Postupak se ponavlja sve dok se ne dostigne vrednost 0.

U nastavku su dati neki primeri prevođenja celih brojeva iz dekadne osnove u sistem sa osnovom n. Pritom se razmatraju samo celobrojne osnove takve da je $n \geq 2$.

- $(3129)_{10} = (300321)_4$:

3129	782	195	48	12	3
1	2	3	0	0	3

- $(3129)_{10} = (C39)_{16}$:

3129	195	12
9	3	C

- $(23)_{10} = (10111)_2$:

23	11	5	2	1
1	1	1	0	1

- $(76)_{10} = (2211)_3$:

76	25	8	2
1	1	2	2

- $(146222)_{10} = (23B2E)_{16}$:

146222	9138	571	35	2
E	2	B	3	2

Neka sada razlomljeni broj x treba prevesti iz osnove 10 u osnovu n. Neka je pritom zapis broja x u osnovi n dat sa $(x)_n = 0.x_{-1}x_{-2}\ldots x_{-l}$. Važi da je $(x)_{10} = (x)_n$, odakle je

$$(x)_{10} = x_{-1}n^{-1} + x_{-2}n^{-2} + \cdots + x_{-l}n^{-l}.$$

Množenjem obe strane sa n se dobija

$$n(x)_{10} = x_{-1}n^{0} + x_{-2}n^{-1} + \cdots + x_{-l}n^{-(l-1)}.$$

Ako označimo $(x')_{10} = x_{-2}n^{-1} + \cdots + x_{-l}n^{-(l-1)}$, dobija se

$$n(x)_{10} = x_{-1} + (x')_{10}.$$

Primetimo da je $(x')_{10}$ razlomljeni broj. Sledi da se množenjem polaznog dekadnog broja $(x)_{10}$ osnovom n može dobiti cifra x_{-1}, budući da ona predstavlja celobrojni deo rezultata. Razlomljeni deo $(x')_{10}$ predstavlja međurezultat, na koji se može ponoviti prethodni postupak (broj $(x')_{10}$ se sada posmatra kao početna vrednost $(x)_{10}$ koja se množi sa n u cilju dobijanja naredne cifre).

Dakle, algoritam za prevođenje razlomljenog dekadnog broja u osnovu n se sastoji od niza uzastopnih množenja brojem n, pri čemu se sva množenja vrše u dekadnoj osnovi. Celobrojni delovi koji se dobijaju pri množenju predstavljaju redom sleva nadesno cifre rezultata u osnovi n, a razlomljeni delovi su međurezultati nad kojim se primenjuje uzastopno množenje. Postupak se ponavlja sve dok se ne dostigne vrednost 0, s tim što se u nekim slučajevima, kada se rezultat ne može napisati konačnim brojem cifara, vrednost 0 ne dostiže. Tada se postupak može zaustaviti nakon određenog broja iteracija. Rezultujući zapis je u tom slučaju periodičan.

U nastavku su dati neki primeri prevođenja razlomljenih brojeva iz dekadne osnove u sistem sa osnovom n. Pritom se razmatraju samo celobrojne osnove takve da je $n \geq 2$.

- $(0.84375)_{10} = (0.11011)_2$:

0.84375	0.6875	0.375	0.75	0.5	0
0	1	1	0	1	1

- $(0.375)_{10} = (0.011)_2$:

0.375	0.75	0.5	0
0	0	1	1

- $(0.4)_{10} = (0.011001100...)_2 = (0.\overline{0110})_2$:

0.4	0.8	0.6	0.2	0.4	0.8	0.6	0.2	0.4	0.8
0	0	1	1	0	0	1	1	0	0

  Pri prevođenju dekadnog broja 0.4 u binarni sistem, zapis u binarnom sistemu je periodičan. Deo koji se ponavlja je nadvučen u rezultatu.

Kod prevođenja mešovitih brojeva iz dekadnog u sistem sa osnovom n, potrebno je odvojeno izvršiti prevođenje celobrojnog i razlomljenog dela. Na primer, pri prevođenju broja dekadnog broja 9.375 u binarni sistem, budući da je $(9)_{10} = (1001)_2$ i $(0.375)_{10} = (0.011)_2$, prevod je 1001.011.

1.6 Specijalni slučaj prevođenja

Nekad se jednostavno može izvršiti prevođenje iz sistema sa osnovom m u sistem sa osnovom n, bez međuprevođenja u dekadni sistem. U tom slučaju broj m mora biti stepen broja n ili broj n mora biti stepen broja m.

Ako bismo želeli da broj iz osnove n prevedemo u osnovu m, pri čemu važi $m = n^k$, potrebno je da, počevši od decimalne tačke i krećući se levo i desno, izdvajamo grupe od po k cifara. Ukoliko odgovarajuća poslednja grupa ima manje od k cifara, potrebno je da ih dopunimo nulama u istom smeru i zatim svaku grupu od po k cifara ponaosob pretvorimo u cifru u sistemu sa osnovom m. Na primer,

$$(101101.01)_2 = (10|1101.01)_2 = (0010|1101.0100)_2 = (2D.4)_{16}.$$

Ako bismo želeli da broj iz osnove m prevedemo u osnovu n, pri čemu važi $m = n^k$, potrebno je svaku cifru broja iz osnove m da pretvorimo u osnovu n i napišemo na k mesta (ukoliko je za zapis cifre u osnovi n dovoljno manje od k mesta, zapis treba dopuniti nulama), a zatim izbrisati eventualne nule na početku celog i kraju razlomljenog dela broja. Na primer,

$$(2D.4)_{16} = (0010|1101.0100)_2 = (101101.01)_2.$$

U narednim primerima je primenjen opisani specijalni slučaj prevođenja. U svim primerima važi da je jedna osnova stepen druge.

- $(10110001.0101101)_2 = (010|110|001.010|110|100)_2 = (261.264)_8$.
- $(C1.F1F9)_{16} = (30|01.33|01|33|21)_4 = (3001.33013321)_4$.
- $(D2.EA5)_{16} = (1101|0010.1110|1010|0101)_2 = (11010010.111010100101)_2$.

Primetimo da se ne može na ovaj način direktno prevoditi iz osnove 16 u osnovu 8 (ni obratno), budući da 16 nije stepen broja 8. Pritom je moguće izvršiti međuprevođenje u sistem sa osnovom 2.