25.10.2011. године

Диференцирање степеног реда

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ R - радијус конвергенције Теорема Адамар. $\frac{1}{R} = \overline{\lim}\sqrt[n]{a_n}$

формални извод $\sum_{1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$

$\sum_{0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$ R' $\frac{1}{R'} = \overline{\lim}\sqrt[n]{(n+1)|a_{n+1}|} =$

$= \overline{\lim} (n+1)^{1/n} (|a_{n+1}|^{\frac{1}{n+1}})^{\frac{n+1}{n}} =$

$= \frac{1}{R}$ одавде формално диференцирано ред односно $R' = R$

добијени ред има исти радијус конвергенције као и полазни

- изводни ред р-б. конвергира

- Степени ред се може диференцирати члан по члан произвољно много пута унутар интервала конвергенције

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ има радијус конвергенције R тј. конвергира на $(-R, R)$

Означимо са $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ суму тог реда. Функција $f \in C^{\infty}(-R, R)$

$f(0) = a_0$ $a_0 = \frac{f(0)}{0!}$

$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ $f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$

$f'(0) = 1 \cdot a_1$ $f''(0) = 2 \cdot 1 \cdot a_2$

$a_1 = \frac{f'(0)}{1!}$ $\Rightarrow a_2 = \frac{f''(0)}{2!}$

$$\boxed{a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}}$$ - општи члан реда

- коефицијенти развоја су једнозначно детерминисани

Тејлоров ред

$f \in C^\infty(x_0 - R, x_0 + R)$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$ - Тејлоров ред

Степени ред је Тејлоров ред свдих сумо

Пример (Треба дати одрезак)

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$ - бан нула ова ф-ја има све изводе у свој тачки

$f(0) = 0$

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x} =$$

$1/x = t$

$$= \lim_{t \to \infty} t e^{-t^2} = 0$$

Лопиталово $\lim_{t \to \infty} \frac{t}{e^{t^2}} \overset{\text{L}}{=} \lim_{t \to \infty} \frac{1}{2te^{t^2}} = 0$

$$f''(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{-1/x^2} \cdot 2}{x^3 \cdot x} = \lim_{x \to 0} \frac{2}{x^4} \cdot e^{-1/x^2}$$

$1/x^2 = u$

$$= \lim_{u \to +\infty} 2u^2/e^u = 0$$

По истом шеми добијамо 0 за изводе свих редова

$$f'''(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f''(x) - f''(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(\frac{2}{x^3} e^{-1/x^2}\right)'}{x}$$

↓ количник полинома и експоненцијале

$f^{(n)}(0) = 0 \quad \forall n = 0, 1, 2, \ldots$

$f \in C^\infty(\mathbb{R})$

$X=0$ $\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 0 \cdot x^n$ nije koresponden sa funkcijom

jer se ma koliko primerimo x a 0 dobijamo $f(x)>0$.

Teylorov red ne mora da bude saveden sa f-jom.

Kada su jednaki? (elementarne f-je mogu se zameniti Teylorovim redom)

T: Neka je $f \in C^{\infty}(-R,R)$ i neka $\exists M<\infty : |f^{(n)}(x)| \le M$, $\forall x \in (-R,R), \forall n=0,1,2,\dots$ Tada važi $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \quad \forall x \in (-R,R)$.

Dokaz: Koristimo se Teylorove teoreme

$\forall x_0 \in (-R,R) \quad f(x) = \sum_{k}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

$0<\theta<1$

ostatak u Lagranževom obliku

$\underline{x_0=0}$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}}_{R_n(x)}$$

ocena ostatka

$$|R_n(x)| \le \frac{M|x|^{n+1}}{(n+1)!} \le \frac{MR^{n+1}}{(n+1)!} \qquad \frac{MR^n}{n!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \to 0 \quad (n\to\infty)$$

■

Testiramo teoremu na primeru elementarnih f-ja:

Razvoji u Teylorov red elementarnih f-ja

1° $f(x) = e^x \qquad (-a,a)$

$$|f^{(n)}(x)| \le e^a \quad \forall x \in [-a,a]$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \Rightarrow e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad [-a,a]$$

$[-a,0]$ - произвољно $\Rightarrow \left\{ e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \forall x \in \mathbb{R} \right\}$

2° $f(x) = \sin x \ (\cos x)$

$M = 1$ - испуњен је услов

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sin x)^{(n)}(0)}{n!} x^n = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\cos x)^{(n)}(0)}{n!} x^n = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad x \in \mathbb{R}$$

3° $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad -1 < x < 1$ (за α било испуњен услов)

биномни развој $\quad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$

ако $\alpha \in \mathbb{N}$ добијамо биномну формулу

$$4^\circ \ \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad -1 < x \leq 1$$

↓ следи из теореме Абела

знамо $\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n \quad |x| < 1$

обични геометријски ред

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad -1 < x < 1$$

ако се унутар свог интервала конвергенције сме интегралити

члан по члан

$$\int_0^t \frac{dx}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^t x^n \, dx \qquad \Rightarrow \ln(1+t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{n+1}}{n+1}$$

$$\ln(1+x)\Big|_0^t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^t$$

Т (Абел) Нека степен ред $\sum a_n x^n$ има радијус конвергенције R и нека $\sum a_n R^n$ конвергира. Тада је $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ непрекидна ф-ја на $(-R, R]$.

Доказ: $0 \le x \le R$

$$\sum a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n$$

$\sum a_n R^n$ према Трећем својству конвергира

$\left(\frac{x}{R}\right)^n$ – монотон ограничен низ

$\Downarrow$

$\sum a_n x^n$ конвергира униформно на $[0, R]$ по Абеловом тесту

Сума је сума реда непрекидна ф-ја на $[0, R] \Rightarrow$

$$\lim_{x \to R-} \sum_{0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{0}^{\infty} a_n R^n. \quad \blacksquare$$

$$\lim_{t \to 1-} \ln(1+t) = 1 - 1/2 + 1/3 - \dots$$

$$\ln 2 = 1 - 1/2 + 1/3 - \dots$$ (користи смо добијену суму алтернативног реда)

– непосредна последица Абеловог става

обрнути ставови – Тауберови ставови

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad -1 < x < 1$$

$$S(x) = \sum_{0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

жеље да узмемо ред са апсолутним вредностима

$$\sum_{0}^{\infty} \underbrace{\left|\binom{\alpha}{n}\right| |x|^n}_{c_n} \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = x$$ (опет Даламберов критеријум)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\binom{\alpha}{n+1}\right| |x|^{n+1}}{\left|\binom{\alpha}{n}\right| |x|^{n}} = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n-1+1)}{(n+1)!}\right|}{\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}\right|} =$$

$$= |x| \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right| = |x|$$

за $|x|<1$ ред конвергира.

Показването до края

$(1+x)S' = \alpha S$ – то трябва

$$(1+x)S' = (1+x)\sum_{n=1}^{\infty} n\binom{\alpha}{n}x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n\binom{\alpha}{n}x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n\binom{\alpha}{n}x^{n} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\binom{\alpha}{k+1}x^{k} + \sum_{n=1}^{\infty} n\binom{\alpha}{n}x^{n} =$$

$$= \binom{\alpha}{1} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+1)\binom{\alpha}{n+1} + n\binom{\alpha}{n}\right]x^{n} =$$

$$= \alpha + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+1)\binom{\alpha}{n+1} + n\binom{\alpha}{n}\right]x^{n} =$$

$$= \alpha\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)\binom{\alpha}{n+1} + n\binom{\alpha}{n}}{\alpha} x^{n}\right] =$$

$$= \alpha\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^{n}\right) = \alpha\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^{n} = \alpha S(x)$$

* $\binom{\alpha}{n}$

* $\frac{(n+1)\,\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{(n+1)\,n!} + \frac{n\,\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} =$

$$= \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)\,[\alpha-n+n]}{n!} = \binom{\alpha}{n}\alpha \quad *$$

Добили смо $(1+x)S' = \alpha S$

Дефинишемо функцију $\varphi(x) = \frac{S(x)}{(1+x)^\alpha}$

$$\varphi'(x) = \frac{S'(x)(1+x)^\alpha - \alpha(1+x)^{\alpha-1} S(x)}{(1+x)^{2\alpha}} =$$

$$= S'(x)(1+x)^{-\alpha} - \alpha(1+x)^{-\alpha-1} S(x) =$$

$$= (1-x)^{-\alpha-1} \underbrace{\left((1+x)S' - \alpha S(x)\right)}_{\equiv 0 \text{ (што смо показали)}}$$

$\varphi' \equiv 0 \quad \forall a \in (-1,1)$

$\varphi = c$ (по основу теореме Лагранжа)

$$c = \frac{S(0)}{1} = S(0) = \underline{1} \qquad \boxed{\binom{\alpha}{0} = 1}$$

↓ деф.

Подесније је остатак написати у Коширевој форми

Пример:

1) $f(x) = \operatorname{arctg} x \qquad x_0 = 0$

Пример

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots \qquad |x|<1$$

разбој у геометријски ред

$$\int_0^t \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^t dx - \int_0^t x^2 dx + \int_0^t x^4 dx - \dots$$

$$\Rightarrow \operatorname{arctg} t = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \dots$$

2) $\arcsin x = f(x)$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2} = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-x^2)^n \quad |x|<1 \Big/ \int_0^t$$

код ког имамо интеграљење ф-ја

26.10.2011. Петак

Илустрације - примене степених редова

Пример 1)

$$\frac{1-x^2}{(x-2)^2(x+3)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad (=)$$

$x \to 0$

$$\frac{1-x^2}{(x-2)^2(x+3)} = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{(x-2)^2} + \frac{A_3}{x+3} \quad / (x-2)^2(x+3)$$

$$1-x^2 = A_1(x-2)(x+3) + A_2(x+3) + A_3(x-2)^2 \Rightarrow A_1, A_2, A_3$$

$$(=) -\frac{A_2}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}} + \frac{A_2}{4}\frac{1}{(1-\frac{x}{2})^2} + \frac{A_3}{3}\frac{1}{1+\frac{x}{3}} =$$

$$= -\frac{A_1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n} + \frac{A_2}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-2}{n}\left(-\frac{x}{2}\right)^n + \frac{A_3}{3}\sum_{0}^{\infty}\left(-\frac{x}{3}\right)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} x^n\left(-\frac{A_1}{2^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{2^n \cdot 4}\binom{-2}{n} + \frac{A_3}{3^{n+1}}(-1)^n\right)$$

Трик који се често користи

2) коришћење степених редова у решавању једног система једначина

$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ - Фибоначијев низ

$x_0 = 1$ - решавање рекурентних једначина

$x_1 = 1$ - диференцне једначине

$x_n = ?$

Правимо формални степени ред

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n t^n = f(t)$$

$t \to ?$

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \quad / \cdot t^n$$

$$t^n x_{n+2} = t^n x_{n+1} + t^n x_n \quad / \sum_0^\infty$$

$$\sum_0^\infty t^n x_{n+2} = \sum_0^\infty t^n x_{n+1} + \sum_0^\infty t^n x_n$$

$$\frac{1}{t^2} \sum_0^\infty x_{n+2} t^{n+2} = \frac{1}{t} \sum_0^\infty x_{n+1} t^{n+1} + \sum_0^\infty x_n t^n$$

$$\frac{1}{t^2}(f(t) - x_0 - x_1 t) = \frac{1}{t}(f(t) - x_0) + f(t)$$

$$\frac{1}{t^2}(f(t) - 1 - t) = \frac{1}{t}(f(t) - 1) + f(t)$$

$$\frac{f(t)}{t^2} - \frac{1}{t^2} \cancel{\frac{t}{t}} = \frac{f(t)}{t} \cancel{\frac{1}{t}} + f(t) \quad / \cdot t^2$$

$$f(t) - 1 = t f(t) + t^2 f(t)$$

$$\Leftrightarrow f(t)(1 - t - t^2) = 1 \quad \Leftrightarrow f(t) = \frac{1}{1 - t - t^2}$$

Ovdje je go cag f-ju razbijemo u red

$$t^2 + t - 1 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$t_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$t_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{A_1}{t - t_1} + \frac{A_2}{t - t_2} =$$

$$= -\frac{A_1}{t_1} \left(\frac{1}{1 - \frac{t}{t_1}} \right) - \frac{A_2}{t_2} \left(\frac{1}{1 - \frac{t}{t_2}} \right)$$

razbijemo u geometrijski red i gotovo!

