

1

Численички редови

Нека је дат низ неких типова реалних или комплексних бројева

$(a_n)_{n=1}^{\infty}$ $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ назива се численички ред

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

само симбол

a_n - n -ти члан реда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k \rightarrow n\text{-та парцијална сума}$$

реда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

- парцијалних сума има колико има чланова реда

$(S_n)_{n=1}^{\infty}$ - добијемо низ бројева

Def Ако постоји коначна гранична вредност $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ онда се каже да је ред конвергентан и његова сума је једнака S . У сваком другом случају ред се назива дивергентним.

- може да осцилује (односно низ парцијалних сума осцилује)

- $\pm \infty$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \pm \infty$ такође дивергентан)

- ако и само ако постоји и коначна је гранична вредност онда је конвергентан

Пример 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$$

- низ је рашуки

Треба показати да је ограничен одозго

$$\frac{1}{k(k-1)} > \frac{1}{k^2} \quad \text{за } k=2,3$$

$$\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

$$< 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} =$$

$$= 1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} =$$

$$= 2 - \frac{1}{n} < 2$$

$$\Rightarrow \sigma_n < 2$$

$$\boxed{\frac{\sigma^2}{6}}$$

- то је сума
(односно вектор
вредности)

$\Rightarrow \sigma_n$ је конвергентан
(јер је касион и обратан)

геометријски ред

$$2) \sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

$$\sigma_n = 1 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} =$$

- геометријски ред

$$= \frac{1}{1 - q} - \frac{1}{1 - q} q^{n+1}$$

- за $q = \pm 1$ онда осцилује

- $|q| > 1$ - неће конвергирати $\rightarrow \infty$ или осцилује (ако је $q < 0$)

конвергује само ако је

$$\boxed{|q| < 1}$$

Операције са редовима

1° $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ добављам или одбањивање константног броја
чланова - неком реду он остаје конвергентан односно

дивергентан какав је био пре те трансформације

2° $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергује $\lambda \in \mathbb{R}(C)$ онда је и ред $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$

конвергентан и важни $\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

(5)

3° ако су редови $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ конвергентни тада су и редови

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) \text{ конвергентни онда важни } \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ важно је ишитосе да ли ред конвергира или

Јошмо смо га дефинисали као низ парцијалних сума

- Кошијев критеријум конвергенције низа - (погледамо и)

$$(s_n)_{n=1}^{\infty}$$

s_n је конвергентан $\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N})$

$$(\forall n \geq n_0) (\forall p \in \mathbb{N}) (|s_n - s_{n+p}| < \varepsilon)$$

- чланови низа са јаким великим индексима се приближавају

Приметимо Кошијев критеријум на $\tilde{S}_k = \sum_{i=1}^k a_i$

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall n \geq n_0) (\forall p \in \mathbb{N}) (|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon)$$

$$|a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon$$

- Кошијев општи критеријум конвергенције:

Т. Ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ је конвергентан акко за свако $\varepsilon > 0$

постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ такво да чим је $n \geq n_0$ и $p \in \mathbb{N}$

важи $|a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon$. Специјално ако је

$$p=1 \quad |a_{n+1}| < \varepsilon \quad \text{за} \quad n \geq n_0 \quad \text{било} \quad a_n = 0, \quad (\text{нуло низ})$$

(што је само неопходно) $\rightarrow$ општи члан мора да бесни нули (да би ред био конвергентан)

- смислају се једнаковнији критеријуми који дају добрије услове

Пример 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ хармонички ред $\rightarrow$ јер ε може да нам буде било шта > 0

проблемо $\alpha \varepsilon < \frac{1}{2}$ а у својству p можемо да

узвемо било шта, узвемо $p = n$.

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \quad \text{то би морало да буде мање} \quad \varepsilon$$

$$\frac{n-1}{2n} < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} < \varepsilon$$

тако смо контрапример
- туђе испуњава основни Кошијев критеријум
⇒ хармонијски ред дивергира

Занимљивости - сличности са $\sum \frac{1}{n^p}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

општи хармонијски ред - поређење
има сврхе испитивања да ли конвергира или не)

Редови са позитивним члановима

Нека су дата два реда са позитивним члановима

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad (a_n > 0, b_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N})$$

- Ако је $a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ и ред $\sum b_n$ конвергира онда и ред $\sum a_n$ конвергира

- Ако је $a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ и ред $\sum a_n$ дивергира онда и ред $\sum b_n$ дивергира

Доказ: довољно је доказати прво исрџење, друго је контрадикција.

$$b_n' = \sum_{k=1}^n b_k$$

$$b_n' = \sum_{k=1}^n a_k$$

$$\Rightarrow b_n' \leq b_n'' \leq c_0 \quad \forall n$$

$$b_n' \leq c_0 \quad \forall n$$

(серија монотонна

и

ограничена

па

је конвергентна)

b_n' (редови са позитивним члановима) је ранији а одозго ограничена

(Поређење према односу поређења критеријум) (7)

Пример

1) Испитати конвергенцију датог реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + \sin(\pi n!)}$$

$$2^n + \sin(\pi n!) \geq 2^n - 1 \geq 2^{n-1}$$

$$\frac{1}{2^n + \sin(\pi n!)} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\sum \frac{1}{2^{n-1}} \text{ конвергентан}$$

* Асимптотска вредности поређеног шесита

а тим да га поређуемо

Синоб: T Нека су редови $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ са позитивним члановима и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L$ $0 < L < +\infty$. Тада су редови

$\sum a_n$, $\sum b_n$ једнобремено конвергентни или дивергентни.

Еквивалентни! (један шет-мин)

Доказ: изаберемо $0 < \varepsilon < L$.

из дефиниције пратите бредности

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L \text{ следи да за } n \geq n_0 \text{ важи } \left| \frac{a_n}{b_n} - L \right| < \varepsilon$$

$$\text{односно } L - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < L + \varepsilon \text{ за } n \geq n_0$$

$$(L - \varepsilon)b_n < a_n < (L + \varepsilon)b_n$$

Применимо мајорантантну поређени критеријум
дивергенцијос

конвергентност

Лемма Т. Лемма Ламберта критерий

* все се односи само
до резултата
са позитивним
члановима

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ са позитивним члановима и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda$

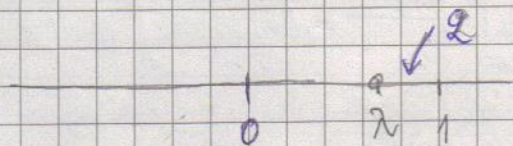
Ако је $\lambda < 1$ ред $\sum a_n$ конвергира

- II - $\lambda > 1$ - II - дивергира

- II - $\lambda = 1$ нема одлуке (по другом тесту)

(Предност је јер користи само оштри члан)

Доказ :



$\lambda < 1$ одaberимо број q тако да је $\lambda < q < 1$

премислимо $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda$

$\Downarrow$ прати дефиницију граничне вредности

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - \lambda \right| < \varepsilon)$

изaberимо погодни ε $\varepsilon = q - \lambda$ (успавати $\neq \varepsilon$)
на то изабравши имамо одговорите

$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - \lambda \right| < q - \lambda$ за $n \geq n_0$

$\lambda - q < \frac{a_{n+1}}{a_n} - \lambda < q - \lambda$ за $n \geq n_0$

није нам потребно

$\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < q$

Закључавамо

$a_{n_0+k} < q^k a_{n_0}$

$k = 0, 1, 2, \dots$

$a_{n_0+1} < q a_{n_0}$

$a_{n_0+2} < q a_{n_0+1} < q \cdot q a_{n_0} = q^2 a_{n_0}$

$a_{n_0+3} < q a_{n_0+2} < q^3 a_{n_0}$

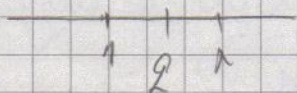
(9)

Посматрамо ред $\sum_{k=0}^{\infty} a_{n+k}$ - ред је конвергентан

је $\sum q^k$ конвергентан ($q < 1$)

Наш ред се разликује од претходног (потешног)
 само у првих N_0 чланова по је и сам конвергентан.
 (констан број чланова реда)

$$\lambda > 1$$



$$1 < q < \lambda$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda$$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - \lambda \right| < \varepsilon \quad \text{за } n \geq n_0$$

$$\varepsilon = \lambda - q$$

$$\left| q - \lambda < \frac{a_{n+1}}{a_n} - \lambda \right| < \lambda - q \quad \text{за } n \geq n_0$$

како нам бити

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > q \quad \text{за } n \geq n_0$$

$$a_{n+1} > q a_n > a_n \quad \text{за } n \geq n_0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{n+k}$$

$\Rightarrow$ остали члан реда не иду ни каде

има растуће чланове па ред дивергира.

$$a_0 \neq 0$$

Он решава питање конвергенције тих редова али
 онекога закључе.

T (Ковијев критеријум)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad (a_n > 0)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda$$

$\lambda < 1$ ред $\sum a_n$ конвертира

$\lambda > 1$ - " - дивертира

$\lambda = 1$ нема одлуке

▽ (своди се на Крајховић)

Доказ: $\lambda < 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda$$

$$0 < \lambda < 1$$

$$\lambda < \rho < 1$$

$$|\sqrt[n]{a_n} - \lambda| < \varepsilon \quad \text{за } n \geq n_0$$

$$\varepsilon = \rho - \lambda$$

$$\lambda - \rho < \sqrt[n]{a_n} - \lambda < \rho - \lambda \quad \text{за } n \geq n_0$$

$$\sqrt[n]{a_n} < \rho$$

$a_n < \rho^n$ за $n \geq n_0$ и применом поредбеног

принципа ▽

Када је због критеријума који има

$\frac{a_{n+1}}{a_n}$ - тест факторизације, производ - декамберов

a_n за сличне - Ковијев због јуровића

због ефикасности

T (Ковијев критеријум кондензације)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad a_n > 0$$

$$a_n > a_{n+1} \quad (\text{одређујући})$$

што се може
ублажити
 $\forall n \in \mathbb{N}$
 $n \geq n_1$

Јако су редови $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ еквивалентни.

