Системи диференцијалних једначина

Аналогно свим ранијим типовима једначина, под системом диференцијалних једначина подразумевамо решавање више од једне диференцијалне једначине, прецизније, тражимо функцију која заједно са својим изводима задовољава више од те једне једначине. За почетак, као и у случају једне једначине, од интереса су нам питања постојања и јединствености решења. Пре тога, дефинишимо

Дефиниција Нека је $U \subset \mathbb{R}^{N+1}$ отворен скуп, нека су функције $f_i(x, y_1, \ldots, y_N), i = 1, \ldots n$ непрекидне на њему и нека су још $m_i \in \mathbb{N}$ такви да је $m_1 + m_2 + \ldots + m_n = N$. Скуп једначина

$$y_i^{(m_i)} = f_i(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1-1)}, y_2, \ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(m_n-1)}), \quad i = 1, \ldots n,$$

називамо системом диференцијалних једначина реда N.

У специјалном случају када је $m_1 = m_2 = \ldots = m_n = 1$, односно када је систем облика

$$y_i' = f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

сам систем називамо нормалним. Приметимо такође да случају $n = 1$ се односи на раније разматране диференцијалне једначине m_1-ог реда.

Као и раније, решењем система ћемо подразумевати било којих n функција, које заједно са својим изводима задовољавају претходне једначине и као и код обичних једначина, решење ћемо тражити локално. Прецизније, скуп функција $y_i(x)$, за $i = 1, \ldots, n$ и $x \in I$, где је I било који интервал, називаммо решењем система једначина, уколико је:

1) Функција $y_i(x)$ је непрекидна на интервалу I, заједно са својих m_i извода, што важи за све $i = 1, \ldots, n$.

2) За свако $x \in I$ је $y^{(m_1)}(x) = f_i(x, y_1(x), \ldots, y_1^{(m_1-1)}(x), \ldots, y_n(x), y_n'(x), \ldots, y^{(m_n-1)}(x))$.

Сваки систем диференцијалних једначина еквивалентан је (у смислу да имамо бијекцију између скупа решења) једном нормалном систему диференцијалних једначина. За почетак, свака диференцијална једначина $n-$ог реда

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

еквивалентна је једном нормалном систему једначина. Заиста, уколико уведемо смене

$$y = y_1, \qquad y' = y_2 \qquad y'' = y_3 \qquad \ldots \qquad y^{(n-1)} = y_n,$$

добијамо систем

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ \vdots &= \vdots \\ y_{n-1}' &= y_n \\ y_n' &= f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{aligned}$$

што је нормалан систем (све једначине су првог реда). Даље, уколико је $y(x)$ решење диференцијалне једначине, тада је функција $(y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)) = (y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x))$ решење система, а важи обрнуто, уколико је $(y_1(x), \ldots, y_n(x))$ решење система, функција $y_1(x)$ је решење почетне диференцијаалне једначине.

Уколико имамо произвољан систем, претходни поступак поновимо за сваку једначину понаособ, чиме опет добијамо систем једначина првог реда.

Такође, важи и обрнуто, наиме, сваки систем нормалан систем диференцијалних једначина можемо да запишемо као диференцијалну једначину одговарајућег реда. Уколико је дат систем

$$y_i' = f_i(x, y_1, \ldots, y_n) \qquad i = 1, \ldots, n$$

те уколико диференцирамо нпр. прву једначину по x добијамо $y_1'' = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x}$. Из преосталих једначина имамо да је $y_i' = f_i$, а одатле, последња једначина је облика $y_1'' = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} f_1 + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} f_n = F_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, где је последњи корак само промена имена функције са десне стране (уз то смо видели и да десна страна не зависи од извода функција y_i). Настављајући даље поступак (јер смо опет у почетној ситуацији), даље добијамо

$$y_1''' = F_3(x, y_1, \ldots, y_n) \qquad y_1^{(n)} = F_n(x, y_1, \ldots, y_n).$$