Тригонометријски редови

$f(x) = \sum_{n}^{\infty} a_n x^n \quad (-R, R)$

*Полазни услов да би се нека функција развила у ред је бесконачна диференцијабилност

- није увек погодан начин за развој функције
- да ми има друга „сорта" реда а да добијемо „праву" функцију (јер ми нашу $f(x)$ коју је компликовано израчунавано развојем у ред)

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$ тригонометријски ред

a_n, b_n - коефицијенти

Битно питање: конвергенција и под којим околностима ми $f(x)$ можемо да развијемо у тригонометријски ред

$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$

- издваја се први члан - константа

Видећемо зашто користимо $\frac{a_0}{2} = const.$ (само зашто)

a_n и b_n су коефицијенти тригонометријског реда

$\{1, \cos x, \cos 2x, \ldots, \sin x, \sin 2x, \sin 3x, \ldots\} = \mathcal{F}$

Деф. Нека је дат неки низ функција $f_n \in C[a,b]$. Кажемо да је систем $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ ортогоналан на $[a,b]$ ако је

$\int_a^b f_n(x) \overline{f_m(x)}\, dx = 0 \quad \forall m \neq n.$

↓ конјуговано

Circle Сигнал y је ортогонални на интервалу $[-\pi, \pi]$.

- следи из одређених формула и Бушт - Бубнић-ове формуле

*Увод

Ако имамо функцију која је довољно да буде интегрална:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$ и чији овај ред

равномерно конвергира на $[-\pi, \pi]$ а исто је $f(x)$ периодична са периодом 2π. Питање је како се формирају коефицијенти

$$f(x)\cos kx = \frac{a_0}{2}\cos kx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos nx \cos kx + b_n \sin nx \cos kx) \Big/ \int$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx\,dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos kx\right)$$ ⇐ смењо да интегрујемо члан по члан због рав. конвергенције

Због ортогоналности

$$\Leftarrow a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx\,dx = a_k \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos 2kx}{2}\,dx = \frac{a_k}{2}\left(2\pi + \frac{\sin 2kx}{2k}\Big|_{-\pi}^{\pi}\right) =$$

$$= \frac{a_k}{2} \cdot 2\pi = a_k \pi \Rightarrow \boxed{a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx} \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\frac{a_0}{2} 2\pi = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

аналогно

$$\boxed{b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx} \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

a_k и b_k за неку функцију се називају Фуријеови коефицијенти - детаљније и за интеграбилну ф-ју! 15

Ако је f интегробилна функција на $[-\pi, \pi]$ тад можемо израчунати коефицијенте

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx \quad k=0,1,2,\ldots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx \quad k=1,2,3,\ldots$$

и ред $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos kx + b_k\sin kx$ тада се назива

Фуријеов ред

$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos kx + b_k\sin kx$

Питање: да ли је сваки тригонометријски ред Фуријеов?
Одговор је не. Свако Фуријеов ред јесте тригонометријски

Кад ред конвергира и да ли је сума реда повезана са функцијом од које је настала?

** → од фундаменталног значаја

$f(x) = u(x) + iv(x)$

Лема (Риман): Ако је f Риман интегробилна функција на интервалу $[a,b]$ тада важи $\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,dx \to 0$, $\lambda \to \pm\infty$

и $\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,dx \to 0$, $\lambda \to \pm\infty$ - довољно доказати за f-реалну функцију

Доказ: (из овога следи да Фуријеови коефицијенти обавезно теже ка нули)

f је Риман интегробилна $\Rightarrow$ за дато ε постоји подела P интервала $[a,b]$

$P: a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$

таква да је $\underbrace{S(f,P)}_{\text{горња}} - \underbrace{s(f,P)}_{\text{доња}} < \varepsilon/2$ ($\Longleftrightarrow$) дарбуова сума

$m_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f$ $\quad M_i = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f$ (тешко је Риман. интеграбилна она ф-ја обавезно ограничена)

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

$$s(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \Delta x_i < \varepsilon/2$$

Дефинишемо функцију $\underline{f}_P = \begin{cases} m_i, & x \in (x_{i-1}, x_i) \quad i = 1, 2, \ldots, n \\ \text{у тачкама } x_i \ (1 \le i \le n) & \text{произвољне вредности} \end{cases}$

$\overline{\varphi}_{f_P}$ $\begin{cases} M_i, & x \in (x_{i-1}, x_i) \ i = 1, 2, \ldots \\ \text{у тачкама } x_i \text{ произвољно} & \end{cases}$ — коначно много тачака

$$\int_a^b f(x) \cos \lambda x \, dx = \int_a^b (f(x) - \underline{f}_P(x)) \cos \lambda x \, dx + \int_a^b \underline{f}_P(x) \cos \lambda x \, dx$$

$m_i \le f(x) \le M_i$ за $x \in (x_{i-1}, x_i)$

$$\left| \int_a^b f(x) \cos \lambda x \, dx \right| \le \left| \int_a^b (f(x) - \underline{f}_P(x)) \cos \lambda x \, dx \right| + \left| \int_a^b \underline{f}_P(x) \cos \lambda x \, dx \right|$$

$$\le \int_a^b |(f(x) - \underline{f}_P(x))| |\cos \lambda x| \, dx + \left| \int_a^b \underline{f}_P(x) \cos \lambda x \, dx \right| \le$$

$$\le \int_a^b |f(x) - \underline{f}_P(x)| \, dx + \left| \int_a^b \underline{f}_P(x) \cos \lambda x \, dx \right| \le$$

$$\le \int_a^b (f(x) - \underline{f}_P(x)) \, dx + \left| \int_a^b \underline{f}_P(x) \cos \lambda x \, dx \right| =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x) - \underline{f}_P(x)) \, dx + \left| \int_a^b \underline{f}_P(x) \cos \lambda x \, dx \right| \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (M_i - m_i) \, dx + \left| \int_a^b \underline{f}_P(x) \cos \lambda x \, dx \right|$$

Докажимо $\left| \int_a^b f(x)\cos\lambda x\,dx \right| < \varepsilon/2 + \left| \int_a^b \underline{f}_p \cos\lambda x\,dx \right| =$

$= \frac{\varepsilon}{2} + \left| \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \underline{f}_p(x)\cos\lambda x\,dx \right| = \varepsilon/2 + \left| \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \underline{f}_p(x)\cos\lambda x\,dx \right| =$

$= \varepsilon/2 + \left| \sum_{i=1}^{n} m_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \cos\lambda x\,dx \right| = \frac{\varepsilon}{2} + \left| \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\sin\lambda x_i - \sin\lambda x_{i-1}}{\lambda} \right| <$

$< \varepsilon/2 + \frac{\sum_{i=1}^{n} 2|m_i|}{\lambda} < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \quad$ за $\lambda \geq \lambda_0$

$\Rightarrow \lim_{\lambda \to \pm\infty} \int_a^b f(x)\cos\lambda x\,dx = 0$

Аналогно поступамо за синус. ∎

Имајући у виду Ојлерову формулу:

$$\int_a^b f(x)\, e^{i\lambda x}\,dx \to 0 \qquad e^{i\lambda x} = \cos\lambda x + i\sin\lambda x$$

$$\lambda \to \pm\infty$$

-ни сваку функцију довољно периодично да продужимо

Нека је f периодична на $\mathbb{R}$ са периодом 2π и интеграбилна на $[-\pi,\pi]$ и придружимо јој њен Фуријев ред са коефицијентима

$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$, $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$

$$\int \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx + b_n\sin nx$$

Хајде да посматрамо n-ту парцијалну суму у некој тачки x_0

$$S_n(x_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx_0 + b_k \sin kx_0 =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx + \sum_{k=1}^{n} \cos kx_0 \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx + \sin kx_0 \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left(\sum_{k=1}^{n} \cos kx_0 \cos kx + \sin kx_0 \sin kx\right)dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(x-x_0)\right]dx \quad (=)$$

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k\theta = \frac{\sin (2n+1)\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}}$$ (радили прошле недеље)

лакше је израчунати ову целину

$$(=)\ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\frac{\sin(2n+1)\frac{x-x_0}{2}}{2\sin\frac{x-x_0}{2}}\,dx$$

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\frac{\sin\frac{(2n+1)(x-x_0)}{2}}{2\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}\,dx$$

пошто подинтегрални израз је периодичан са периодом 2π

$$\frac{1}{\pi}\int_{x_0-\pi}^{x_0+\pi} f(x)\,\frac{\sin\frac{(2n+1)(x-x_0)}{2}}{2\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}\,dx \qquad x - x_0 = t$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x_0+t)\,\frac{\sin\frac{(2n+1)t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x_0+t)\,\frac{\sin\frac{(2n+1)t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x_0+t)\,\frac{\sin(2n+1)t/2}{2\sin t/2}\,dt$$

у другој смени $t = -\tau$, $\tau \in (\pi, 0)$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x_0+t)\,\frac{\sin(2n+1)\,t/2}{2\sin t/2}\,dt + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x_0-s)\,\frac{\sin(2n+1)\,s/2}{2\sin s/2}\,ds =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left[f(x_0+t)+f(x_0-t)\right]\,\frac{\sin\frac{(2n+1)\,t}{2}}{2\sin t/2}\,dt = S_n(x_0)$$

бишће формула ће бидуће разматрана

ако изаберемо $\delta > 0$ (мало)

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta} \left(f(x_0+t)+f(x_0-t)\right)\,\frac{\sin(2n+1)\,t/2}{2\sin t/2} + \frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi} \frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2\sin t/2}\sin\left[\frac{(2n+1)}{2}t\right]dt$$

суштински чему тежи

$t \in (0, \delta)$ сума

непосредна околина тачке x_0 поклапање -кв и ДВ -принцип локализације

интегрално

0 кад $n \to \infty$

по Римановој леми

$$s_n(x_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx_0 + b_k \sin kx_0 \qquad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx$$

$$s_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (f(x_0+t)+f(x_0-t))\,\frac{\sin\frac{(2n+1)}{2}t}{2\sin t/2}\,dt \quad (=)$$

изаберемо $0<\delta<\pi$

$$(=)\ \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta} (f(x_0+t)+f(x_0-t))\,\frac{\sin\frac{(2n+1)}{2}t}{2\sin t/2} + \frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi} \frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2\sin t/2}\sin(n+\tfrac{1}{2})t\,dt$$

конвергенција зависи само од непосредне околине (x_0)

интегрибилне функције

$n\to\infty \to 0$ по Римановој лемми

У формирању коефицијената - цео интервал

-хармонијска анализа - принцип локализације (утиче само околина дате тачке)

Функције ограничене варијације

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ (R може да се разбије на две)

$P:\ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$

$\sup_P \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| = V(f,[a,b]) < +\infty$ онда и само онда када је

f ограничене варијације на $[a,b]$ а $V(f,[a,b])$ и у том случају назива потпуна варијација.