може се ублажити = постоји од неког
места ▽ (Доказ је чини)
(одређено исто парче)

Доказ: очекујемо парнијанту групу

$$a_3 + a_4 < 2a_2$$

$$a_5 + a_6 + a_7 + a_8 < 4a_4$$

$$a_9 + \dots + a_{16} < 8a_8$$

$$a_{2^{n-1}+1} + \dots + a_{2^n} < 2^{n-1} a_{2^{n-1}}$$

$$\sum_{k=3}^{2^n} a_k < \sum_{v=1}^{n-1} 2^v a_{2^v}$$

Нека пог $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ конвергуира $\Rightarrow \exists c < \infty$

тако да $\sum_{v=1}^{n-1} 2^v a_{2^v} < c \quad \forall n$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n a_k \text{ је ограничени}$$

$\Rightarrow$ конвергуира

(додали смо само на c и a_{2^n} доприноси
лимо c')

кориснијом само конитро тежестима

$$a_3 + a_4 > 2a_2 = 2a_{2^1}$$

$$a_5 + \dots + a_8 > 4a_4 = 2^2 a_{2^2}$$

⋮

$$a_{2^{n-1}+1} + \dots + a_{2^n} > 2^{n-1} a_{2^{n-1}}$$

$$\sum_{k=3}^{2^n} a_k > \frac{1}{2} \sum_{v=2}^{n-1} 2^v a_{2^v}$$

(слично се теореме
о два полицијала)

Претпоставка је сада да дивергуира

$$\Rightarrow \sum_{k=3}^{2^n} a_k \rightarrow \infty \text{ односно дивергуира}$$

Пример 1) уопштење конвергенција хармоничког

реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, p \in \mathbb{R}$$

За $p \leq 0$ ред дивергира јер његови чланови не
иђу нули.

За $p > 0$ $\frac{1}{n^p}$ је монотонно опадајући, па по

критеријуму кондензације ред је еквивалентан

$$\text{реду } \sum 2^n \frac{1}{(2^n)^p} = \sum \left(\frac{1}{2^{p-1}} \right)^n$$

конвергира

$$\frac{2^n}{(2^n)^p} = \frac{2^n}{2^{np}} = \left(\frac{1}{2^{p-1}} \right)^n$$

ОБЛИК
ГЕОМЕТРИЈСКОГ
РЕДА

$$\frac{1}{2^{p-1}} < 1$$

дивергира $\frac{1}{2^{p-1}} \geq 1$

Ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ конвергира ако $p > 1$.

$p-1 \leq 0$
 $p \leq 1$ } диверг.

Т (Кошијев интегрални тест)

Нека је f опадајућа функција, $f(x) > 0$ на $(1, \infty)$ и да
ред $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ конвергира ако $\int_1^{\infty} f(x) dx$ конвергира.

пример оп. дивергенције:

$$f(x) = \frac{1}{x^p}$$

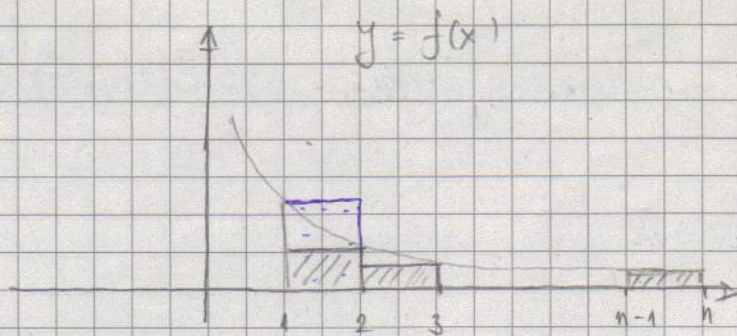
$p > 0$

- овај интеграл ће да конвергира
само за $p > 1$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{x^{1-p}}{1-p} \Big|_1^{\infty} = \frac{1}{1-p}$$

(по формули Лагранжовој
формули)

Доказ:



$$\left. \begin{aligned} f(1) &< \int_1^2 f(x) dx \\ f(2) &< \int_2^3 f(x) dx \\ &\vdots \\ f(n) &< \int_{n-1}^n f(x) dx \end{aligned} \right\} (+)$$

$$\sum_{k=2}^n f(k) < \int_1^n f(x) dx$$

ако $\int_1^n f(x) dx$ конвергуира
онда и $\sum_{k=2}^n f(k)$ конвергуира

$$\left. \begin{aligned} f(1) &> \int_1^2 f(x) dx \\ f(2) &> \int_2^3 f(x) dx \\ &\vdots \\ f(n) &> \int_n^{n+1} f(x) dx \end{aligned} \right\} (+)$$

$$\sum_{k=1}^n f(k) > \int_1^{n+1} f(x) dx$$

ако $\int_1^{n+1} f(x) dx$ дивергуира
онда $\sum_{k=1}^n f(k)$ дивергуира

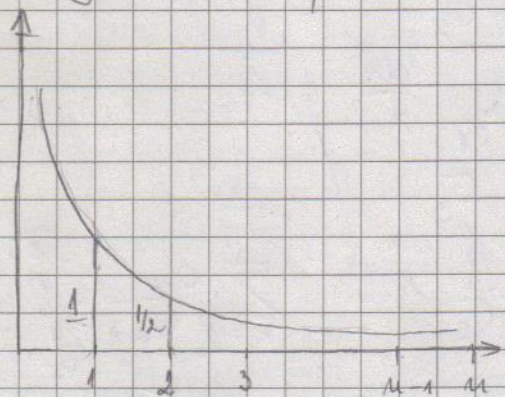
$f \in \mathbb{R}$ (Риман-интегрируема) преку што критериум

Пример 1) покажем что $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ дивергирует

* 5.10.2011. Занятие

даже до предельного $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

какую функцию использовать



$y = 1/x$

$$1 > \int_1^2 \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2} > \int_2^3 \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{n-1} > \int_{n-1}^n \frac{dx}{x}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} > \int_1^n \frac{dx}{x} = \ln n$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} > \ln n + \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{2} < \int_1^2 \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{3} < \int_2^3 \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{n} < \int_{n-1}^n \frac{dx}{x}$$

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} < \int_1^n \frac{dx}{x} = \ln n$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} < \ln n + 1$$

получено из
каждого
интегрального
неравенства

$$\left[\ln n + \frac{1}{n} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq \ln n + 1 \right]$$

Процесса koja с konvergen

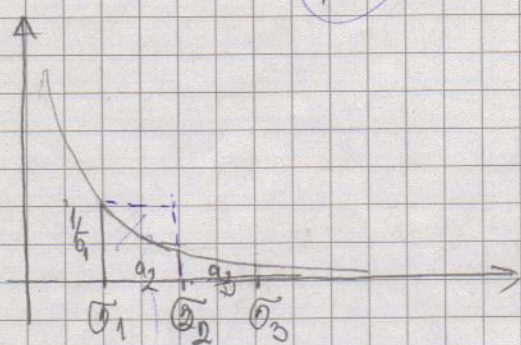
$$0 < \frac{1}{n} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \leq 1$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + A_n$$

A_n je ogranichen

2) Нека је $\sum a_n$ ред са позитивним члановима, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ дивергентан ред и $b_n = \sum_{k=1}^n a_k$. Тада је ред $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{b_{n-1}}$ дивергентан.
(Не постоји најјачи критеријум дивергенције ред са позитивним члановима)

Доказ:



$$\begin{aligned} \frac{a_2}{b_1} &> \int_{b_1}^{b_2} \frac{dx}{x} \\ \frac{a_3}{b_2} &> \int_{b_2}^{b_3} \frac{dx}{x} \\ &\vdots \\ \frac{a_n}{b_{n-1}} &> \int_{b_{n-1}}^{b_n} \frac{dx}{x} = \ln b_n - \ln b_{n-1} \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{k=2}^n \frac{a_k}{b_{k-1}} &> \int_{b_1}^{b_n} \frac{dx}{x} \\ &= \ln b_n - \ln b_1 \\ &\rightarrow +\infty \end{aligned} \right.$$

Базимо се само редовима који су чланови позитивни
-профилење Ламбертовог теста

Т (Рабоов критеријум) (како захтевати за доказивање)

$\sum a_n$ ред са позитивним члановима

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lambda$$

а) Ако је $\lambda > 1$ ред $\sum a_n$ је конвергентан

б) Ако је $\lambda < 1$ ред $\sum a_n$ је дивергентан.