Да би свели систем на једну једначину, неопходно нам је даље да промењиве $y_2, \ldots, y_n$ изразимо преко извода функције y_1. Из теореме о инверзној функцији за решење нам је неопходно да детерминанта тог система буде различита од нуле, односно да је

$$\frac{D(f_1, F_2, \ldots, F_{n-1})}{D(y_2, \ldots y_n)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \frac{\partial f_1}{\partial y_3} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \frac{\partial F_2}{\partial y_3} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_2} & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_3} & \cdots & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_n} \end{pmatrix} \neq 0.$$

Прецизније, под претходном претпоставком, по теореми о инверзној функцији, постоји инверзна функција за функцију

$$y_1' = f_1(x, y_1, \dots, y_n) \qquad \dots \qquad y_1^{(n)} = F_n(x, y_1, \dots, y_n),$$

посматране ка функције од $y_2, \dots, y_n$ одакле се оне могу изразити као функције од $y_1', y_1'', \dots, y^{(n-1)}$. Из свега тога, увођењем те функције у последњу добијену једначину

$$y^{(n)} = F_n(x, y_1, \dots, y_n),$$

добијамо једначину записану само преко y_1 и њених извода, односно, једначину $n-$ог реда.
Приметимо, једноставности записа ради, да нормалне системе диференцијалних једначина можемо да запишемо са $Y' = F(x, Y)$, где је $Y \in \mathbb{R}^n$ док је F непрекидна функциија на отвореном скупу у $\mathbb{R}^{n+1}$. У овом запису поставка Кошијевог проблема потпуно је аналогна као и за диференцијалне једначине, наиме за тачку $(x_0, Y_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, да ли постоји решење система $Y(x)$, за које је $Y(x_0) = Y_0$, где је $Y\colon I \to \mathbb{R}^n$ одговарајућа функција.
Што се питања егзистенције и јединствености решења Кошијевог проблема тиче, у претходној нотацији су саме формулације аналогне једнодимензионалном случају. Прецизније
Теорема Нека је функција $F(x, Y)$ непрекидна у области $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Тада за сваку тачку $(x_0, Y_0) \in U$ постоји функција $Y(x)\colon I \to \mathbb{R}^n$, где је I неки интервал, такав да је $x_0 \in I$, за које је још $Y(x_0) = Y_0$ и $Y'(x) = F(x, Y(x))$.
Уколико још додатно претпоставимо ограниченост парцијалних извода функције F, опет аналогно једнодимензионалном случају, имамо и јединственост решење. Наиме
Теорема Ако је, уз претпоставке претходне Теореме, још функција $F(x, Y) = (F_1, F_2, \dots, F_n)$ таква да су парцијални изводи $\frac{\partial F_i}{\partial y_j}$ ограничени, тада је решење једначине $Y' = F(x, Y)$ из претходне Теореме јединствено. Тачније, уколико постоје два решења Y_1 и Y_2 која задовољавају $Y_{1,2}(x_0) = Y_0$, тада постоји околина V тачке x_0 на којој се Y_1 и Y_2 подударају.
Доказ претходне Теореме потпуно је аналоган једнодимензионалном случају и своди се на адекватну примену Банахове теореме о непокретној тачки.
Из претходне Теореме имамо да је решење (у случају постојања и јединствености) једнозначно одређено вектором у $\mathbb{R}^n$ чију вредност узима решење у некој тачки x_0. Самим тим, систем једначина $Y' = F(x, Y)$ има n степени слободе. Одавде се и опште решење система дефинише потпуно аналогно као раније. Наиме, нека је U област постојања и јединствености решења једначине $Y' = F(x, Y)$ и нека је $y(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ фамилија функција, где су C_i параметри. Уколико за сваку тачку $(x_0, Y_0) \in V \subset U$ постоје јединствени C_i^0 за које је $y(x, C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0)$ решење које задовољава $y(x_0, C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0) = Y_0$, фамилију $y(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ називамо општим решењем једначине у области E.
Од највише интереса нама је нормалан систем линеарних једначина, који је облика

$$\begin{aligned} ay_1' &= a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \dots + a_{1n}(x)y_n + b_1(x) \\ y_2' &= a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \dots + a_{2n}(x)y_n + b_2(x) \\ \vdots &= \vdots + \vdots + \dots + \vdots \\ y_n' &= a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \dots + a_{nn}(x)y_n + b_n(x), \end{aligned}$$