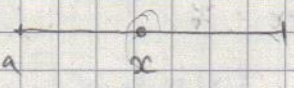
Пример: Свака монотоно функција на $[a,b]$ је ограничене варијације

особине

$$\uparrow f \uparrow \quad \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \sum_{1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) = f(b) - f(a)$$

2. Свака функција ограниченог варијације је ограничена.

$$|f(x)| - |f(a)| + |f(x)| - |f(b)|$$



$|f(x)-f(a)| \le |f(x)-f(a)| + |f(b)-f(x)| \le V(f,[a,b])$

$+ |f(x)| - f(b)$ $\quad |a|-|b| \le |a-b|$

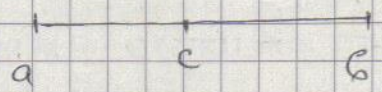
користимо $|a|-|b| \le |a-b|$

$$\Rightarrow \quad 2|f(x)| \le V(f,[a,b]) + |f(a)| + |f(b)|$$

3. f и g фје ограничене варијације тада су $f+g$, $f \cdot g$ ограничене варијације (и дефинишу!)

4. ⊙! Свака реална функција ограничене варијације може да се прикаже као разлика две неопадајуће ограничене функције.

Доказ:



$$V(f,[a,c]) + V(f,[c,b]) = V(f,[a,b])$$

$a<x<b \qquad V(f,[a,x]) = \varphi(x)$

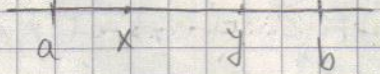
$\varphi(x)$ је растућа функција и ограничена на $[a,b]$

$$f = \underbrace{\frac{f+\varphi}{2}}_{f_1(x)} - \underbrace{\frac{\varphi-f}{2}}_{f_2(x)}$$

f_1 и f_2 су ограничене функције

Треба да покажемо да су f_1 и f_2 неопадајуће

f_1 не опада



$x<y$ Треба доказати

$f_1(x) \le f_1(y)$

$f(x_1) + \varphi(x) \le f(y_1) + \varphi(y)$

$f(x) - f(y) \le \varphi(y) - \varphi(x) = V(f, [a,x]) - V(f, [a,y]) =$

$= V(f, [x,y])$

$f(x) - f(y) \le V(f, [x,y])$

ово је тачно јер важи → ово је супремум по свим поделама

$|f(x) - f(y)| \le V(f, [x,y])$

↑ ово је тачно

сума која одговара само крајњим тачкама

аналогно се показује за f_2.

* f: $|f(x) - f(y)| \le L|x-y| \quad \forall x, y \in [a,b]$ Липшицова функција

P: $\sum_1^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \le L \sum_1^n |x_i - x_{i-1}| = L(b-a)$

Ако $f \in C^1[a,b]$ $\quad |f'(x)| \le C_0 < \infty \quad \forall x \in [a,b]$

$\Downarrow$

f је ограничене варијације

$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)||x-y| \le C_0|x-y|$

* непрекидне ф-је не морају бити ограничене варијације

Пример:

$$f(x) = \begin{cases} x \cos \frac{\pi}{2x} & 0 < x \le 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$f \in C[0,1]$ а није ограничене варијације

P: $0 < \frac{1}{2n} < \frac{1}{2n-1} < \dots < \frac{1}{2} < 1$

* Може да се покаже $\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt = \pi/2$ $\Rightarrow \left|\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt\right| \le D < \infty \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (*)

Дирихлеов интеграл

Лема: Нека је g непрекидно отворена ф-ја на $[0,h]$.

Тада је $\lim_{p\to+\infty} \int_0^h g(t)\frac{\sin pt}{t}\,dt = g(0+)\,\pi/2$.

(кључна лема за Фуријеов ред)

Доказ: Свака монотона функција у свакој тачки има граничну вредност са обе стране (у свакој тачки)

(Монотоно функција може имати само прекиде прве врсте)

$$\int_0^h g(t)\frac{\sin pt}{t}\,dt = \int_0^h (g(t)-g(0+))\frac{\sin pt}{t}\,dt + g(0+)\int_0^h \frac{\sin pt}{t}\,dt$$

смена $pt=y$

$$= \int_0^h (g(t)-g(0+))\frac{\sin pt}{t}\,dt + g(0+)\int_0^{ph} \frac{\sin y}{y}\,dy$$

Дирихлеов интеграл

треба израчунати да ово тежи 0 кад $p\to+\infty$

$p\to+\infty$ $\Rightarrow$ $g(0+)\,\pi/2$

$pt=y$, $dt=\frac{dy}{p}$

$t=y/p$, $ph\to\infty$, $\int_0^{ph}\frac{\sin y}{y}\,dy = \frac{\pi}{2}$

Зашто је то тако

$$\int_0^h (g(t)-g(0+))\frac{\sin pt}{t}\,dt \longrightarrow 0 \quad (p\to\infty)$$

$\varepsilon>0$ Због $\lim_{t\to0^+} g(t) = g(0+)$ постоји околина $\delta>0$:

$$g(t)-g(0+)<\varepsilon \quad \text{за } t\in(0,\delta]$$

из дефиниције граничне вредности.

$\delta < h$

$$I = \underbrace{\int_0^\delta (g(t)-g(0+)) \frac{\sin pt}{t}\,dt}_{I_1} + \underbrace{\int_\delta^h \frac{g(t)-g(0+)}{t} \sin pt\,dt}_{I_2}$$

$g(t_1) - g(0+) \neq 0$ otuda

$g(t) - g(0+) > 0$

po Rimanovoj lemi

$p \to \infty$ 0

$$\int_a^b \varphi\psi\,dx = \varphi(\delta) \int_\xi^\delta \psi\,dx \quad \xi \in (a,b)$$

a $\varphi \uparrow$, $\varphi \geq 0$

Druga ?

Teorema o srednjoj vrednosti I

$$I_1 = (g(\delta) - g(0+)) \int_\xi^\delta \frac{\sin pt}{t}\,dt$$ – na osnovu teoreme o srednjoj vrednosti

$\xi \in [0, \delta]$

$$(g(\delta) - g(0+)) \int_{p\xi}^{p\delta} \frac{\sin y}{y}\,dy \leq 2D\varepsilon$$

$p\xi \leq y \leq p\delta$

iz (*) $\Rightarrow$ $\left| \int_{p\xi}^{p\delta} \frac{\sin t}{t}\,dt \right| = \left| \int_0^{p\delta} \frac{\sin t}{t}\,dt - \int_0^{p\xi} \frac{\sin t}{t}\,dt \right| \leq$

$$\leq \left| \int_0^{p\delta} \frac{\sin t}{t}\,dt \right| + \left| \int_0^{p\delta} \frac{\sin t}{t}\,dt \right| \leq 2D$$

kako I_1 i I_2 možemo učiniti proizvoljno malim

$\Rightarrow I \to 0$ kada $p \to \infty$

odnosno $\lim_{p\to\infty} \int_0^\delta g(t) \frac{\sin pt}{t}\,dt = g(0+)\,\pi/2$ ∎

Став (Дирихле - Жордан)

Нека је f периодична Риман - интегрибилна функција са периодом 2π и $x_0 \in \mathbb{R}$. Ако је f ограничена варијација у некој околини $(x_0 - h, x_0 + h)$ тачке x_0, где је

$$s_n(x_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}.$$

Доказ: на основу принципа локализације

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{(f(x_0+t) + f(x_0-t))\sin(n+1/2)t}{2\sin t/2}\,dt =$$

$$= \left\{\frac{1}{\pi}\int_0^{h} \left(\left(f(x_0+t) + f(x_0-t)\right)\frac{t/2}{\sin t/2}\right)\frac{\sin(n+1/2)t}{t}\,dt\right\} +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_h^{\pi} \frac{f(x_0+t) + f(x_0-t)}{2\sin t/2}\sin\left(n+1/2\right)t\,dt$$

A

- $\left(\left(f(x_0+t) + f(x_0-t)\right)\frac{t/2}{\sin t/2}\right)$: функција ограничене варијације
- $\frac{\sin(n+1/2)t}{t}$: g
- $\frac{f(x_0+t) + f(x_0-t)}{2\sin t/2}$: интегрибилна ф-ја
- $\sin\left(n+1/2\right)t$: $\to 0$ када $n\to\infty$ по Римановој лемми

$g = g_1 - g_2$ $\quad g_1, g_2$ ограничене неопадајуће

$$A = \frac{1}{\pi}\int_0^{h} g_1(t)\frac{\sin\frac{(n+1)}{2}t}{t}\,dt - \frac{1}{\pi}\int_0^{h} g_2(t)\frac{\sin\frac{(n+1)}{2}t}{t}\,dt$$

на основу леме

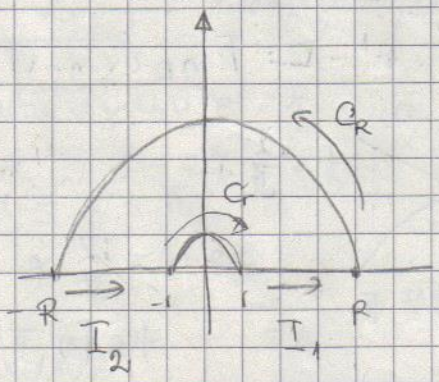
$$\frac{1}{\pi}g_1(0^+)\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\pi}g_2(0^+)\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}\left(g_1(0^+) - g_2(0^+)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}g(0^+) = \frac{1}{2}\left(f(x_0^+) + f(x_0^-)\right) \blacksquare$$

Дирихлеов интеграл

$$u(x,y) = \frac{e^{-y}}{x^2+y^2}(x\cos x + y\sin x)$$

$$v(x,y) = \frac{e^{-y}}{x^2+y^2}(x\sin x - y\cos x)$$



$$\int_{\partial\Omega} v\,dx + u\,dy$$

$$\int_{\partial\Omega} v\,dx + u\,dy = \iint_{\Omega} \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)}_{\parallel\ 0} dx\,dy$$

на основу Гринове формуле

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\int_{\partial\Omega} v\,dx + u\,dy = 0 \qquad \text{- разбили на 4 интеграла}$$

$$\int_r^R v(x,0)\,dx + \int_{C_R} v\,dx + u\,dy + \int_{-R}^{-r} v(x,0)\,dx + \int_{C_r} v\,dx + u\,dy =$$

$$= \int_r^R \frac{\sin x}{x}\,dx + \underbrace{\int_{C_R} v\,dx + u\,dy}_{\parallel\ B_R} + \int_{-R}^{-r} \frac{\sin x}{x}\,dx + \underbrace{\int_{C_r} v\,dx + u\,dy}_{\parallel\ D_r} = 0$$

$$2\int_r^R \frac{\sin x}{x}\,dx + B_R + D_r = 0$$

полярне координате

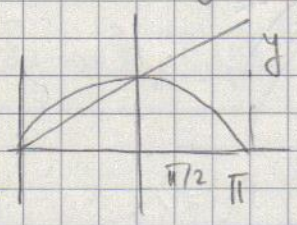
$$B_R = \int_{C_R} v\,dx + u\,dy \quad \Rightarrow \quad x = R\cos\varphi \quad y = R\sin\varphi \quad 0 \le \varphi \le \pi$$

$$= \int_0^{\pi} \left[\frac{e^{-R\sin\varphi}}{R^2}\cdot(R\cos\varphi\sin(R\cos\varphi) - R\sin\varphi\cos(R\cos\varphi))(-R\sin\varphi) + \right.$$

$$+\frac{e^{-R\sin\varphi}}{R^2}\left(R\cos\varphi\cos(R\cos\varphi)+R\sin\varphi\sin(R\cos\varphi)\right)(R\cos\varphi)\Big]d\varphi$$

$$|B_R| \le \int_0^{\pi} \frac{e^{-R\sin\varphi}}{R^2}\left[2R^2+2R^2\right]d\varphi = 4\int_0^{\pi} e^{-R\sin\varphi}d\varphi = 4\cdot 2\int_0^{\pi/2} e^{-R\sin\varphi}d\varphi$$

$$\le 8\int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2R}{\pi}\varphi}d\varphi$$



$\sin\varphi \ge \frac{2}{\pi}\varphi$ in $[0,\pi/2]$

$$= \frac{8}{-\frac{2R}{\pi}}\left(-1+e^{-R}\right) =$$

$$= \frac{4\pi}{R}\left(1-e^{-R}\right) \le \frac{4\pi}{R}$$

$$B_R \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$$

$$D_r = \int_{C_r} v\,dx + u\,dy = \int_{\pi}^{0}\Big[\frac{e^{-r\sin\varphi}}{r^2}\left(r\cos\varphi\sin(r\cos\varphi) - r\sin\varphi\cos(r\cos\varphi)\right)$$

$$(-r\sin\varphi) + \frac{e^{-r\sin\varphi}}{r^2}\left(r\cos\varphi\cos(r\cos\varphi) + r\sin\varphi\sin(r\cos\varphi)\right)r\cos\varphi\Big]d\varphi =$$

$$= \int_{\pi}^{0} e^{-r\sin\varphi}\Big[\left(\cos\varphi\cdot\sin(r\cos\varphi) - \sin\varphi(r\cos\varphi)\right)(-\sin\varphi)$$

$$+\left(\cos\varphi\cos(r\cos\varphi) + \sin\varphi\sin(r\cos\varphi)\right)\cos\varphi\Big]d\varphi$$

$$\longrightarrow \int_{\pi}^{0}\Big(-\sin\varphi(-\sin\varphi) + \cos\varphi\cdot\cos\varphi\Big]d\varphi =$$

$$= \int_{\pi}^{0} d\varphi = -\pi \qquad D_r \xrightarrow{r\to 0} -\pi$$

$$2\int_r^R \frac{\sin x}{x}dx + B_R + D_r = 0$$

$R \to +\infty$

$r \to 0^+$

$$2\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx + 0 + (-\pi) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}} \quad \blacksquare$$

Једне је врло лако израчунати

- Најзанимљивији пример комплексне интеграције.