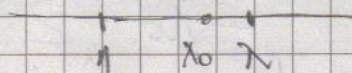
Доказ

Ватни

$$x \geq \ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2} \quad x \geq 0$$

$$\begin{aligned} \varphi' &= \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{1+x} \geq 0 \quad x \geq 0 \\ \varphi(x) &= \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \\ \varphi(0) &= 0 \Rightarrow \varphi(x) \geq 0 \quad \text{за } x \geq 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lambda > 1$$



существование некоего λ_0 таково, что $1 < \lambda_0 < \lambda$

$$\exists n_0 : n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) > \lambda_0 \quad \forall n \geq n_0$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} > 1 + \frac{\lambda_0}{n}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{1}{1 + \frac{\lambda_0}{n}} \quad \text{for } n \geq n_0$$

$$\prod_{k=n_0}^n \frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \prod_{k=n_0}^n \frac{1}{1 + \frac{\lambda_0}{k}}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_{n_0}} \leq \prod_{k=n_0}^n \frac{1}{1 + \frac{\lambda_0}{k}} \quad n \geq n_0$$

$$\ln \frac{a_{n+1}}{a_{n_0}} \leq \sum_{k=n_0}^n \ln \left(1 + \frac{\lambda_0}{k} \right)$$

$$\leq \sum_{k=n_0}^n \left(-\frac{\lambda_0}{k} + \frac{1}{2} \frac{\lambda_0^2}{k^2} \right) =$$

а из ***

$$\ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}$$

$$= -\lambda_0 \sum_{k=n_0}^n \frac{1}{k} + \frac{\lambda_0^2}{2} \sum_{k=n_0}^n \frac{1}{k^2}$$

$$-\ln(1+x) \leq -x + \frac{x^2}{2}$$

ограничено

$$= -\lambda_0 \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n_0-1} \frac{1}{k} \right) + \frac{\lambda_0^2}{2} \sum_{k=n_0}^n \frac{1}{k^2}$$

Заключим что следует

$$\ln \frac{a_{n+1}}{a_{n_0}} \leq -\lambda_0 \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n_0-1} \frac{1}{k} \right) + \lambda_0 \sum_{k=1}^{n_0-1} \frac{1}{k} + \frac{\lambda_0^2}{2} \sum_{k=n_0}^n \frac{1}{k^2}$$

(17)

$$\leq \ln n^{-\lambda_0} - \lambda_0 \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) + \lambda_0 \sum_{k=1}^{n_0-1} \frac{1}{k} + \frac{\lambda_0^2}{2} \sum_{k=n_0}^n \frac{1}{k^2} \quad \ln$$

||
 C_n

$$|C_n| \leq C_0 < +\infty \quad \forall n$$

обратимся к нему

$$\ln \frac{a_{n+1}}{a_{n_0}} \leq C_n + \ln n^{-\lambda_0}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_{n_0}} \leq e^{C_n} \cdot \frac{1}{n^{\lambda_0}} \leq e^{C_0} / n^{\lambda_0} \quad \text{за } n \geq n_0$$

$$a_{n+1} \leq a_{n_0} e^{C_0} \cdot \frac{1}{n^{\lambda_0}} \quad \lambda_0 > 1$$

$n \geq n_0 \rightarrow$ конвергентный

Пока предположим, что $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ не будет конвергентным
дифференциал

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lambda < 1$$

$$\frac{1}{n^{\lambda_0}} \quad 1$$

Будем по тому же

$$n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) < \lambda_0 \quad \text{за } n \geq n_0$$

$$\lambda < \lambda_0 < 1$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 < \frac{\lambda_0}{n}$$

$$\prod_{k=n_0}^n \frac{a_{k+1}}{a_k} > \prod_{k=n_0}^n \frac{1}{1 + \frac{\lambda_0}{k}}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{1}{1 + \frac{\lambda_0}{n}}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_{n_0}} > \prod_{k=n_0}^n \frac{1}{1 + \frac{\lambda_0}{k}} \quad \text{за } n \geq n_0$$

(*)

$$\ln \frac{a_{n+1}}{a_{n_0}} > - \sum_{k=n_0}^n \ln \left(1 + \frac{\lambda_0}{k}\right) \geq - \lambda_0 \sum_{k=n_0}^n \frac{1}{k}$$

$$\ln(1+x) \leq x$$

$$= -\lambda_0 \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n_0-1} \frac{1}{k} \right) = -\ln(1+x) \geq -x$$

$$= \lambda_0 \sum_{k=1}^{n_0-1} \frac{1}{k} - \lambda_0 \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n + \ln n \right) =$$

$$= \lambda_0 \sum_{k=1}^{n_0-1} \frac{1}{k} - \lambda_0 \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) + \ln n^{-\lambda_0}$$

$$\underbrace{\hspace{15em}}_{D_n}$$

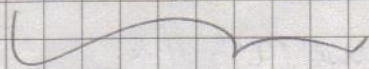
D_n је ограничен израз

$$|D_n| \leq L \quad \forall n$$

$$\ln \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq D_n + \ln n^{-\lambda_0}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_{n_0}} \geq e^{D_n} \cdot \frac{1}{n^{\lambda_0}} \geq e^{-L} \cdot \frac{1}{n^{\lambda_0}} \quad \text{ограничено}$$

$$a_{n+1} > \underbrace{a_{n_0} e^{-L}}_{\text{const.}} \cdot \frac{1}{n^{\lambda_0}} \quad \text{за } n \geq n_0$$



губернатура

која је ова

пациент који је упућен

говори се о асимптотици за $\lambda = 1$ (Бакелз 3))

зашто постоји Јеусов критеријум

T (Гаусов критеријум) - усавршетак Рабеног

$$\sum a_n, a_n > 0 \text{ и } \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^2} \quad |\theta_n| \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ако је $\lambda > 1$ ред $\sum a_n$ конвертира

Ако је $\lambda < 1$ ред $\sum a_n$ дивертира

Ако је $\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^2}$ тада

ако је $\mu > 1$ ред конвертира

ако је $\mu < 1$ ред дивертира.

* Ако је $\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{\theta_n}{n^2}$ тада

ред дивертира.

Доказ: Дискусија по λ је Ламбертов тест

Пређемо на $\lambda = 1$

$$\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \cdot n = \mu + \frac{\theta_n}{n}$$

Дискусија по μ се своди на Рабенов тест!

⊛ једина занимљива ситуација

Гаусов тест обухвата све тестове у себи.

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{\theta_n}{n^2}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n} + \frac{\theta_n}{n^2}}$$

када је довољно велико n

$$\ln \frac{a_{n+1}}{a_n} = -\ln \left(1 + \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{\theta_n}{n^2}}_x \right) = \text{за } n \geq n_0 \text{ ага користи́мо развој}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$= -\left(\frac{1}{n} + \frac{\theta_n}{n^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + \frac{\theta_n}{n^2} \right)^2 + \dots \right)$$

$$= -\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = e^{-1/n + O(1/n^2)}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = e^{-\frac{1}{n} + \frac{F_n}{n^2}}$$

$$|F_n| \leq L_2 < \infty$$

$\forall n$

$$\prod_{k=1}^n \frac{a_{k+1}}{a_k} = e^{-\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}} e^{\sum_{k=1}^n \frac{F_k}{k^2}} \geq C e^{-\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n + \ln n\right)} =$$

$$= C e^{-\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n\right)} \cdot \frac{1}{n} \quad \rightarrow \text{с готве сироме ограничено}$$

не збоји од n

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq C_1' \cdot \frac{1}{n} \quad \text{ограничено}$$

$$|C_1'| \leq C_1 < \infty$$

$\forall n$

$$a_{n+1} \geq a_1 C_1' \cdot \frac{1}{n} \quad \sum$$

губертура

по поредбеном $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ губертура

(21)



Пример 1) Проверить конвексность $\sum$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^p$$

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$$

общий член ряда

$$a_n = \left(\frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \right)^p$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(\frac{\frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2}}{\frac{(2n+2)!}{2^{2n+2} ((n+1)!)^2}} \right)^p = \left(\frac{2^2 (n+1)^2}{2(n+1)(2n+1)} \right)^p =$$

$$= \left(\frac{2n+2}{2n+1} \right)^p$$

Деламбэров тест не применим, так как $\lambda = 1$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(\frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{2n}} \right)^p = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^p \cdot \left(1 + \frac{1}{2n} \right)^{-p}$$

используем биномиальный разложение

$$(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \dots \quad |x| < 1$$

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-n+1)}{n!}$$

покажем, что этот ряд
сходится

(22)

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(1 + \binom{p}{1} \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \left(1 + \binom{-p}{1} \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) =$$

$$= \left(1 + \frac{p}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \left(1 - \frac{p}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) =$$

$$= 1 + \frac{p}{n} - \frac{p}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{p}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\left. \begin{array}{ll} p/2 > 1 & \text{конвергентність} \\ p/2 \leq 1 & \text{дивергентність} \end{array} \right\} \begin{array}{l} p > 2 \\ p \leq 2 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{Таллов шест}$$

2) Найшвидше конвергентну ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$$

a_n - дроби цифра у десятком запису дроби n

$$a_n = 1 + [\log_{10} n]$$

$$\sum \frac{1}{\log_{10} n}$$

$$\frac{1}{\ln n}$$

$$\int \frac{dx}{\ln x} =$$

$$dv = dx \quad u = \frac{1}{\ln x}$$

$$v = x \quad du = \frac{-dx}{x \ln^2 x}$$

$$\sum \frac{1}{\ln n}$$

- дивергентна или по интегральному шесту
или по критерию Крайфельдта тангенсизм

Задачи за Веттис:

1. Найшвидше конвергентну ряд а) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos \frac{a}{n}\right)^{n^3} \quad a \in \mathbb{R}$

$$б) \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi \sqrt{n^2 + 1})$$

проверити

ошибка или не так?

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = -1 - \frac{1}{2n} \text{ дивергентна?}$$

23

Желено је имати критеријуме за редове који немају коначне
чланове!

обично имамо редове $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$

Лема ^{прво и водимо}: Трансформација Абела (формула бернхардтс
сумације)

$$S = \sum_{i=1}^m \alpha_i \beta_i \quad B_m = \beta_1 + \dots + \beta_m \quad m \geq 1$$

$$\Downarrow$$

$$\beta_m = B_m - B_{m-1}$$

што можемо да урадимо
са S

$$B_0 = 0 \quad (\text{дефинишемо})$$

$$S = \sum_{i=1}^m \alpha_i (B_i - B_{i-1}) =$$

$$\forall m = 1, 2, \dots$$

$$= \sum_{i=1}^m \alpha_i B_i - \sum_{i=1}^m \alpha_i B_{i-1} = \sum_{i=1}^m \alpha_i B_i - \sum_{i=2}^m \alpha_i B_{i-1}$$

$$\begin{aligned} i-1 &= j \\ j &\in \{1, \dots, m-1\} \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^m \alpha_i B_i - \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_{j+1} B_j =$$

$$= \sum_{i=1}^m \alpha_i B_i - \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_{i+1} B_i =$$

$$= \alpha_m B_m + \sum_{i=1}^{m-1} (\alpha_i - \alpha_{i+1}) B_i$$

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \beta_i = \alpha_m B_m + \sum_{i=1}^{m-1} (\alpha_i - \alpha_{i+1}) B_i$$

Абелов идентитет

Ако $\sum_{i=1}^{\infty} d_i$ је низ ди монотон

Лема: Ако $\sum_{i=1}^{\infty} d_i$ је расе (не оцрта) и $|B_m| \leq L = \text{const}$, $m=1,2,\dots$
тада $\left| \sum_{i=1}^m d_i B_i \right| \leq L (|d_m| + 2|d_1|)$

Доказ:

$$\left| \sum_{i=1}^m d_i B_i \right| = \left| d_m B_m + \sum_{i=1}^{m-1} (d_i - d_{i+1}) B_i \right| \leq |d_m| |B_m|$$

$$+ \sum_{i=1}^{m-1} |d_i - d_{i+1}| |B_i| \leq L |d_m| + L \sum_{i=1}^{m-1} |d_i - d_{i+1}|$$

$$\leq L |d_m| + L |d_m - d_1| \leq L (2|d_m| + |d_1|)$$

све је припремљено за доказе оба твeнa

- Редови са члановима променљивог знака -

Т (Абелов критеријум) Ако ред $\sum b_n$ конвертира и

(a_n) је монотон и ограничен тада $\sum a_n b_n$ конвертира.

Т (Дирихлеов критеријум) Ако је $\forall n \in \mathbb{N} \left| \sum_{k=1}^n b_k \right| \leq M$
и низ (a_n) монотонно тeтнe нули тада ред $\sum a_n b_n$
конвертира.

Дирихлеов $\Rightarrow$ Абелов

11.10.2011. година

$$S = \sum_{i=1}^m d_i \beta_i \quad \beta_m = \beta_1 + \dots + \beta_m$$

Лема: Ако је d_i монотон и $|\beta_m| \leq L \Rightarrow |S| \leq L(|d_1| + 2|d_m|)$

Абелов критеријум Ако је $\sum \beta_i$ конвергентан ред и

$(a_n)_{n=1}^{\infty}$ монотон и ограничен $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \beta_n$ конвергентан.

Дирхлеов критеријум Ако је $|\sum_{k=1}^n \beta_k| \leq M \forall n$, и $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ монотон
и $a_n \rightarrow 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \beta_n$ конвергентан.

* Доказ Абеловог критеријума:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k \beta_k \right| = \left| \sum_{i=1}^m a_{n+i} \beta_{n+i} \right|$$

$\forall n \geq n_0, \forall m \in \mathbb{N}$

Ред $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ је конвергентан $\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (n \geq n_0 \Rightarrow \sum_{i=1}^m \beta_{n+i} < \varepsilon)$ (примено Кошијевог критеријума)

(a_n) је монотон и ограничен $\Rightarrow \exists L_1 < \infty : |a_n| \leq L_1 \forall n$
и можемо применити лему (Абел) на ред $d_i = a_{n+i}$
и $\beta_i = \beta_{n+i}$.

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k \beta_k \right| = \left| \sum_{i=1}^m a_{n+i} \beta_{n+i} \right| = \left| \sum_{i=1}^m d_i \beta_i \right| < \varepsilon (|d_1| + 2|d_m|)$$

$$\begin{aligned} |\beta_1 + \dots + \beta_m| &= |\beta_{n+1} + \dots + \beta_{n+m}| < \varepsilon = \varepsilon (|a_{n+1}| + 2|a_{n+m}|) \\ &\leq \varepsilon \cdot 3L_1 \end{aligned}$$

За $n \geq n_0$

(директна последица леме о варијациој сумацији)

* Доказ дурхлеовог критеријума

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+m} b_k \right| = \left| \sum_{k=1}^{n+m} b_k - \sum_{k=1}^n b_k \right| \leq \left| \sum_{k=1}^{n+m} b_k \right| + \left| \sum_{k=1}^n b_k \right| \leq 2M$$

из чега $a_n \rightarrow 0 \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (n > n_0 \Rightarrow |a_n| < \varepsilon)$

Нека је $n \geq n_0$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k b_k \right| = \left| \sum_{i=1}^m \underbrace{a_{n+i}}_{\alpha_i} \underbrace{b_{n+i}}_{\beta_i} \right| \leq 2M(|\alpha_1| + 2|\alpha_{n+m}|)$$

примењујемо лему о парцијалној сумацији $< 2M \cdot 3\varepsilon = 6\varepsilon M$

$$b_m = b_1 + \dots + b_m$$

$$|b_n| |b_{n+1} + \dots + b_{n+m}| \leq 2M$$

Дурхлеов критеријум $\Rightarrow$ Абелов критеријум

Нека је $\sum b_n$ конвергентан и a_n монотон и ограничен $\Rightarrow \sum a_n b_n$ конвергентан

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ $(a_n - a)_n$ монотонно тежи 0

$$\sum (a_n - a + a) b_n = \sum (a_n - a) b_n + a \sum b_n \rightarrow \text{по редности}$$

↓
монотон
тежи 0

по Дурхлеовом критеријуму

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ конвергентан} \quad b_n = \sum_{i=1}^n a_i \rightarrow S \in \mathbb{R}$$

теж парцијална сума

$$R_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i = \text{остаток конвергентног реда}$$

$$S = b_n + R_n \rightarrow \text{конвергентан ред}$$

(27)

Скелујалат случај:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \quad a_n > 0$$

$$= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots \quad \text{Алтернативен ред}$$

$$b_n = (-1)^{n-1}$$

$$\left| \sum_{k=1}^n b_k \right| \leq 1 \quad \text{ојдгатува} \quad \text{Ако се доаѓа до аи монотонно}$$

и е 0 тогаш ред

$$\sum (-1)^{n-1} a_n \text{ конвертира (Дирихлеов критериум)}$$

Лагранжов критериум: Ако a_n монотонно одминува кон 0

и е скелујалат случај Дирихлеовог

$$0 \Rightarrow \sum (-1)^{n-1} a_n \text{ конвертира.}$$

Пример: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ конвертира (Лагранжов итн.)

$$\text{Нека имаме } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \quad a_n \downarrow 0$$

ојдгатува парцијална сума алтернативен ред

$$S_{2n} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + a_{2n-1} - a_{2n}$$

$$S_{2n} > 0$$

$$= a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \dots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n}$$



$$0 < S_{2n} < a_1$$

$$\text{како } n \rightarrow \infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} \leq a_1$$

како имаме алтернативен ред

тогаш ја добиваме сума монотонно

или једноста од прелог

членко.

(28)

$$|S| \leq a_1$$

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} a_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k = b_n + \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k$$

$$S - b_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k$$

$$|S - b_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k \right| \leq a_{n+1} \quad (\text{интерпретација}) \quad \text{когда}$$

сумму зометимо n -том порцијоном сумом зрешка коју
правимо место је или једноста првом трезном члану.

Бавимо се згачу променљивим члановима. $(n+1)$ -ви члан.

- Асоцијативно својство конвергентних редова

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ конвергентан} \quad b_n = \sum_{k=1}^n a_k \quad b_n \rightarrow S \in \mathbb{R} \quad n \rightarrow \infty$$

$$(a_1 + \dots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + \dots + a_{n_2}) + (a_{n_2+1} + \dots + a_{n_3})$$

b_1

b_2

b_3

због тога их групујемо

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \Rightarrow \text{конвергентан и за суму има исту вредност}$$

$$b_k^* = \sum_{v=1}^k b_v = b_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} S$$

(Бави један смер)

Зашто? - иста задатост

$$(1-1) + (1-1) + (1-1) + \dots$$

когда обрисамо заграда добијемо ред нуле
илили слат те шетни нули, то самим или
нује конвергентан!

Или ситуација когда можемо обрисати заграду!
(когда су у оквиру заграда сви чланови иста згача)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{и интермулациони услови} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$$

Абсолютно конвергентни редови

Ред $\sum a_n$ се назива абсолютно конвергентним ако конвертира
 $\text{ред } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Ако ред $\sum a_n$ абсолютно конвертира $\Rightarrow \sum a_n$ конвертира

$$\left| \sum_{k=m+1}^{m+n} a_k \right| \leq \sum_{k=m+1}^{m+n} |a_k| < \varepsilon \quad \text{за } n \geq n_0 \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

Лема Ако ред $\sum a_n$ абсолютно конвертира онда конвертира и
 $\text{ред } \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$ добијен из прелиходног произвољним пермулацио-
 нима и при томе има исту суму као полазни ред.