Пример $a \in \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \cos ax \quad -\pi \le x \le \pi$



$b_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos ax\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos ax\,dx = \frac{2}{\pi}\,\frac{\sin ax}{a}\Big|_0^\pi =$$

$$= \frac{2}{\pi}\,\frac{\sin a\pi}{a} \qquad \frac{a_0}{2} = \frac{\sin a\pi}{a\pi}$$

$n \ge 1$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos ax\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2\cos nx \cdot \cos ax\,dx = \text{Трансформација производа у збир}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+a)x\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-a)x\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} \cos(n+a)x\,dx + \int_0^{\pi} \cos(n-a)x\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(n+a)x}{n+a}\Big|_0^\pi + \frac{\sin(n-a)x}{n-a}\Big|_0^\pi\right] = \frac{\sin(\pi n+\pi a)}{\pi(n+a)} + \frac{\sin(\pi n-\pi a)}{\pi(n-a)} =$$

$$= \frac{(-1)^n \sin \pi a}{\pi(n+a)} - \frac{(-1)^n \sin \pi a}{\pi(n-a)} = \frac{(-1)^n}{\pi}\sin \pi a\left(\frac{1}{n+a} - \frac{1}{n-a}\right) =$$

$$= \frac{(-1)^n (-2a)}{n^2 - a^2} \cdot \frac{\sin \pi a}{\pi}$$

$$\boxed{a_n = \frac{(-1)^n}{a^2 - n^2} \cdot \frac{2a \sin \pi a}{\pi}}$$

Применимо теорему Дирихле – Жордана (проверимо ф-ју)

$$\cos ax = \frac{\sin a\pi}{a\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^2 - n^2} \frac{2a \sin a\pi}{\pi} \cos nx$$

$-\pi \le x \le \pi$

$x = 0$

$$1 = \frac{\sin a\pi}{a\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2a}{a^2 - n^2} \frac{\sin a\pi}{\pi} \quad / : \sin a\pi$$

$$\frac{1}{\sin a\pi} = \frac{1}{a\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a}{\pi} \frac{(-1)^n}{a^2 - n^2} \qquad a\pi = z$$

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{z}{\pi} \frac{(-1)^n}{\frac{z^2}{\pi^2} - n^2} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2z}{z^2 - (n\pi)^2}$$

* Мероморфне функције

$\Rightarrow$ интеграцијом

- исказују се као факторисане

$$\sin z = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2 \pi^2}\right)$$

Пример: $\frac{1}{2\sin\frac{h}{2}} \sum_{k=0}^{n-1} \sin(k+\frac{1}{2})h = \frac{\sin^2 \frac{nh}{2}}{2\sin^2\frac{h}{2}}$

$= \frac{1}{4\sin^2\frac{h}{2}} \sum_{k=0}^{n-1} 2\sin(k+\frac{1}{2})h \sin\frac{h}{2} = \frac{1}{4\sin^2\frac{h}{2}} \sum_{k=0}^{n-1} (\cos(kh) - \cos(k+1)h) =$

$= \frac{1}{4\sin^2 h/2} (1-\cos nh) = \frac{1}{4\sin^2\frac{h}{2}} \cdot 2\sin^2\frac{nh}{2}$ ▽.

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \frac{\sin(u-x)(n+1/2)}{2\sin\frac{u-x}{2}} du$$

$$\frac{S_0 + S_1 + \ldots + S_{n-1}}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \frac{\sin(u-x)(k+1/2)}{2\sin\frac{u-x}{2}} du =$$

$$= \frac{1}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin(k+1/2)(u-x)}{2\sin\frac{u-x}{2}} du = \frac{1}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \frac{\sin^2\frac{n(u-x)}{2}}{2\sin^2\frac{u-x}{2}} du$$

Ако је $f = 1$ добија се

$$1 = \frac{1}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2\left(\frac{n(u-x)}{2}\right)}{2\sin^2\frac{u-x}{2}} du \Rightarrow \boxed{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2\left(\frac{n(u-x)}{2}\right) du}{2\sin^2\frac{u-x}{2}} = \pi n}$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\sin^2\left(\frac{n(u-x)}{2}\right)}{2\sin^2\frac{u-x}{2}} du$$

$$\boxed{\frac{S_0(x) + \ldots + S_{n-1}(x)}{n} - f(x) = \frac{1}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} (f(u) - f(x)) \frac{\sin^2\left(\frac{n(u-x)}{2}\right)}{2\sin^2\left(\frac{u-x}{2}\right)}}$$

Теорема (Фејер)

Ако је f непрекидна 2π периодична функција на $\mathbb{R}$ тада $\frac{S_0(x) + \ldots + S_{n-1}(x)}{n}$ $(n \to \infty)$ конвергира равномерно ка $f(x) \in \mathbb{R}$.

Доказ: $\frac{S_0(x) + \ldots + S_{n-1}(x)}{n} - f(x) = \frac{1}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} (f(u) - f(x)) \frac{\sin^2\left(\frac{n(u-x)}{2}\right)}{2\sin^2\frac{u-x}{2}} du =$

$$= \frac{1}{\pi n} \int_{x-\pi}^{x+\pi} (f(u)-f(x)) \frac{\sin^2\left(\frac{n(u-x)}{2}\right)}{2\sin^2\left(\frac{u-x}{2}\right)} du = \text{смена } \{u-x=t\}$$

$$= \frac{1}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x+t)-f(x)) \frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{2\sin^2 t/2} dt$$

Како је f равномерно непрекидна: за дато $\varepsilon>0$, постоји $\delta>0$ такво да чим је $|x+t-x|<\delta \Rightarrow |f(x+t)-f(x)|<\varepsilon/2$

$$|t|<\delta \Rightarrow |f(x+t)-f(x)|<\varepsilon/2$$

$$\left| \frac{\delta_0(x)+\ldots+\delta_{n-1}(x)}{n} - f(x) \right| \le \frac{1}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t)-f(x)| \frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{2\sin^2 t/2} dt =$$

$$= \frac{1}{\pi n} \int_{-\delta}^{\delta} |f(x+t)-f(x)| \frac{\sin^2 nt/2}{2\sin^2 t/2} dt + \frac{1}{\pi n} \int_{|\pi|\ge|t|\ge|\delta|} |f(x+t)-f(x)| \frac{\sin^2 nt/2}{2\sin^2 t/2} dt <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{\pi n} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{2\sin^2 t/2} + \frac{1}{\pi n} \int_{\delta\le|t|\le\pi} 2M \frac{\sin^2 nt/2}{2\sin^2 t/2} dt <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} \underbrace{\frac{1}{\pi n} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{2\sin^2 t/2} dt}_{\le \pi} + \frac{2M}{\pi n} \int_{\delta\le|t|\le\pi} \frac{\sin^2\frac{tn}{2}}{2\sin^2 t/2} dt \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{n\pi} \int_{\delta\le|t|\le\pi} \frac{\sin^2\left(\frac{nt}{2}\right)}{2\sin^2 t/2} dt$$

1 из примера!!!

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\pi n} \int_{\delta\le|t|\le\pi} \frac{1\,dt}{2\sin^2 t/2} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\pi n} - \frac{2(\pi)(-\delta)}{2\sin^2 \delta/2} < \varepsilon \text{ за } n \ge n_0$$

Дефиниција

Сваки израз облика $\sum_{k=0}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$ се назива тригонометријски полином где је n степен полинома.

Из теореме Фејера следи да ако је f непрекидна 2π периодична функција тада за $\forall \varepsilon>0$ постоји тригонометријски полином $T(x)$ такав да је $\forall x \in \mathbb{R}: |f(x)-T(x)|<\varepsilon$.

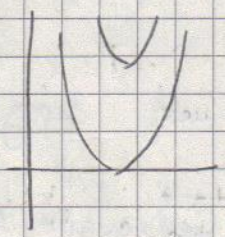
f и g интеграбилне функције

Неједнакост Минковског $\left(\int_{-\pi}^{\pi} |f+g|^2 dx \right)^{1/2} \le \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 dx \right)^{1/2} + \left(\int_{-\pi}^{\pi} |g|^2 dx \right)^{1/2}$

$f, g \geq 0 \quad t \in \mathbb{R}$

$$0 \leq \int_{-\pi}^{\pi} (tf+g)^2 dx = t^2 \int_{-\pi}^{\pi} f^2 dx + 2t \int_{-\pi}^{\pi} fg\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} g^2 dx$$

дискриминанта $D \leq 0$



$$2\int_{-\pi}^{\pi} fg\,dx - 4\int_{-\pi}^{\pi} f^2 dx \int_{-\pi}^{\pi} g^2 dx$$

кошиева неравенство:

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} fg\,dx\right)^2 \leq \int_{-\pi}^{\pi} f^2 dx \int_{-\pi}^{\pi} g^2 dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f+g|^2 dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} (|f|+|g|)^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 dx + 2\int_{-\pi}^{\pi} |f||g|\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} |g|^2 dx$$

$$\leq \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 dx + 2\left(\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |g|^2 dx\right)^{1/2} + \int_{-\pi}^{\pi} |g|^2 dx =$$

$$= \left(\left(\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 dx\right)^{1/2} + \left(\int_{-\pi}^{\pi} |g|^2 dx\right)^{1/2}\right)^2$$

Лема: Ако f интегрибилна функција на $[-\pi, \pi]$ тогаш $\forall \varepsilon$ постои тригонометриски полином T таков да $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - T(x)|^2 dx < \varepsilon$.

Доказ:

Од интегрибилност $\Rightarrow$ ограниченост

$|f| \leq M$

$\varepsilon > 0 \quad P: -\pi = x_0 < x_1 < \dots < x_n = \pi$

$m_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f \qquad M_i = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f$

$S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon \qquad \gamma_P(x) = \begin{cases} m_i, & x \in (x_{i-1}, x_i) \\ \text{било што ако } x = x_i \end{cases}$

$\varphi_p(x) \le f(x) \quad m_i \le f(x) \le M_i$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_p(x) - \tilde{\varphi}_p(x)|^2 dx < \varepsilon^2$$

$\tilde{\varphi}_p(x)$ је продужење $\varphi_p(x)$ до непрекидне

$\tilde{\varphi}_p(x)$ се може продужити до непрекидне 2π периодичне функције на $\mathbb{R}$ јер је $\tilde{\varphi}_p(-\pi) = \tilde{\varphi}_p(\pi)$.