Доказ: 1° Нека је $a_n \geq 0$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвертира $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \in \mathbb{R}$

означимо $\sigma_k = \sum_{i=1}^k a_{n_i}$ - k -та пермулацио-
 нима суму пермулационог

$$\sigma_k = \sum_{i=1}^k a_{n_i} \leq \sum_{i=1}^{\max(n_1, \dots, n_k)} a_i \leq S$$

тј. пермулацио-
 нима суму од полазног реда

$$\sigma_k \leq S \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

све пермулацио-
 нима суму су ограничене
 и σ_k је монотонно растући $\Rightarrow$

(3)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_k = S^* \in \mathbb{R}$$

$$S^* \leq S \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$$

перепишем исходную формулу конвергенции

используем $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$ и перепишем у нас $\Rightarrow$

$$S \leq S^* \quad (2)$$

$$\text{из (1) и (2)} \Rightarrow \underline{S = S^*}$$

2° имеем $\sum a_n$ који абсолютно конвертируется и $\sum_1^{\infty} |a_n|$ конвертируется

$$a_n = \underbrace{\frac{|a_n| + a_n}{2}}_{a_n^+} - \underbrace{\frac{|a_n| - a_n}{2}}_{a_n^-}$$

a_n^+ - все положительные слагаемые

$$a_n^+ \geq 0$$

$$a_n^- \geq 0$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} \quad \sigma_k = \sum_{\nu=1}^k a_{n_{\nu}} = \sum_{\nu=1}^k a_{n_{\nu}}^+ - \sum_{\nu=1}^k a_{n_{\nu}}^-$$

$$0 \leq a_n^+ = \frac{|a_n| + a_n}{2}$$

$$0 \leq a_n^+ \leq |a_n|$$

$$0 \leq a_n^- \leq |a_n|$$

так как $\sum |a_n|$ конвертируется $\Rightarrow$

$\sum a_n^+$ и $\sum a_n^-$ конвертируются

$$\Rightarrow \exists \lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{\nu=1}^k a_{n_{\nu}}^+ - \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{\nu=1}^k a_{n_{\nu}}^- =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{n_{\nu}}^+ - \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{n_{\nu}}^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(a_n^+ - a_n^-)}_{a_n} = \sum a_n$$

Пример $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots$

по Лагранжовом
критеријуму
конвергенције

$$\sum (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = S$$

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots \\ &= \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots) = \frac{S}{2} \end{aligned}$$

у другом случају потпуно конвергентниот редоследно конвергира.
Метод конвергенције

Лем. Ред $\sum a_n$ је апсолутно конвергентан ако $\sum |a_n|$ конвергира.
а ред $\sum |a_n|$ дивергира.

Т (Риман) Ако ред $\sum a_n$ апсолутно конвергира
тада $\forall A \in \mathbb{R}$ постои пермутација членова реда тако
да ред $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$ конвергира ка A (ако је $A \in \mathbb{R}$) или
дивергира према $+\infty$ ($-\infty$) ако је $A = +\infty$ ($A = -\infty$).
* како апроксимирати $n!$?

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} e^{\theta_n/12n}$$

$$0 < \theta_n < 1$$

асимптотички

Стирлингова
формула

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

$$n \rightarrow +\infty$$

Може се се пренесе у целу $\mathbb{C}$ работ осим у негацивни цели
бројеви и нули.

Значит

$$\begin{aligned}
 1^* \quad \sum \sin(\pi \sqrt{n^2+1}) &= \sin(\pi \sqrt{n^2+1} - \pi n + \pi n) = \\
 &= \sin(\pi \sqrt{n^2+1} - n) (-1)^n = (-1)^n \sin \pi (\sqrt{n^2+1} - n) \\
 &= (-1)^n \sin \frac{\pi}{n + \sqrt{n^2+1}} \quad \text{— можно использовать, (алгоритмы/} \\
 &\quad \text{логические критерии)}
 \end{aligned}$$

$$2^* \quad \sqrt[n]{a_n} = \left(\cos \frac{a}{n} \right)^{n^2} = e^{n^2 \ln \left(\cos \frac{a}{n} \right)} \quad a \neq 0$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \ln \cos \frac{a}{n}} = e^{a^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{a} \right)^2 \ln \cos \frac{a}{n}} \\
 \frac{a}{n} &= x
 \end{aligned}$$

$$= \left| e^{-\frac{a^2}{2}} \right| < 1$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos x} (-\sin x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{2 \cos x} \cdot \frac{\sin x}{x} \\
 &= -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

контрапункт

критерии

12.10.2011. Руман теорема: Ако ред $\sum a_n$ неапсолутно конвертира тога
 $\forall A \in \mathbb{R}$ постоји ордунација члана ред тако да ред $\sum a_{n_k}$ конвертира ка A
 $(A \in \mathbb{R})$ или конвертира у бесконачност ако је $A = \pm \infty$
 Доказ Руман:

$\sum a_n$ конвертира $\Leftrightarrow \sum |a_n|$ конвертира ($\sum |a_n| = +\infty$)

$$a_n = \underbrace{|a_n| + a_n}_2 = a_n^+ \quad - \quad \underbrace{|a_n| - a_n}_2 = a_n^- \quad a_n^+ \geq 0 \quad a_n^- \geq 0$$

$$\sum a_n^+ \quad \sum a_n^-$$

$2a_n^+ = |a_n| + a_n$ - ред са негеометричним члановима - конвертира (зашто
 што $2a_n^+ - a_n = |a_n|$) (до је a_n^+ конв и $2a_n^+$ би конв а
 a_n по теор. конв. $\Rightarrow |a_n|$ конв, а, конвертира)

Уредимо $\sum a_n^+$ и $\sum a_n^-$ су распоређени са одговарајућим односом
 негеометричних чланова ред $\sum a_n$ (међу њима a_n^+ или и нула које
 не утичу на конвергенцију). Односимо са $p_1, p_2, \dots$ одговарајуће елементе
 ред $\sum a_n$ а са $-q_1, -q_2, \dots$ негеометрич. Сад се питамо какви су
 редови $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ (конвергенцију) $\Rightarrow$ што значи да су суме
 илих редови $+\infty$) ($\sum |a_n| = +\infty$). Тако је A неки реалан број

A

$p_1 + p_2 + \dots + p_{n_1} > A$ и је најмање да се једи да сума p -ова премоши A
 догађамо q да се обраћамо на суму мању од A

$(p_1 + p_2 + \dots + p_{n_1}) + (-q_1 - q_2 - \dots - q_{m_1}) < A$ и, је најмање
 да се оно једи

Покажимо контрадикцију

$$(p_1 + \dots + p_{n_1}) + (-q_1 - q_2 - \dots - q_{m_1}) + (p_{n_1+1} + \dots + p_{n_2}) > A$$

$$(p_1 + \dots + p_{n_1}) + (-q_1 - q_2 - \dots - q_{m_1}) + (p_{n_1+1} + \dots + p_{n_2})$$

$$+ (-q_{m_1+1} - \dots - q_{m_2}) < A$$

Претпоставимо да ред конвертира броју A

$$|p_1 + \dots + p_{n_1} - A| < p_{n_1}$$

$$|(p_1 + \dots + p_{n_1}) + (-q_1 - \dots - q_{m_1}) - A| < q_{m_1}$$

$$(p_1 + \dots + p_n) + (-z_1 - \dots - z_n) + p_{n+1} + \dots + p_{n_2} - A < p_{n_2}$$

Паричјалне суме се израчунају са p_n и z_n , а што су позитивни чланови редова $\sum p_n$ и $\sum z_n$ и сви $p_n \rightarrow 0$ и $z_n \rightarrow 0$

Потребно је употребити закрпе (које се употребљавају јер су унапред евидентне из овог збога) и добијемо ред наших серијализација чланова почетног реда који конвергира.

* Функционални редови

$$\Omega \subset \mathbb{R}(\mathbb{R}^n) \quad f_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

Ред облика $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ $x \in \Omega$ назива се функционалним редом.

Како се до ред $\sum f_n(x)$ конвергира у тачки $x = x_0$ у Ω ако је конвергентан нумерички ред $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$

Означимо са D скуп свих тачака у Ω таквих да ред $\sum f_n(x)$ конвергира.

D је област конвергенције реда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ $D \subset \Omega$

Пример: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n e^{nx}$

Улогу f_n играју ϕ -је $f_n(x) = (-1)^{n-1} n e^{nx}$ $\Omega = \mathbb{R}$ (улогу Ω игра реална оса)

- је које вредности x ред конвергира

За $x = 0$ сваки члан је једнак нули - ред конвергира

За $x > 0$ $|(-1)^{n-1} n e^{nx}| = n e^{nx} \neq 0$ - ред конвергира

ред конвергира за $x > 0$

$x < 0$ (ако апсолутно конвергира $\Rightarrow$ ред конвергира)

$$\sum n e^{nx} - \text{како је коректно} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n e^{nx}} = e^x \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = e^x < 1$$

$$D = (-\infty, 0)$$

Јер је $x < 0$

Нека је $D \subset \mathbb{R}(\mathbb{R}^n)$ и $f_n: D \rightarrow \mathbb{R}$ и нека ред $\sum f_n(x)$ конвергира $\forall x \in D$ Означимо

са $S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$ S_n је n -та парич. сума реда $\sum f_k(x)$. Такође смо рекли

да ред конвергира, $S(x)$ је сума реда и гр. брз. функција скуп. суме $S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$

и означава са $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)$ и то је n -та остатак који такође конвергира.

$$S(x) = S_n(x) + R_n(x)$$

Уједињена конвергенција

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall x \in D) (n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x)| < \varepsilon)$$

Пример:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n + \sqrt{1-x^2}}$$

$-1 \leq x \leq 1$ (где бы $\sqrt{1-x^2}$ было определено)

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k + \sqrt{1-x^2}}$$

— это же ряд алтернующий

погр

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{n+1 + \sqrt{1-x^2}} \leq \frac{1}{n+1} < \varepsilon$$

$$n+1 > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$$

Ако је $n \geq n_0 = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil \Rightarrow$
 $|R_n(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [-1, 1]$

$$n_0 = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$$

ни на какав начин не зависи
 од x

$\Rightarrow$ равномерно конвергује

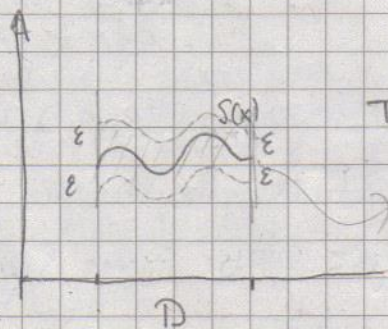
$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

$$S(x) - S_n(x) = R_n(x)$$

$$S_n(x) = \sum_{n=1}^n f_n(x)$$

$\sum f_n(x)$ равномерно конвергује

на D ако $(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 = n_0(\varepsilon)) (\forall x \in D) (n \geq n_0 \Rightarrow |S(x) - S_n(x)| < \varepsilon)$



Трансакција за ε

да мање погрешке од некоје
 се налазе у даној тиражи

Лема (Кашевејев критеријум) : Нека ред $\sum f_k(x)$ конвертира на $D \subset \mathbb{R}$.