По теореми Фејера постоји тригонометријски полином T:

$$|\tilde{\varphi}_p(x) - T(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [-\pi, \pi]$$

$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{\varphi}_p(x) - T(x)|^2 dx \le 2\pi\varepsilon^2$$

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} |f - T|^2 dx\right)^{1/2} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f - \varphi_p + \varphi_p - \tilde{\varphi}_p + \tilde{\varphi}_p - T|^2 dx\right)^{1/2} \le$$

$$\le \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f - \varphi_p|^2 dx\right)^{1/2} + \left(\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_p - \tilde{\varphi}_p + \tilde{\varphi}_p - T|^2 dx\right)^{1/2} \le$$

$$\le \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f - \varphi_p|^2 dx\right)^{1/2} + \left(\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_p - \tilde{\varphi}_p|^2 dx\right)^{1/2} + \left(\int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{\varphi}_p - T|^2 dx\right)^{1/2} \le$$

$$\le \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f - \varphi_p|^2 dx\right)^{1/2} + \varepsilon + |2\pi\varepsilon^2|^{1/2} \quad (<)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f - s_p|^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} |f - s_p||f - s_p| dx \le 2M \int_{-\pi}^{\pi} |f - s_p| dx =$$

$$= 2M \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f - s_p| dx = 2M \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f - s_p) dx = 2M \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f - m_i) dx$$

$$\le 2M \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (M_i - m_i) dx = 2M \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \Delta x_i = 2M \left(S(f, P) - s(f, P)\right) <$$

$$< 2M\varepsilon$$

$$(<) \quad \sqrt{2M\varepsilon} + \varepsilon + \varepsilon\sqrt{2\pi} \Rightarrow \exists T : \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f - T|^2 dx\right)^{1/2} < \varepsilon + \varepsilon\sqrt{2\pi} + \sqrt{2M\varepsilon}$$

Тригонометријски ред у комплексној форми

$$e_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$$

ортогоналан
ортонормиран

$$\int_{-\pi}^{\pi} e_k(x)\,\overline{e_n(x)}\,dx = \delta_{kn}$$

$f \in \mathcal{R}(\mathbb{R})$

$$c_k \overset{def}{=} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\overline{e_k(x)}\,dx$$

Фуријеови коефицијенти у комплексној форми

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$$

$$\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \qquad \varphi = nx$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i}\right) e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i}\right) e^{-inx}$$

$$e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}$$

$$\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \qquad \overline{e_n(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-inx}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{-inx}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\overline{e_n(x)}\,dx = \frac{c_n}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e_k(x)$$

Став (Једнакост Парсевала):
Ако је f интеграбилна на $(-\pi, \pi)$ и $c_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\overline{e_k(x)}\,dx$ $\left(e_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}\right)$ тада је $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2\,dx$.

8.11.2011.

f интегрируема функция на $[-\pi, \pi]$ тогда $\forall \varepsilon > 0$ можем да намерим тригонометричен полином $T_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikx}$

($|f(x)| \le M$ $x \in [-\pi, \pi]$) такъв, че $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - T_n(x)|^2 dx \le \varepsilon + \varepsilon\sqrt{2\pi} + \sqrt{2M\varepsilon}$

$e_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$ $k \in \mathbb{Z}$ $\int_{-\pi}^{\pi} e_k(x) \cdot \overline{e_m(x)}\, dx = \delta_{km}$

f интегрируема на $[-\pi, \pi]$

$c_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{e_k(x)} dx$ $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx$ $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx$

$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx =$ $\left(\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}\right.$

$\left. \sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}\right)$

$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - ib_n}{2}\right) e^{inx} +$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e_k(x)$ $\frac{a_0}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} c_0$

$\frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} c_{+n}$

$\frac{a_n + ib_n}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} c_{-n}$

Неравенството дава интеграл

$\int_{-\pi}^{\pi} \left|f(x) - \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k e_k(x)\right|^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left|f(x) - \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k(x) + \sum_{k=-n}^{n} (c_k - \alpha_k) e_k(x)\right|^2 dx =$ *

вече φ_1 φ_2

$\alpha_k \in \mathbb{C}$

$= \int_{-\pi}^{\pi} \left|f(x) - \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k(x)\right|^2 dx + \sum_{k=-n}^{n} |c_k - \alpha_k|^2$ (**)

показахме помощно

идеята, която ползва доказва за пред

следващия случай

1° $\alpha_{-n} = \alpha_{-n+1} = \ldots = \alpha_{n-1} = \alpha_n = 0$,

$\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left|f - \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k\right|^2 dx + \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 dx \geq \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2$ (Бесселова неједнакост)

2° $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k e_k(x)|^2 dx \geq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k(x)|^2 dx$

– једнакост само ако је $\alpha_k = c_k$

* Нека је дато ε (произвољно) тада постоји тригонометријски полином $T_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k e^{ikx}$

такав да је $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k e^{ikx}|^2 dx \leq \varepsilon + \varepsilon\sqrt{2\pi} + \sqrt{2\pi}\varepsilon$

$0 \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 dx - \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 dx - \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 \overset{\text{по свиду } 1^\circ}{=} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k(x)|^2 dx$

$\overset{\text{по основу } 2^\circ}{\leq} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k \sqrt{2\pi} e_k(x)|^2 dx < \varepsilon + \varepsilon\sqrt{2\pi} + \sqrt{2\pi}\varepsilon$ (важно!)

↓ било какав број

$0 \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 dx - \sum_{-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \leq \varepsilon + \varepsilon\sqrt{2\pi} + \sqrt{2\pi}\varepsilon$

кад $\varepsilon \to 0$

↓

$\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$ ← Ванш једнакост

Парсевалова једнакост

f је реална ф-ја

* $c_0 = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} a_0$

$c_n = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}(a_n - ib_n)$

$c_{-n} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}(a_n + ib_n)$

$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 dx$

$|c_0|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |c_{-k}|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 dx$

$\frac{\pi}{2} a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi}{2}(a_k^2 + b_k^2) + \sum_{k=1}^{\infty} \pi/2 (a_k^2 + b_k^2) = \int_{-\pi}^{\pi} f^2 dx$

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2\,dx$$ (Парсевалова једнакост за реалну функцију)

**

Ако је $\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_1 \bar{\varphi}_2\,dx = 0 \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi}|\varphi_1+\varphi_2|^2dx = \int_{-\pi}^{\pi}|\varphi_1|^2dx + \int_{-\pi}^{\pi}|\varphi_2|^2dx$

$$\int_{-\pi}^{\pi}|\varphi_1+\varphi_2|^2dx = \int_{-\pi}^{\pi}(\varphi_1+\varphi_2)(\bar{\varphi}_1+\bar{\varphi}_2)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left(|\varphi_1|^2+\varphi_2\bar{\varphi}_1+\varphi_1\bar{\varphi}_2+|\varphi_2|^2\right)dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}|\varphi_1|^2dx + \int_{-\pi}^{\pi}|\varphi_2|^2dx + \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_1\bar{\varphi}_2\,dx}_{0} + \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_1\bar{\varphi}_2\,dx}_{0}$$

$\varphi_1 \overset{\text{def}}{=} f - \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k \qquad \varphi_2 \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=-n}^{n}(c_k-\alpha_k)e_k$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_1\bar{\varphi}_2\,dx = \sum_{k=-n}^{n}(\bar{c}_k-\bar{\alpha}_k)\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\left(f-\sum_{\ell=-n}^{n}c_\ell e_\ell\right)\cdot\bar{e}_k\,dx}_{0} =$$

$$= \sum_{k=-n}^{n}(\bar{c}_k-\bar{\alpha}_k)\cdot 0 = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(f-\sum_{\ell=-n}^{n}c_\ell e_\ell\right)\bar{e}_k\,dx = \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} f\bar{e}_k\,dx}_{c_k} - \sum_{\ell=-n}^{n}c_\ell\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}e_\ell\bar{e}_k\,dx}_{\delta_{\ell k}}$$

$= c_k - c_k = 0$

Израчунајмо φ_2

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=-n}^{n}(c_k-\alpha_k)e_k\right|^2dx = \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=-n}^{n}(c_k-\alpha_k)e_k(x)\sum_{\ell=-n}^{n}(\bar{c}_\ell-\bar{\alpha}_\ell)\bar{e}_\ell\,dx =$$

$$= \sum_{k,\ell=-n}^{n}(c_k-\alpha_k)(\bar{c}_\ell-\bar{\alpha}_\ell)\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}e_k\bar{e}_\ell\,dx}_{\delta_{k\ell}}$$ — Питагорина теорема у простору функц.

*Напомена: не мора ф-ја да буде тачно 2π - периодична

нпр. пример f периодична са периодом 2ℓ

$$F(t) = f\left(\frac{\ell t}{\pi}\right)$$

↳ $F(t)$ је периодична са периодом 2π

$$F(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} A_n \cos nt + B_n \sin nt$$

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\cos nt\, dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{\ell t}{\pi}\right)\cos nt\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{\pi n x}{\ell}\cdot\frac{\pi}{\ell}\,dx = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$$

$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\sin nt\,dt = \dots = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\frac{\sin n\pi x}{\ell}\,dx$$

$$f(x) \sim \frac{A_0}{2} + \sum_{1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi x}{\ell} + B_n\sin\frac{\pi n x}{\ell}\right)$$

f непарна 2π периодична

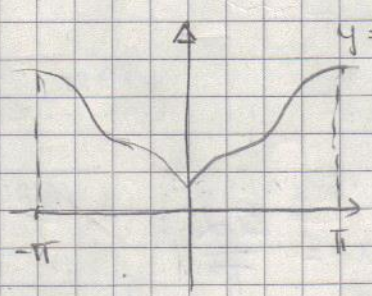
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = 0$$

$$f \sim \sum_{1}^{\infty} b_n \sin nx$$

парна 2π периодична

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = 0$$

$$f \sim \sum_{1}^{\infty} a_n \cos nx$$



$$f^*(x) = \begin{cases} f(x) & 0 < x < \pi \\ f(-x) & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

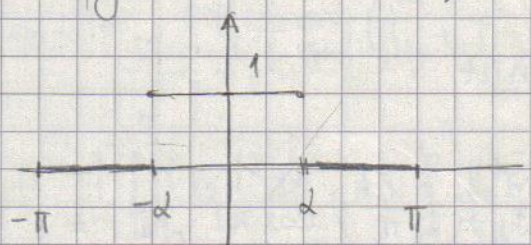
$$f^*(x) \sim \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx$$

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^*(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f^*(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{A_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} A_n \cos nx \qquad 0 < x < \pi$$

аналогно за развијање по синусима - само непарна (симетрично у односу на координатни почетак)

Пример



функција је ограничена | варијација је

f(x) је парна па су само присутни a_n

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\alpha} \cos nx\, dx = \frac{2}{\pi n}\sin nx\Big|_0^{\alpha} = \frac{2\sin n\alpha}{\pi n}, \quad n \geq 1$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\alpha} 1\, dx = \frac{2\alpha}{\pi}$$

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{\alpha}{\pi} + \sum_{1}^{\infty} \frac{2}{\pi n}\sin n\alpha \cos nx \qquad -\pi < x < \pi$$

Парсевалова једнакост каже:

$$\frac{a_0}{2}^2 + \sum_{1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2\, dx$$

$$\left(\frac{\frac{2\alpha}{\pi}}{2}\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi n}\sin n\alpha\right)^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha} 1^2\, dx = \frac{2\alpha}{\pi}$$

$$\frac{2\alpha^2}{\pi^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{\pi^2 n^2}\sin^2 n\alpha\right) = \frac{2\alpha}{\pi} \quad / \pi^2$$

$$2\alpha^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\sin^2 n\alpha}{n^2} \cdot 4 = 2\alpha\pi$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2} = \frac{\alpha(\pi-\alpha)}{2}$$

$$\alpha = \pi/2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4} \cdot S$$

$$S = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4} S$$

$$\frac{3}{4} S = \frac{\pi^2}{8}$$

$$S = \frac{4\pi^2}{3 \cdot 8} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$$