Тод је ред $\sum f_k(x)$ равномерно конвергентан ако и само ако

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 = n_0(\varepsilon)) (\forall x \in D) (\forall m \in \mathbb{N}) (n \geq n_0 \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{n+m} f_k(x) \right| < \varepsilon)$$

ово је еквивалентно дефиницији рав. конвергенције

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 = n_0(\varepsilon)) (\forall x \in D) (n \geq n_0 \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| < \varepsilon)$$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| < \varepsilon \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| < \varepsilon$$

! Тора је са $f_k(x)$
тора немо да се
запамте!

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+m} f_k(x) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) - \sum_{k=n+m+1}^{\infty} f_k(x) \right| \leq 2\varepsilon \text{ за } n \geq n_0 \text{ и } m, \forall x \in D$$

-формулира се ајорациони критеријум

Лема (Вајерштраусов критеријум равномерне конвергенције)

Нека ред $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ конвертира $\forall x \in D$. Ако постоји $M > 0$

$$|f_n(x)| \leq M \quad \forall x \in D, \forall n \in \mathbb{N} \text{ и ако је ред } \sum_{n=1}^{\infty} M \text{ конвергентан}$$

тод је ред $\sum f_n(x)$ равномерно конвергентан на D .

Доказ: $\left| \sum_{k=n+1}^{n+m} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+m} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+m} M < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0(\varepsilon), \forall m \in \mathbb{N}$

$\forall x \in D$

јер и
при овом
губи
погрешки

Задис Кашевејев
је редов

Пример:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} \quad \left| \frac{\cos nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2} \quad \forall x$$

$$\text{ред } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ је конвергентан } \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} \text{ равномерно конвертира на } \mathbb{R}$$

Особине равномерно конвергентних редова

Лема 1: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ равномерно конвергентно на D и $g: D \rightarrow \mathbb{R}$,

$|g(x)| \leq c < +\infty \quad \forall x \in D$. Тодо ред $\sum_{n=1}^{\infty} g f_n(x)$ равномерно

конвергентно на D .

Доказ:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+m} g f_k \right| = |g| \left| \sum_{k=n+1}^{n+m} f_k(x) \right| \leq c \left| \sum_{k=n+1}^{n+m} f_k(x) \right| < c \cdot \frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon$$

$(\forall x \in D, \forall n \geq n_0, \forall m \in \mathbb{N})$
Бити постоји непозитивна функција

$\varepsilon > 0$

$\exists n_0 = n_0(\varepsilon) \quad \forall x \in D, \forall m \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0$ тако да $\left| \sum_{k=n+1}^{n+m} f_k(x) \right| < \frac{\varepsilon}{c}$

Лема 2: Нека су $f_n \in C[a, b]$ и ред $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ равномерно конвергентно на $[a, b]$. Тодо је збир ред $S(x)$ ($S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$) је непрекидна ф-ја на $[a, b]$.

Пример 3/

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \quad f_0(x) = 1$$

$$f_n(x) = x^n - x^{n-1}$$

и нека се све дејавља на интервалу $[0, 1]$

$$S_n(x) = f_0 + \sum_{k=1}^n f_k(x) = 1 + \sum_{k=1}^n (x^k - x^{k-1}) = x^n$$

$$x^1 - 1 + x^2 - x$$

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \text{није} \\ \text{непрекидно} \end{array} \right\}$$

Премајемо ефект:

Очигледно овај ред није равномерно конвергентан!
Заједно с овом ф-јом сагледава непрекидност

18.10.2011.

Доказ - сума :

Означимо са $S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$
и-бу ограничени
суму

из теореме се следи $\sum f_k(x)$
равномерно конвергира на $[a, b]$ следи

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 = n_0(\varepsilon)) (\forall x \in [a, b]) (n \geq n_0 \rightarrow |f(x) - S_n(x)| < \varepsilon/3)$$

ако ховемо
го
сумирано

узмемо $x_0 \in [a, b]$

- покажимо да једну конкретну одителу иде за све $n \geq n_0$
ми знамо

$$|f(x) - S_{n_0}(x)| < \varepsilon/3 \quad \forall x \in [a, b]$$

адајемо $|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - S_{n_0}(x) + S_{n_0}(x) - f(x_0)| \leq$

$$\leq |f(x) - S_{n_0}(x)| + |S_{n_0}(x) - f(x_0)| < \varepsilon/3 + |S_{n_0}(x) - f(x_0)|$$

$$S_{n_0}(x) = \sum_{k=1}^{n_0} f_k(x)$$

↓
непреродно на $[a, b]$

количина сума од конкретне f -ја

$$\Rightarrow |S_{n_0}(x) - S_{n_0}(x_0)| < \varepsilon/3$$

ако је $|x - x_0| < \delta$
 $x \in [a, b]$

$$= \varepsilon/3 + |S_{n_0}(x) - S_{n_0}(x_0) + S_{n_0}(x_0) - f(x_0)| <$$

$$< \varepsilon/3 + |S_{n_0}(x) - S_{n_0}(x_0)| + |S_{n_0}(x_0) - f(x_0)| < \frac{2}{3}\varepsilon + \underline{|S_{n_0}(x) - S_{n_0}(x_0)|}$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{ако је } x \in [a, b] \text{ и } |x - x_0| < \delta$$

да одређује у одителу
на ε .

$$\underline{|S(x_0) = f(x_0)|}$$

одређује непрекиднос-
 f -је f у тачки x_0 .

Пример

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$$

→ Вейерштрассова функција
 $0 < a < 1$, b нечетан број
 $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$

Хајде да оценимо општи члан

$$|a^n \cos(b^n \pi x)| \leq a^n \quad \sum a^n \text{ конвертира}$$

- конвертира апсолутно и униформно
- сума реда је непрекиднa ф-ја
- нема извод ни у једној тачки
- међу свим функцијама реалне су оне које имају извод бар у једној тачки
- диференцибилне ф-је су патолошке

Сваб: Ако је $f_n \in C[a, b]$ и ред $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ конвертира равномерно на $[a, b]$, онда је $\int_a^b (\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx$.

(Може се интегралити члан по члану)

Доказ: $S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x) \quad f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$

Из теореме да $\sum f_n(x)$ равномерно конвертира следи:

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 = n_0(\varepsilon)) (\forall x \in [a, b]) (n \geq n_0 \Rightarrow |f(x) - S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a})$$

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b S_n(x) dx \right| &= \left| \int_a^b (f - S_n) dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - S_n(x)| dx < \\ < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} dx = \varepsilon \quad \text{за } n \geq n_0 \end{aligned}$$

Затоли ека је $\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b S_n(x) dx \right| < \varepsilon$ за $n \geq n_0$

(10) $\left| \int_a^b \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right) dx - \sum_{k=1}^n \int_a^b f_k(x) dx \right| < \varepsilon$ за $n \geq n_0 \Rightarrow$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_0^b f_k dx = \int_a^b f dx$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^b f_k dx = \int_0^b f dx$$

$$\text{огласно } \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k dx = \int_a^b \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right) dx$$

Пример: $\sum_{n=1}^{\infty} (2x n^2 e^{-n^2 x^2} - 2x (n-1)^2 e^{-(n-1)^2 x^2})$

$$G_n(x) = \sum_{k=1}^n (2x k^2 e^{-k^2 x^2} - 2x (k-1)^2 e^{-(k-1)^2 x^2}) =$$

$$= 2x n^2 e^{-n^2 x^2}$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

на $[0,1]$

то ченот од
антими
плесано
интеграл

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_n(x) = f(x) \equiv 0 \text{ на } [0,1]$$

Да ли G_n равномерно конвертира ка 0 на $[0,1]$?

Ако би то било вистина би

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 = n_0(\varepsilon)) (\forall x \in [0,1]) (n > n_0 \Rightarrow |G_n(x)| < \varepsilon)$$

звеме $x = \frac{1}{n} \in [0,1]$

$$G_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{2}{n} \cdot n^2 e^{-n^2 \cdot \frac{1}{n^2}} = \frac{2n}{e}$$

звеме $\varepsilon = \frac{2}{e}$

можемо да го вглед $G_n(1/n) < \varepsilon$ за $n \geq n_0$

$$\frac{2}{e} n < \frac{2}{e} \text{ огласно } \frac{2}{e} \cdot n < \frac{2}{e} \text{ за } n \geq n_0$$

$$\text{огласно } n < 1$$

не конвертира

равномерно во тачка по тачка

на не монотон

(11)

Уочимо:

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} (2xn^2 e^{-n^2 x^2} - 2x(n-1)^2 e^{-(n-1)^2 x^2}) \right) dx$$

$$\stackrel{?}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 [2xn^2 e^{-n^2 x^2} - 2x(n-1)^2 e^{-(n-1)^2 x^2}] dx$$

$$0 \stackrel{?}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^1 2xn^2 e^{-n^2 x^2} dx - \int_0^1 2x(n-1)^2 e^{-(n-1)^2 x^2} dx \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (1 - e^{-n^2} - 1 + e^{-(n-1)^2}) = \sum_{n=1}^{\infty} (e^{-(n-1)^2} - e^{-n^2}) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - e^{-n^2}) = \underline{1}$$

$$* \int_0^1 2xu^2 e^{-u^2 x^2} dx = \int_0^1 - (e^{-u^2 x^2})' dx = 1 - e^{-n^2}$$

$$S_n = 1 - e^{-n^2} \text{ ког } n \rightarrow \infty.$$

$$10 \neq 1$$

Пример да без равномерне конвергенције можемо да дођемо до погрешног резултата.

* скупови мере тупа

- сума мора бити опреничена...

f_n су Рундак шибропаване

↓ све функције су на компактном скупу које је мере тупе

↓ $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ равномерно конвергенција до $[a, b]$

② Задати Лебег услов
У мора да е одговарајуће
- теорема Лебега?

Лема: Ако су $f_n \in C^1[a, b]$, ред $\sum_1^\infty f_n(x)$ конвергира на $[a, b]$ и ред $\sum_1^\infty f_n'(x)$ конвергира равномерно на $[a, b]$ онда је $\sum_1^\infty f_n(x)$ непрекидно диференцијабилна функција и важи $(\sum_1^\infty f_n(x))' = \sum_1^\infty f_n'(x)$ на $[a, b]$.

до ово конвергира бар у једној тачки (неукијично може се објаснити)

Доказ

$G(x) = \sum_1^\infty f_n'(x)$ је непрекидно на $[a, b]$

$$a \leq x_0 < x \leq b$$

$$\int_{x_0}^x G(t) dt = \int_{x_0}^x \sum_1^\infty f_n'(t) dt = \sum_{n=1}^\infty \int_{x_0}^x f_n'(t) dt = \sum_{n=1}^\infty (f_n(x) - f_n(x_0)) = S(x) - S(x_0)$$

$$\text{тј. је } S(x) = \sum_1^\infty f_n(x) \quad S(x) = S(x_0) + \int_{x_0}^x G(t) dt$$

$$S'(x) = \frac{d}{dx} \int_{x_0}^x G(t) dt = G(x)$$

$$(\sum_1^\infty f_n(x))' = \sum_1^\infty f_n'(x)$$

Лема (Абелов критеријум): Нека ред $\sum_1^\infty b_n(x)$ конвергира равномерно на D а a_n је $a_n: X \mapsto a_n(x)$ (при сваком $x \in D$) обрнутој монотон и ограничењу $|a_n(x)| \leq k \quad \forall x \in D, \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \sum_1^\infty a_n(x) b_n(x)$ равномерно конвергира на D .

Лема (Дурихлеов критеријум) Нека је $|\sum_{k=1}^n b_k(x)| \leq M \quad \forall x \in D, \forall n \in \mathbb{N}$ и $a_n: X \mapsto a_n(x)$ (при сваком $x \in D$) монотон и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(x) = 0$ $\Rightarrow \sum_{n=1}^\infty a_n(x) b_n(x)$ равномерно конвергира на D .

Доказ (Абел): Из равномерной конвергенции $\sum_{k=1}^{\infty} b_k(x)$ на D
 следует $(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 = n_0(\varepsilon) (\forall x \in D) (\forall m \in \mathbb{N}) (n \geq n_0 \Rightarrow |\sum_{k=n+1}^m b_k(x)| < \varepsilon))$

$$n_0, \left| \sum_{k=n_0+1}^{n+m} a_k(x) b_k(x) \right| = \left| \sum_{i=1}^m \underbrace{a_{n_0+i}(x)}_{\alpha_i} \underbrace{b_{n_0+i}(x)}_{\beta_i} \right| \leq \varepsilon \cdot (|a_{n_0+1}(x)| + 2|a_{n_0+m}(x)|) \leq 3K\varepsilon$$

*
 α_i ограничен

*
 Абелеву лемму

$$b_k = \beta_1 + \dots + \beta_k$$

уложу L и ε

$$\left| \sum_{i=1}^m \alpha_i \beta_i \right| \leq L (|\alpha_1| + 2|\alpha_m|)$$

$$\text{где } \forall k \quad |b_k| \leq L \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \text{ряд } \sum a_k(x) b_k(x)$$

конвергирует по Кошиевом
 критерию.

Доказ (Дирхле):

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+m} b_k(x) \right| = \left| \sum_{k=1}^{n+m} b_k - \sum_{k=1}^n b_k \right| \leq \left| \sum_{k=1}^{n+m} b_k \right| + \left| \sum_{k=1}^n b_k \right| \leq M + M - 2M$$

$a_n(x)$ равномерно конвергирует к 0 $\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 = n_0(\varepsilon)) (\forall x \in D)$

$$(n \geq n_0 \Rightarrow |a_n(x)| < \varepsilon)$$

$$M \geq M_0$$

$$\sum_{k=n+1}^{n+m} a_k(x) b_k(x) = \sum_{i=1}^m \underbrace{a_{n+i}(x)}_{\alpha_i} \underbrace{b_{n+i}(x)}_{\beta_i} \leq \text{опять лемма}$$

$$\leq 2M \left(\underbrace{|a_{n+1}(x)|}_{< \varepsilon} + 2 \underbrace{|a_{n+m}(x)|}_{2\varepsilon} \right) < 2M \cdot 3\varepsilon = 6M\varepsilon \quad \forall x \in D$$

$\Downarrow$
 ряд $\sum a_k(x) b_k(x)$ равномерно конвергирует
 по основу критерию Коши

4/4

Пример

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

Знаю историю этих функций

за $a_n(x) = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ и по равномерно-конечной функции

функция $b_k(x) = \sin kx$ ($\sin kx$)

$$\sum_{k=1}^n b_k(x) \quad \sum_{k=1}^n e^{ikx} = e^{ix} \sum_{k=0}^{n-1} e^{ikx} =$$

$$e^{ikx} = \cos kx + i \sin kx \quad = e^{ix} \frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}}$$

$$q = e^{ix}$$

$$= e^{ix} \frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}}$$

$$\sum_{k=1}^n \cos kx + i \sum_{k=1}^n \sin kx = \frac{e^{ix} - e^{ix(n+1)}}{1 - e^{ix}} \cdot \frac{1 + e^{-ix}}{1 + e^{-ix}} =$$

$$= \frac{e^{ix} - e^{i(n+1)x} - 1 + e^{iux}}{1 + e^{-ix} - e^{ix} + 1} = \frac{e^{ix} - 1 + e^{iux}(1 - e^{ix})}{2 - 2\cos x}$$

$$= \frac{(1 - e^{ix})(e^{iux} - 1)}{4 \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{e^{i\frac{x}{2}} (e^{-i\frac{x}{2}} - e^{ix/2}) \cdot e^{i\frac{ux}{2}} (e^{i\frac{ux}{2}} - e^{-i\frac{ux}{2}})}{4 \sin^2 \frac{x}{2}}$$

$$= \frac{e^{i\frac{x}{2}(u+1)} (-2i) \sin \frac{x}{2} \cdot 2i \sin \frac{ux}{2}}{4 \sin^2 \frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{\sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$$

$$e^{i\frac{x}{2}(u+1)}$$

$\Rightarrow$

$$\sum_{k=1}^n \cos kx = \frac{\sin \frac{nx}{2} \cdot \cos \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$$

$$\sum_{k=1}^n \sin kx = \frac{\sin \frac{ux}{2} \sin \frac{(u+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$$

примени
се $\sin \frac{x}{2}$

$[a, b]$ не содержит
никакой области

$2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

использ
по теореме

45

19.10.2011.

Теорема (Лини): Ако су $f_n \in C[a, b]$, $0 \leq f_n(x)$ (ненегативно f_n)
 $\forall x \in [a, b] \quad \forall n \in \mathbb{N}$ и ред $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ конвертира на $[a, b]$ ка функцији
 $\sigma(x) \in C[a, b]$, онда ред $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ конвертира ка $\sigma(x)$ унормално
на $[a, b]$.

Доказ: $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \sigma(x) \quad \forall x \in [a, b]$

$\sigma_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$ - n -та парцијална сума реда

$\sigma_n \in C[a, b]$

$\sigma_n(x) \leq \sigma_{n+1}(x) \quad \forall x \in [a, b] \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\sigma_n(x) \rightarrow \sigma(x)$

хајде да фиксирамо $x \in [a, b]$ и нека је $\varepsilon > 0$. Из $\sigma_n(x) \rightarrow \sigma(x)$
следи да постоји број $n_x \in \mathbb{N}$ такав да је $\sigma(x) - \sigma_n(x) < \varepsilon$
 $\forall n \geq n_x$.

Како су функције σ и σ_n непрекидне, то важе и функције

$\sigma - \sigma_n$ па из чињенице да је $\sigma(x) - \sigma_n(x) < \varepsilon$ за $n \geq n_x$

следи да постоји околина U_x тачке x таква да је $\sigma(y) - \sigma_n(y) < \varepsilon$

за $n \geq n_x$ и $\forall y \in U_x$. (јер је $\sigma_n \uparrow$)

Уозамо фамилију околних $\{U_x : x \in [a, b]\} \supset [a, b]$ → компактна

постоји $U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup \dots \cup U_{x_m} \supset [a, b]$

$m_0 = \max\{n_{x_1}, n_{x_2}, \dots, n_{x_m}\}$

$n \geq m_0$ и нека је $y \in [a, b] \Rightarrow y \in U_{x_i} \quad (1 \leq i \leq m)$

онда је $\sigma(y) - \sigma_k(y) < \varepsilon$ за $k \geq n_{x_i}$

$\sigma(y) - \sigma_n(y) < \varepsilon \quad \forall n \geq m_0 \quad \forall y \in [a, b] \Rightarrow$ равномерно конвергенција

резултујемо наконатом покривач.