користиме за Штефан-Болцманов закон (изводење б)

Пример дер

$f(x) = \cos ax \quad -\pi \le x \le \pi$ парна и периодична!

$$\frac{a_0}{2} = \frac{\sin a\pi}{a\pi} \qquad a_n = (-1)^n \frac{2a}{a^2 - n^2} \frac{\sin a\pi}{\pi}$$

$$\cos ax = \frac{\sin a\pi}{a\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2a}{(a^2-n^2)} \quad \frac{\sin a\pi}{\pi} \cos nx$$

$$-\pi \le x \le \pi$$

на пример $x=\pi$

$$\cos a\pi = \frac{\sin a\pi}{a\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a}{a^2-n^2} \quad \frac{\sin a\pi}{\pi} \quad / \frac{\pi}{\sin a\pi}$$

$$\pi \frac{\cos a\pi}{\sin a\pi} = \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a}{a^2-n^2} \quad \forall a =$$

$0 < a < 1$

$$\frac{d}{da}(\ln \sin \pi a) = \frac{d}{da}\left(\ln(a\pi)\right) + \sum \left(\ln\left(1-\frac{a^2}{n^2}\right)\right)'$$

$$x - \frac{x^2}{2} \le \ln(1+x) \le x$$

$$\left(\ln \sin a\pi\right)' = \left(\ln(a\pi)\right)' + \left(\sum \ln\left(1-\frac{a^2}{n^2}\right)\right)' \text{ почленно равномерно}$$

$$\left(\ln \sin a\pi = \ln(a\pi) - \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1-\frac{a^2}{n^2}\right)\right)' = 0$$

$$\ln \frac{\sin a\pi}{a\pi} - \ln \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a^2}{n^2}\right) = C$$

$$\Rightarrow \frac{\sin a\pi}{a\pi} = C_1 \prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{a^2}{n^2}\right) \Rightarrow \frac{\sin a\pi}{a\pi} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a^2}{n^2}\right)$$

$a \to 0 \quad C_1 = 1$

$a\pi = z$

$$\sin z = z \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$$

ни подали у кроки 0!

9.11.2011.

* Диференцијалне једначине

* Метрички простори

Нека је дат скуп X и ф-ја $d: X \times X \to [0, +\infty)$ а која има следећа својства:

1) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

2) $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x, y \in X$

3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \quad \forall x, y, z \in X$

d - растојање (X, d) метрички простор

Пример

1) $\mathbb{R}$ растојање на $\mathbb{R}$ дефинисано са $d(x,y) = |x-y|$

2) $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$ $x = (x_1, \ldots, x_n)$ $y = (y_1, \ldots, y_n)$

фиксирамо $1 \leq p < +\infty$ и ф-ју d дефинишемо као $d_p(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p\right)^{1/p}$

$p = \infty$ $d_\infty(x,y) = \max |x_i - y_i|$

$p = 2$ еуклидска метрика

- кугле. Кугла у метричком простору са полупречником r и центром у x

$B(x,r) = \{y \in X : d(y,x) < r\}$ - отворена кугла

* Скуп $G \subset X$ је отворен у метричком простору X ако $\forall x \in G$ $\exists$ кугла (отворена) $B(x,r)$ таква да је $B(x,r) \subset G$.

* Скуп $F \subset X$ је затворен ако је његов комплемент F^c отворен.

- постоје скупови који нису ни отворени ни затворени

* Тачка нагомилавања скупа $S \subset X$ је тачка x ако за свако $r > 0$ у кугли $B(x,r)$ има бесконачно много елемената скупа S

- када се скупу S додају све његове тачке нагомилавања он постаје затворен $\overline{S}$ - затворење скупа S

$S = (0,1)$ $\overline{S} = [0,1]$

Затворење скупа $\mathbb{Q}$ је цео $\mathbb{R}$

7. Пример

Означимо са $C[a,b]$ скуп свих непрекидних функција на $[a,b]$.

$$f,g \in C[a,b] \quad d(f,g) = \max_{a \le x \le b} |f(x) - g(x)|$$

непрекидна ф-ја на компакту мора достизати свој

1) $d(f,g) = 0 \iff f = g$

2) важи и простија реченица

3) за непрекидне ф-је $f,g,h \in C[a,b]$ $|f-g| = |f-h+h-g| \le$

$$|f-h| + |h-g| \le \max_{[a,b]} |f-h| + \max_{[a,b]} |h-g|$$

$$\Rightarrow \max_{[a,b]} |f-g| \le \max_{[a,b]} |f-h| + \max_{[a,b]} |h-g|$$

$$d(f,g) \le d(f,h) + d(h,g)$$ — метрички простор

* комплетни метрички простори

Низ је конвергентан ако је коши (на реалној оси $\mathbb{R}$ са метриком $d(x,y) = |x-y|$)

$\mathbb{R}$ - рационални бројеви $\mathbb{Q}$ са истом метриком d

$r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ $d(r_1, r_2) = |r_1 - r_2|$

- сад указујемо на низ тачака који није коши

Узмемо низ $r_1 = 1$, $r_2 = 1.4$, $r_3 = 1.41$ ... (низ r_n)

је ли је низ (r_n) коши у $\mathbb{R}$ јесте, метрика у $\mathbb{Q}$ исто као у $\mathbb{R}$ па је коши и у $\mathbb{Q}$ али није конвергентан у $\mathbb{Q}$.

деф. Низом у метричком простору (X,d) називамо сваку функцију

$f: \mathbb{N} \to X$, $X \ni x_n (= f(n))$

Низ $(x_n)_1^\infty$ у метричком простору (X,d) се назове коши низом ако

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m,n \in \mathbb{N})(m,n \ge n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon)$$

деф: Метрички простор (X,d) се назива комплетним ако у њему конвергира сваки коши низ.

- $\mathbb{R}$ са метриком d је комплетан

$\mathbb{R}^n$ са било којом метриком (d_p, d_∞) је комплетан

Теорема: Простор $C[a,b]$ у односу на метрику $d(f,g)=\max|f(x)-g(x)|$ $f,g\in C[a,b]$ је комплетан метрички простор.

Доказ: Нпр сваки коши низ конвергира, одакле су из $C[a,b]$.

Нека је $(f_n)_1^\infty$ неки коши низ у $C[a,b]$. Што значи да $(\forall\varepsilon>0)(\exists n_0\in\mathbb{N})(d(f_m,f_n)<\varepsilon \ m,n\geq n_0)$

Тј значи да је $\max|f_m(x)-f_n(x)|<\varepsilon \ \forall m,n\geq n_0$ а пошто је $\max<\varepsilon$ важи и за је $|f_m(x)-f_n(x)|<\varepsilon \ \forall x\in[a,b], \forall m,n\geq n_0$.

Фиксирамо неку конкретну вредност. Нека је то $x\in[a,b]$. Тада је $(f_n(x))_{n=1}^\infty$ реални (или комплексни) низ који због услова $|f_m(x)-f_n(x)|<\varepsilon$ исти коши

Због комплетности $\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) постоји $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Дозвољено $f(x)\overset{\text{def}}{=}\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ $\forall x\in[a,b]$.

Особине $f(x)$:

1) Код $m\to\infty$ $\lim|f_n(x)-f_m(x)|=f_n(x)-f(x)\leq\varepsilon \ \forall x\in[a,b] \ \forall n\geq n_0$

Овај услов значи да $f_n(x)$ равномерно конвергира ка f $f_n\rightrightarrows f$ на $[a,b]$.

Пошто су све f_n непрекидне а конвергенција равномерна $\Rightarrow$ $f\in C[a,b]$. Из $|f_n(x)-f(x)|\leq\varepsilon \ \forall x\in[a,b] \ \forall n\geq n_0\Rightarrow$ $\max|f_n(x)-f(x)|\leq\varepsilon$, $d(f_n,f)\leq\varepsilon$ за $n\geq n_0$. Што значи $d(f_n,f)\overset{[a,b]}{\underset{n\to\infty}{\to}}0$

$\Rightarrow$ низ почетка f_n конвергира ка f, $f_n\to f$

Закључак: сваки коши низ конвергира неком функцији из тог простора. ■

деф: Пресликавање $f:X\to X$ се назива контракција ако постоји број $0<q<1$ такав да $\forall x,y\in X$ важи $d(f(x),f(y))\leq q\,d(x,y)$

(растојање међу сликама $\leq$ од растојања међу оригиналима)

* (X,d) - комплетан $\quad Y=Y\subset X \quad (Y,d)$ - комплетан

Узмемо коши низ у Y, а $Y\subset X$ па је исти коши низ и у X. X је комплетан па је тај коши низ конвергентан, а Y је затворен па садржи све тачке нагомилавања

Теорема: (Банахов став о фиксној тачки)

(За пресликавање f кажемо да му је тачка $x \in X$ фиксна ако је $f(x) = x$. (слика се сама у себе))

Нека је (X, d) комплетан метрички простор и $f: X \to X$ је контракција. Тада f има јединствену фиксну тачку.

Доказ: Узмемо било коју тачку $x_0 \in X$ и правимо низ

$x_1 = f(x_0) \quad \ldots \quad x_{n+1} = f(x_n) \quad (x_n)_{n=1}^{\infty}$ низ у комплетном метричком простору (X, d). Покажемо да је $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ Кошијев

$d(x_{k+1}, x_k) = d(f(x_k), f(x_{k-1})) \leq q\, d(x_k, x_{k-1})$ - особина контракције

$d(x_{k+1}, x_k) \leq q\, d(x_k, x_{k-1}) \leq q \cdot q\, d(x_{k-1}, x_{k-2}) \leq q^2 d(x_{k-1}, x_{k-2})$

(код се увуши индекс за 1 испод q)

$\leq \ldots \leq q^k d(x_1, x_0)$, $a = d(x_1, x_0)$ - константа

- доказали смо $d(x_{k+1}, x_k) \leq q^k \cdot a \quad \forall k = 0, 1, 2$

Бирамо бројеве m и n, $m > n$

$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) +$

$d(x_{n+2}, x_{n+3})$

$\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots + d(x_{m-2}, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_m)$

$\leq q^n a + q^{n+1} a + \ldots + q^{m-1} a = q^n a (1 + q + \ldots + q^{m-1-n}) \quad (m > n)$

$\leq q^n \cdot a \sum q^k = \frac{a q^n}{1 - q}$

Кад је $m > n$ тада је $d(x_n, x_m) \leq \frac{a}{1-q} q^n \Rightarrow$ за произвољно $\varepsilon > 0$ постоји $n_0 : \frac{a}{1-q} q^n < \varepsilon$ за $n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon \Rightarrow$

$(x_n)_1^{\infty}$ је Кошијев и пошто је у комплетном метричком простору онда (x_n) конвергира ка неком $x \in X$ $d(x_n, x) \to 0$

- свака функција која је контракција сваверно је и непрекидна (шиб је случај са нашом)

- сад посматрамо $d(x_{n+1}, f(x)) = d(f(x_n), f(x)) \leq q\, d(x_n, x) \to 0$

$\Rightarrow d(x_{n+1}, f(x)) \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Из $x_{n+1} \to f(x)$ односно x_n конвергира ка $f(x)$, а потпуно исто показати да низ x_n конвергира ка $x \Rightarrow |f(x) = x|$

Нека је $x' \in X$ још нека фиксна тачка тада би $x' = f(x')$

$x = f(x)$

$d(x', x) = d(f(x'), f(x)) \leq q\, d(x', x)$

$\boxed{d(x', x) \leq q\, d(x', x)} \Rightarrow q \geq 1$ а претпостављено је $q < 1$

– контрадикција јер је $d(x, x) = 0$ а то значи $x' = x$! ■

Пример: Нека је $0 < \varepsilon < 1$ фиксиран број. Разматрајмо $x - y + \varepsilon \sin y$, $x \in \mathbb{R}$

Задатак: једноставно или једноставно решење по y за било које x

– да би решили уводимо пресликавање $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (метрика $d(x, y) = |x - y|$)

$F(y) = x - \varepsilon \sin y$

– код би показали да је $F(y)$ контракција могли би применити Банахов став

– провера контракције:

2 тачке из метричког простора (реалне осе) $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$

Посматрамо растојање међу сликама $d(F(y_1), F(y_2)) = |F(y_1) - F(y_2)| =$

$= |x - \varepsilon \sin y_1 - x + \varepsilon \sin y_2| = \varepsilon |\sin y_2 - \sin y_1| = \varepsilon |y_2 - y_1| |\cos \xi|$

$\leq \varepsilon |y_2 - y_1| = \varepsilon d(y_1, y_2)$ (Лагранж)

$d(F(y_1), F(y_2)) \leq \varepsilon d(y_1, y_2) \Rightarrow$ контракција

$\Rightarrow$ Применом Банаховог става (за свако x једноставно решење за y).

15. 11. 2011. године

$y^{*} F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad x \in [a, b]$ - диференцијалне једначине

Пример: $xy + y'^2 = 0$

Ред највишег извода представља ред диференцијалне једначине

$$\Phi(x, y) = 0$$

$$y = \varphi(x)$$

Функција $y = \varphi(x)$ је решење диференцијалне једначине *

ако је $F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) = 0$.

Пример: 1° $y'' + y = 0$

$y = a \sin x + b \cos x \qquad a, b = const$

- није јединствено решење јер a i b узимамо како хоћемо
- добили смо фамилију решења

2° $y' = f(x)$

$$y = \int f(x)\,dx + C \qquad C = const$$

- не можемо у општем случају написати експлицитно решење
- у оквиру једног реда имамо разне методе
- поступак решавања: интеграција диференцијалних једначина

Бавићемо се пре свега са $n = 1$

Диференцијалне једначине првог реда

$F(x, y, y') = 0$ $\quad y' = f(x, y)$

Пример: $y' = x^2 + y^2$ (тешко за решавање)

други облик $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$

$f(x, y)\,dx + dy = 0$ још општији облик

$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$

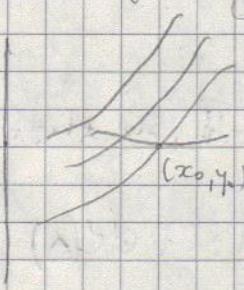
$y' = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)} = f(x, y)$

Кошијев проблем за диференцијалне једначине првог реда

$y' = f(x, y)$

Тражимо решење ове диференцијалне једначине $y = y(x)$ које у унапред задатој почетној тачки узима унапред задату вредност. $y(x_0) = y_0$ фамилија функција

Да ли је решење јединствено? Односно да ли унапред задата почетна тачка доводи јединственој ф-ји?



Г $y' = f(x, y)$

$y = y(x) \quad y(x_0) = y_0$ ⌋

Став: $P = \{(x, y) : |x - x_0| \le a, |y - y_0| \le b\}$

$f \in C(P)$ (због непрекидности $\exists M : |f(x, y)| \le M \ \forall (x, y) \in P$)

и нека постоји константа k : $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le k|y_1 - y_2|$

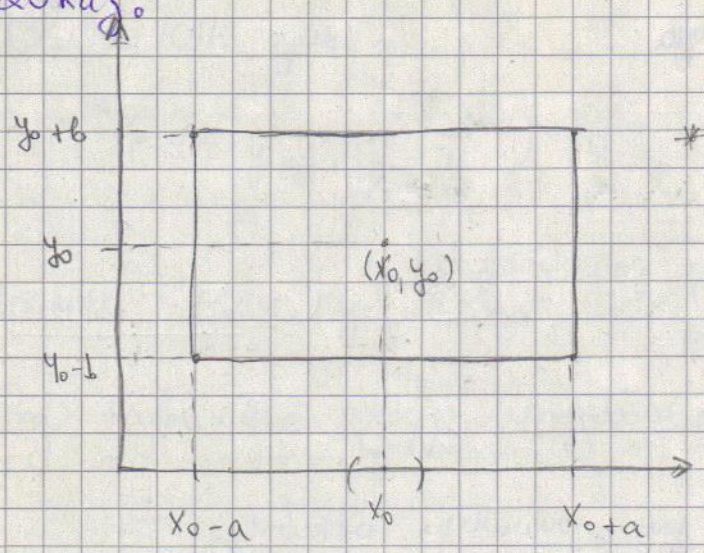
за свако $(x, y_1) \in P$ и $(x, y_2) \in P$.

Тада $\exists h > 0$ тако да на интервалу $\Delta = [x_0 - h, x_0 + h] \subset [x_0 - a, x_0 + a]$

Кошијев проблем $y'(x) = f(x, y(x))$

$y(x_0) = y_0$ има јединствено решење.

Доказ:



Бирамо

$$* \begin{cases} 0 < h < \frac{1}{k} \\ h < \min\left(a, \frac{b}{M}\right) \end{cases}$$

да и $\Delta \subset [x_0-a, x_0+a]$ ✓

да јер $h < a$

$$y'(s) = f(s, y(s))$$

$$\int_{x_0}^{x} y'(s)\,ds = \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\,ds$$

$$\underbrace{y(x) - y(x_0)}_{\text{по основу Лајбницове теореме}} = \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\,ds \quad \text{односно} \quad \boxed{y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\,ds}$$

ово једначина је еквивалентна Кошијевом проблему

$\Delta = [x_0 - h, x_0 + h]$ где h задовољава услов $*$

$C_\Delta = \{f : f \in C(\Delta)\}$ уводимо метрику $d(f_1, f_2) = \max_{\Delta} |f_1 - f_2|$

↓ јер је онда још комплетан метрички простор

Сад тако да одаберемо још један потпростор:

$A = \{f \in C_\Delta : d(f, y_0) \le b\}$ - затворена кугла полупречника b са центром у y_0; однако затворен скуп у C_Δ

(A, d) је комплетан метрички простор

Дефинишемо пресликавање $F : A \to A$

$$F(y) = y_0 + \int_{x}^{x_0} f(s, y(s))\,ds$$

Пробер: да $F(y) \in A$ ако $y \in A$.

да ми је $(s, y(s)) \in P$ ако $s \in \Delta$ и $y \in A$

$\Downarrow$

$\max_{\Delta} |y(s) - y_0| \le b$

$$d(Fy, y_0) = \max_{\Delta} |Fy - y_0| =$$

$y \in A$

$$= \max_{\Delta} \left| \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\, ds \right| \le \max_{\Delta} \int_{x}^{x_0} f(s, y(s))\, ds \le \max_{\Delta} M |x - x_0|$$

$\le h$

$\le Mh \le b$

$\Downarrow$

$F(y) \in A$ ако је $y \in A$.

(* — зар се ове ознаке на Δ)

Сад проверавамо да ми је F контракција на (A, d).

$y_1, y_2 \in A$

$$d(Fy_1, Fy_2) = \max_{\Delta} |Fy_1 - Fy_2| = \max_{\Delta} \left| \int_{x_0}^{x} (f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s)))\, ds \right|$$

$$\le \max_{\Delta} \left| \int_{x_0}^{x} |f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))|\, ds \right| \le \max_{\Delta} \left| \int_{x_0}^{x} k |y_1(s) - y_2(s)|\, ds \right|$$

$$\le \max_{\Delta} \left| \int_{x_0}^{x} k \left(\max_{\Delta} |y_1(s) - y_2(s)| \right) ds \right|$$

$$= k \cdot d(y_1, y_2) \max_{\Delta} \left| \int_{x_0}^{x} ds \right| = k \cdot d(y_1, y_2) \max_{\Delta} |x - x_0| \le$$

$$\le k \cdot d(y_1, y_2)\, h = kh\, d(y_1, y_2)$$

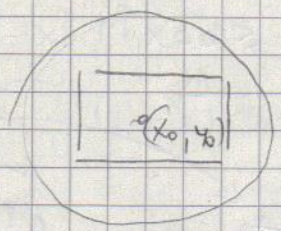
Добили смо $\forall y_1, y_2 \in A$

$$d(Fy_1, Fy_2) \le \underbrace{k \cdot h}_{<1} d(y_1, y_2)$$

Ако дефинисано пресликавање F јесте контракција, па F има јединствену фиксну тачку односно јединствено решење Кошијевог проблема онда

<u>став (књига)</u>: $f \in C(U)$ $U_{(x_0,y_0)}$ $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leq C < +\infty \ \forall (x,y) \in U$

$y' = f(x_0, y_0)$ Тада Кошијев проблем $y(x_0) = y_0$ $[x_0 - h, x_0 + h]$ за h довољно мало.



$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, \xi_1)\right| |y_1 - y_2|$$
$$\leq C |y_1 - y_2|$$

експлицитније за формулисање

Теорема Пеана - само са непрекидношћу

Пример: $y' = 3y^{2/3}$ $f(x,y) = y^{2/3}$ непрекидно на $\mathbb{R}^2$

$\varphi(x) = (x+C)^3$ $C = const.$

$\varphi'(x) = 3(x+C)^2$

$3y^{2/3} = 3\left((x+C)^3\right)^{2/3} = 3(x+C)^2$

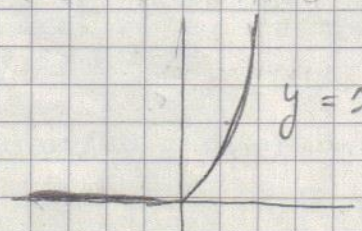
$\varphi(x) = (x+C)^3$ задовољава једначину $\forall C \in \mathbb{R}$

$\varphi_1(x) = 0$ $y(x_0) = 0$

$\varphi(x) = (x - x_0)^3$

$\varphi(x_0) = 0$

$\varphi_1(x) = 0$ $\varphi_1(x_0) = 0$



$\frac{\partial f}{\partial y} = 3 \cdot \frac{2}{3} y^{-1/3} = \frac{2}{\sqrt[3]{y}}$ ↑

други услов не постепено

. је задовољимо 1

Дефиниција: Опште решење диференцијалне једначине $y' = f(x, y)$ у области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ где је задовољена егзистенција и јединственост решења Кошијевог проблема је једнопараметарска фамилија функција $y = \varphi(x, C)$ која задовољава:

1° $\forall y = \varphi(x, C) \in S$ је $\varphi'_x(x, C) \equiv f(x, \varphi(x, C))$

2° За дате почетне услове постоји вредност C_0: $\varphi(x_0, C_0) = y_0$.

$((x_0, y_0) \in \Omega)$

$\Phi(x, y, C) = 0$ – партикуларно решење

Дефиниција: $y = \psi(x)$ је сингуларно решење једначине $y' = f(x, y)$ ако је задовољава ($\psi' = f(x, \psi)$) и ако је у свим тачкама $(x, \psi(x))$ нарушена јединственост решења Кошијевог проблема за једначину $y' = f(x, y)$.

$y' = f(x, y) \quad y(x_0) = \psi(x_0)$.

Нека имамо једначину $y' = f(x, y) \quad y(x_0) = y_0$

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_n(x))\, dx \quad \text{(што чине Банахов став)}$$

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)\, dx$$

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1(x))\, dx$$

$\vdots$

$y_n(x)$ добијамо низ ф-ја – француски математичар Пикар је доказао да конвергира тражењем решења!