46

- Силени редуви - (важно за физикере)

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \quad f_n(x) = C_n (x - x_0)^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - x_0)^n \quad \text{— силени ред}$$

C_n - коефицијенти силених реда

дефиниције за x_0 и нум. коефицијенти C_n

- Силени ред конвертира бар то неом случај

- лева особина - случај конвергенције или широк

$t = x - x_0$ — транспозиција

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n t^n$$

Лема (Абел): Ако ред $\sum_{n=0}^{\infty} C_n t^n$ конвертира у току $t = t_1$ онда конвертира $\forall t$: $|t| < |t_1|$.

Ако ред $\sum_{n=0}^{\infty} C_n t^n$ конвертира у граници $t = t_1$ онда конвертира за $\forall t$: $|t| > |t_1|$.

Доказ: а) $\sum_{n=0}^{\infty} C_n t_1^n$ конвертира $\Rightarrow C_n t_1^n \rightarrow 0$ како $n \rightarrow \infty$

$\Rightarrow \exists M < \infty : |C_n t_1^n| \leq M \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots$

За фиксно t : $|t| < |t_1|$ покажи се да онда ред $\sum_{n=0}^{\infty} |C_n| |t|^n$ конвертира

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} C_n t^n$ — конвертира

$$|C_n| |t|^n = |C_n| |t_1|^n \left| \frac{t}{t_1} \right|^n \leq M \cdot \left| \frac{t}{t_1} \right|^n$$

$\sum M \left| \frac{t}{t_1} \right|^n$ конвертира $\left| \frac{t}{t_1} \right| < 1$

супресија претпоставка
d) — контрапозитив
пробот

(следе директно)

то то изразеном трикритериуму

- иако је тека тачно у којој појављује области конвергенције и области дивергенције

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R} : \text{гд} \text{ по} \sum c_n x^n \text{ конвертира} \right\} \quad E \neq \emptyset$$

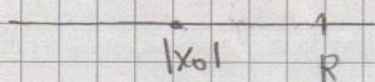
односно $\alpha \quad R = \sup |x| \quad x \in E$

□ Докажи мо:

Ако је x_0 такво да је $|x_0| < R \Rightarrow$ по $\sum c_n x_0^n$ конвертира.

Ако је x_0 такво да је $|x_0| > R$ онда по $\sum c_n x_0^n$ дивертира.

Доказ: Нема је $|x_0| < R = \sup |x|$
 $x \in E$



→ најмања горња граница

Из дефиниције супремума $\Rightarrow \exists x_1 \in E : |x_0| < |x_1| < R$ тако је

$x_1 \in E \Rightarrow \sum c_n x_1^n$ конвертира па по лему Абела $\Rightarrow$

$\sum c_n x_0^n$ конвертира. ■

E садржи цео сегмент $(-R, R)$

R -радиус конвергенције савесног реда

$(-R, R)$ - обавезно конвертира

у другом случају трансформације
 $(x_0 - R, x_0 + R)$

и самим тимом $-R$ и R може свашта до се доћи.

Уде је и у другом како толи R ?

Си дефиниције радиус конвергенције

Т (Адамар): Нека је $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ и нека је R његов радијус
 конвергенције. Тада је $\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ (*)

Доказ: Препоставимо да смо одабрали $|x| < R$. Покажићемо да
 ред $\sum c_n x^n$ конвергира.

$$\Downarrow$$

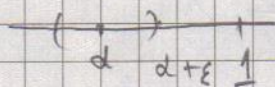
$$\frac{|x|}{R} < 1$$

ако више горњу релацију помножимо са $|x|$. (*)

$$\frac{|x|}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} \cdot |x| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n x^n|} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n x^n|} < 1$$

Означимо са $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n x^n|} < 1$

одaberимо $\varepsilon > 0$: $\alpha + \varepsilon < 1$



$$\sqrt[n]{|c_n x^n|} < \alpha + \varepsilon \text{ за } n \geq n_0$$

(по дефиницији $\lim$)

односно $|c_n x^n| < (\alpha + \varepsilon)^n$ за $n \geq n_0$

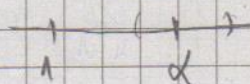
$\Downarrow$

$$\sum |c_n x^n| \text{ конвергира } \Rightarrow \sum c_n x^n \text{ конвергира.}$$

2) Нека је $x \in \mathbb{R}$, $|x| > R \Rightarrow \frac{|x|}{R} > 1$

$$\frac{|x|}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n x^n|} = \alpha$$

$$\Rightarrow \alpha > 1$$



одaberимо $\varepsilon > 0$ тако да је $\alpha - \varepsilon > 1$

из дефиниције $\lim \Rightarrow \exists$ одређен n_k :

$$\sqrt[n_k]{|c_{n_k} x^{n_k}|} > \alpha - \varepsilon, \quad |c_{n_k} x^{n_k}| > (\alpha - \varepsilon)^{n_k} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Ако ред $\sum c_n x^n$ не дивергира (при $|x| > R$) $\Rightarrow \sum c_n x^n$ конвергира $\Rightarrow$
 $c_n x^n \rightarrow 0 \Rightarrow c_{n_k} x^{n_k} \rightarrow 0$ $\nRightarrow$ са $|c_{n_k} x^{n_k}| > (\alpha - \varepsilon)^{n_k}$
 $\Rightarrow$ дивергира

коментар $\sum c_n (x - x_0)^n$ $t = x - x_0$
 $\sum c_n t^n$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$$

$|t| < R$ ред конвергира

$|t| > R$ ред дивергира

$|x - x_0| < R$ ред конвергира

$|x - x_0| > R$ ред дивергира

$\lim$ и $\liminf$ мора да постоје

Пример 1° $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n$$

$$|t| < 1$$

ставимо $x^2 = t$

$$|x^2| < 1$$

конвергира на $(-1, 1)$, R

$$|x|^2 < 1$$

$$c_n = \begin{cases} 0 & \text{ако је } n \text{ непарно} \\ 1 & \text{ако је } n \text{ парно} \end{cases}$$

$$|x| < 1$$

$$\sqrt[n]{|c_n|} = \begin{cases} 0 & \text{ако је } n \text{ непарно} \\ 1 & \text{ако је } n \text{ парно} \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 1$$

$$\frac{1}{R} = 1 \Rightarrow R = 1$$

2° $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 2^n} (x+2)^n$

$$x_0 = -2$$

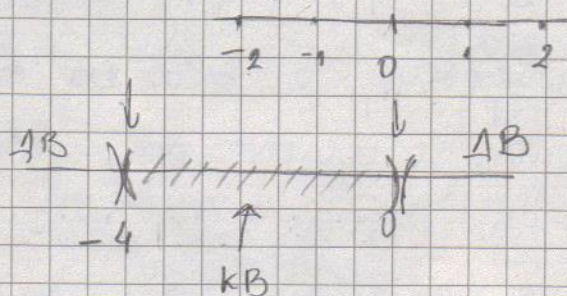
$$c_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 2^n}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n \cdot 2^n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} \Rightarrow R = 2 \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$|x - x_0| < 2$ ряд конвертируется $|x + 2| < 2$ ряд конвертируется

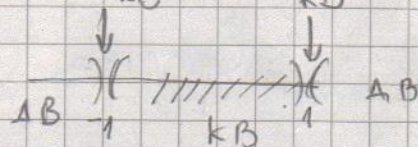
$|x - x_0| > 2$ $|x + 2| > 2$ ряд дивертируется



2° $x = 0$ ряд полагается $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ конвертируется по Лейбниц

2° $x = -4$ ряд полагается $\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n}$ дивертируется

3° $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ $R = 1$ Адамс-Робертс формула



Свойства степенных рядов

Сл.б: Если степенный ряд $\sum C_n x^n$ имеет радиус конвергенции R ($(-R, R)$ - конвертируется). Тогда за своего $a < R$ ряд конвертируется равномерно на $[-a, a]$ и, дакле, его сумма является непрерывной функцией на $(-R, R)$.

Доказ: (на $[-a, a]$) Покажем, что $\sum |C_n| a^n$ конвертируется. Возьмем $a < a_1 < R$

А потому $a_1 \in (-R, R)$ и $\sum C_n a_1^n$ конвертируется $\Rightarrow$

$$|C_n a_1^n| \leq M \quad \forall n = 0, 1, \dots$$

$$|C_n| a^n = |C_n| a_1^n \left| \frac{a}{a_1} \right|^n \leq M \left| \frac{a}{a_1} \right|^n \quad \sum M \left| \frac{a}{a_1} \right|^n \text{ конвертируется}$$

$$\Rightarrow \sum |C_n| a^n \text{ конвертируется}$$

Заделимо $|x| < a$. $|c_n| x^n = |c_n| |x|^n \leq |c_n| a^n$ а

ред $\sum |c_n| a^n$ конвертира.

$\Rightarrow$ На интервалу $[-a, a]$ ред $\sum c_n x^n$ конвертира равномерно по Вајерштраусов критериуму, а како су сви чланови реда непрекидне функције то је и сума реда непрекидна на $[-a, a]$.

У својству a смо могли да узимамо било које $a < R$. Због произвољности $a < R$, сума реда је непрекидна у свакој тачки $(-R, R)$. ■

Лема 6 Нека апсолутни ред $\sum c_n x^n$ има радиус конвергенције R и нека се он сме интегралити члан по члан на сваком интервалу $[a, b] \subset (-R, R)$ (iii).
$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_a^b x^n dx.$$
 следи из доказатог извршења (гуче)!