Пример: $y' = y = f(x,y)$ (Пикаров метод узастопних апроксимација (функција))

$y(0) = 1$

$x_0 \quad y_0$

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x 1\,dx = 1 + x$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x (1+s)\,ds = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

$$y_3(x) = 1 + \int_0^x 1 + s + \frac{s^2}{2} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

Види се правилност

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \to \sum_{0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

Банах и Пикар једнозначне пуштире

16.11.2011. године

Неке врсте (пуштире реша Бога) диференцијалних једначина

1° Једначина која раздваја променљиве

$$y' = \frac{\varphi(x)}{\psi(y)} \qquad \psi, \varphi \text{ - обичне функције}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\varphi(x)}{\psi(y)}$$

$$\varphi(x)\,dx - \psi(y)\,dy = 0$$

$$\varphi(x)\,dx = \psi(y)\,dy$$

$$\int \varphi(x)\,dx = \int \psi(y)\,dy + C$$

2° Хомогена једначина

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

↓ хомогена степена n ако је $\forall t > 0$

$$f(tx, ty) = t^n f(x,y)$$

Пример 1° $f(x,y) = x^2 + xy - y^2$

$f(tx, ty) = t^2 f(x,y)$ – хомогена 2

2° $f(x,y) = 1/x+y$ $\quad f(tx,ty) = t^{-1} f(x,y)$, хомогена -1

3° $f(x,y) = \frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + 5y^2}$ $\quad f(tx,ty) = f(x,y) = t^0 f(x,y)$ хомогена 0

$y' = f(x,y)$, f хомогена ф-ја степена хомогености 0.

$y' = f(1, \frac{y}{x}) = \varphi(\frac{y}{x})$, $\varphi(s) = f(1,s)$

$y' = \varphi(\frac{y}{x})$ како се ова решава

$y' = \varphi(\frac{y}{x})$ φ је унапред позната ф-ја

$\frac{y}{x} = z = z(x)$

$y = x \cdot z$

$y' = z + x \cdot z'$

$z + x \cdot z' = \varphi(z)$

$x \cdot z' = \varphi(z) - z$

$x \frac{dz}{dx} = \varphi(z) - z$

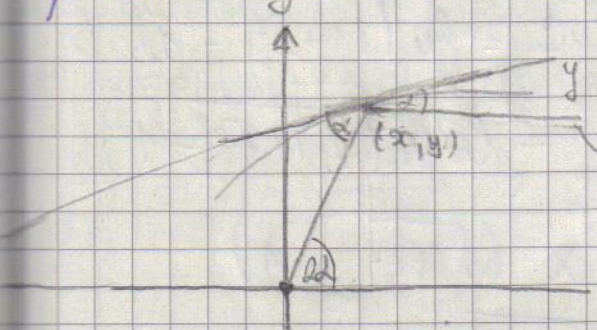
$\Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dz}{\varphi(z) - z}$

$\ln x + \ln C = \int \frac{dz}{\varphi(z) - z} = \Phi(z)$

$\ln Cx = \Phi(z)$

$\ln Cx = \Phi(\frac{y}{x})$

Пример: аутомобилски фар мора бити парабола!



→ захтевамо да зраци буду паралелни x – оси

$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{y}{x}$ $\quad \operatorname{tg}\alpha = y'$

$$tg\,2\alpha = \frac{2tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha}$$

$$\boxed{\frac{y}{x} = \frac{2y'}{1-y'^2}}$$ - диференцијална једначина криве

$$1-y'^2 = \frac{2x}{y}\cdot y'$$

$$y'^2 + \frac{2xy'}{y} - \frac{1}{1} = 0$$ кв. једначина по y'

$$y'_{1,2} = \frac{-\frac{2x}{y} \pm \sqrt{\frac{4x^2}{y^2}+4}}{2}$$

$$y'_{1,2} = -\frac{x}{y} \pm \sqrt{\frac{x^2}{y^2}+1}$$

За даљи рачун потребно је узети било + или -

разматрамо

$$y' = -\frac{x}{y} + \sqrt{\frac{x^2}{y^2}+1}$$

$$\frac{y}{x} = z$$

$$y' = xz' + z$$

$$xz' + z = -\frac{1}{z} + \sqrt{\frac{1}{z^2}+1}$$

$$xz' = -z + \sqrt{1+z^2} - 1$$

$$x\frac{dz}{dx} = \frac{\sqrt{1+z^2} - 1 - z^2}{z}$$

$$\frac{2\,dz}{\sqrt{1+z^2}-(1+z^2)} = \frac{dx}{x}$$

$$-\frac{dx}{x} = \frac{\frac{2\,dz}{\sqrt{1+z^2}}}{\sqrt{1+z^2}-1}$$

$$-\frac{dx}{x} = \frac{d(\sqrt{1+z^2}-1)}{\sqrt{1+z^2}-1}$$

$$-\int\frac{dx}{x} = \int\frac{d(\sqrt{1+z^2}-1)}{\sqrt{1+z^2}-1}$$

$$-\ln x + \ln C = \ln(\sqrt{1+z^2}-1)$$

$$\ln C = \ln x(\sqrt{1+z^2}-1)$$

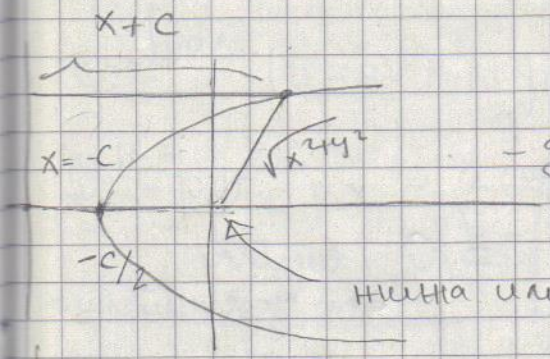
$$C = x(\sqrt{1+z^2}-1)$$

$$C = x\left(\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}-1\right)$$

$c = \sqrt{x^2+y^2} - x \Leftrightarrow c+x = \sqrt{x^2+y^2}$

$c^2 + 2cx + x^2 = x^2 + y^2$

$\boxed{y^2 = 2c\left(x + \frac{c}{2}\right)}$ – парабола



– дефинишуја параболе (једначином од једне праве и једне тачке

↳ директриса

* парабола, Сунце, цигарета :)

– до сад узети – исто бисмо добили параболу само конкав окренуту!

* оне које се своде на хомогене

$y' = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$ $\underbrace{a, b, c, a_1, b_1, c_1}_{\text{сви}}$, f унапред позната

$x = \xi + \alpha \quad \alpha = \text{const.}$

$y = \eta + \beta \quad \beta = \text{const.}$ } погодно одсечно бирамо

$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d\eta}{d\xi}$

$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a(\xi+\alpha)+b(\eta+\beta)+c}{a_1(\xi+\alpha)+b_1(\eta+\beta)+c_1}\right)$

$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a\xi+b\eta+a\alpha+b\beta+c}{a_1\xi+b_1\eta+a_1\alpha+b_1\beta+c_1}\right)$

сад бирамо α и β

1° одаберемо α и β (ако је то могуће) $a\alpha+b\beta+c=0$

$a_1\alpha+b_1\beta+c_1=0$

$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a\xi+b\eta}{a_1\xi+b_1\eta}\right) = f\left(\frac{a+b\frac{\eta}{\xi}}{a_1+b_1\frac{\eta}{\xi}}\right) = \varphi\left(\frac{\eta}{\xi}\right)$

где је $\varphi(s) = f\left(\frac{a+bs}{a_1+b_1s}\right)$

$\frac{d\eta}{d\xi} = \varphi\left(\frac{\eta}{\xi}\right)$ – хомогена једначина!!! – овај тип знамо

↓ када решимо $\Phi = (\xi, \eta) = C$

$\Phi(x-\alpha, y-\beta) = C$ ✓

1° $\begin{aligned} a\alpha + b\beta &= -c \\ a_1\alpha + b_1\beta &= -c_1 \end{aligned}$ $\cdot \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0$ систем има јединствено решење за α и β

онда смо могли да применимо поступак 1° Али то не мора ући да буде случај

2° $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{aligned} a_1 &= \lambda a \\ b_1 &= \lambda b \end{aligned}$ $\lambda = \text{const}$ $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{\lambda(ax+by)+c_1}\right)$

$ax+by = z$ $z' = a+by'$ $\frac{z'-a}{b} = y'$ $\frac{z'-a}{b} = f\left(\frac{z+c}{\lambda z+c_1}\right)$

$\frac{dz}{dx} = a + bf\left(\frac{z+c}{\lambda z+c_1}\right) \Rightarrow \frac{dz}{a+bf\left(\frac{z+c}{\lambda z+c_1}\right)} = dx$

Линеарна диференцијална једначина I реда

$y' + p(x)y = q(x)$ p, q унапред познате ф-је

$p, q \in C[a,b]$ $x_0 \in [a,b]$ $y' + p(x)y = q(x)$ $y(x_0) = y_0$

$y' = f(x,y) = q(x) - p(x)y$ } задовољена су оба услова

$\frac{\partial f}{\partial y} = -p(x)$ } за коши-в проблем има јединствено решење

Ако је $q \equiv 0$ једначина се назива хомогеном

$y' + p(x)y = 0$

$\frac{y'}{y} = -p(x)$

$(\ln y)' = -p(x)$

$\ln y = C_1 - \int p\,dx$

$y(x) = C e^{-\int p\,dx}$ e^{C_1} опште решење хомогене

$y = v e^{-\int p dx}$ где је v сад непозната ф-ја пре-по смени осим решење

$y' = v' e^{-\int p dx} + v e^{-\int p dx}(-p)$ $\quad y' = e^{-\int p dx}(v' - pv)$

$e^{-\int p dx}(v' - pv) + pv e^{-\int p dx} = q$

$v' - pv + pv = q(x) e^{\int p dx}$

$\boxed{v' = q(x) e^{\int p dx}} \Rightarrow v(x) = c + \int q(x) e^{\int p dx} dx$

$\boxed{y = e^{-\int p dx}\left(c + \int q(x) e^{\int p dx} dx\right)}$

одмах пишемо формулу - у коначно много корака долазимо до решења

Бернулијева диференцијална једначина -

$y' + p(x)y = q(x) y^{\alpha}$

1° $\alpha = 1$ $\quad y' + (p(x) - q(x))y = 0$

$\frac{y'}{y^{\alpha}} + p(x) y^{1-\alpha} = q(x)$

$y^{1-\alpha} = z$

$(1-\alpha) y^{-\alpha} \cdot y' = z'$

$\frac{y'}{y^{\alpha}} = \frac{z'}{(1-\alpha)}$

$y' = \frac{1}{1-\alpha} z' \cdot z^{\frac{1}{1-\alpha}-1}$

$\boxed{y = z^{\frac{1}{1-\alpha}}}$

$\frac{z'}{1-\alpha} + pz = q$

$z' + \underbrace{p(1-\alpha)}_{p_1(x)} z = \underbrace{q(x)(1-\alpha)}_{q_1(x)}$

$\alpha \neq 1 \rightarrow$ шо смо анализирали претходни случај

- Једначина облика тачног диференцијала

$* \; M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$

Ако су M и N такве ф-је да постоји функција

$u: \partial u/\partial x = M(x,y) \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y)$

тада је $*$ екв. $du = 0 \quad u(x,y) = c$.

$\left(\frac{\partial N}{\partial x} \equiv \frac{\partial M}{\partial y}\right)$

$f(x,y) \in C^2$

$df = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}}_{P} dx + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}}_{Q} dy$

$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$

$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ и нека је $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ тада је решење!!!

$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy = c$

$Q(x,y) - Q(x_0,y) + Q(x_0,y)$

$= Q(x,y)\Big|_{x_0}^{x} + Q(x_0,y)$

$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y) \quad \frac{\partial u}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial P}{\partial y} ds + Q(x_0,y) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial Q}{\partial s} ds + Q(x_0,y) = Q(s,y)\Big|_{x_0}^{x} + Q(x_0,y)$