односно, у векторском облику $Y' = A(x)Y + B(x)$, где је $A(x)$ матрица $[a_{ij}(x)]_{i,j=1}^n$ а $B(x)$ је вектор $B(x) = (b_1(x), b_2(x), \dots, b_n(x))$. Аналогно претходним сличним ситуацијама, систем називамо хомоген уколико је $B(x) = 0$. Приметимо још у овом тренутку, да уколико имамо систем линеарних једначина које су произвољног реда (не обавезно првог), свођењем на нормални систем на раније описани начин, добијамо нормалан систем линеарних једначина. Наиме, нове једначине које додајемо у систем су или облика $y_i' = y_{i+1}$ или $y_i' = f_k(x, Y)$, где је f_k по претпоставци већ'линеарна функција. Како су обе ове једанчине облика који се јавља у нормалном систему линеарних једначина, то за испитивање система линеарних једначина, довољно је посматрати нормалне системе.
Опет аналогно скаларном случају, област постојања и јединствености решења нормалног система линеарних једначин је највећа могућа, тачније важи
Теорема Нека је дат систем $Y' = A(x)Y + B(x)$, где су $A(x)$ и $B(x)$ непрекидне на интервалу I. Тада за свако $(x_0, Y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ постоји јединственбо решење $Y(x)$ за $x \in I$, за које је $Y(x_0) = Y_0$.
У контексту претходно реченог, о бијекцији између скупа решења система и једначине $n-$ог реда, претходна теореме је еквивалентна одговарајућој теореми за линеарну диференцијалну једначину $n-$ог реда.
За крај овог дела, наведимо једну дефиницију која ће нам требаи за касније
Дефиниција Непрекидна функција $U(x, Y)$ се назива првим интегралом (или само интегралом) једначине $Y' = F(x, Y)$ ако је константна дуж сваког решења наведене једначине. Прецизније, уколико је $y(x)$ решење наведене једначине, U је интеграл уколико важи $U(y(x)) = const$.
Приметимо да уколико имамо два прва интеграла система U_1 и U_2, тада је и за било коју функцију $G\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ функција $G(U_1, U_2)$ такође први интеграл система (заиста, како $U_{1,2}$ не зависе ако се крећемо дуж решења система, то не зависи ни то што на њих касније применимо неку нову функцију). Како нам је

од интереса налажење првих интеграла (јер имплицитно могу да изразе једну променљиву преко осталих, чиме можемо да смањимо број једначина), али на претходни начин суштински не добијамо нове интеграле, одакле нам је од интереса да искључимо такве случајеве. Прецизније, функције $U_1, \ldots, U_m \colon U \to \mathbb{R}$, где је $U \subset \mathbb{R}^n$, називамо функционално зависним уколико постоји функција F, таква да је $F(U_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, U_m(x_1, \ldots, x_n)) = 0$ за све $(x_1, \ldots, x_n) \in U$. Приметимо да је ово доста "јачи" вид зависности од линеарне, јер се односи на све могуће функције (док се линерна односи на функције облика $F(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$). Примера ради функције $U_1(x, y) = x, U_2(x, y) = y$ и $U_3 = e^x y^2$ су функционално зависне (јер је $U_3 - e^{U_1} U_2^2 = 0$), док су линеарно независне.
Један од начина испитивања функционалне незвисности се може извести из Теореме о имплицитној функцији (наводимо га без доказа). Уколико имамо функције $U_1, \ldots, U_m$, формирајмо од њих векторску функцију

$$U = (U_1, \ldots, U_m).$$

Тада су функције $U_1, \ldots, U_m$ независне уколико је матрица извода функције U ранга m.
На крају, поменимо само да би очекивано било да систем једначина $Y' = F(x, Y)$, има n (што је димензија простора) првих интеграла (посматрано локално, у околинама тачака где имамо постојање и јединственост решења). Идејно, како је опште решење задато са $Y = Y(x, C_1, \ldots, C_n)$, што ако запишемо као систем имамо да је

$$y_1 = y_1(x, C_1, \ldots, C_n), y_2 = y_2(x, C_1, \ldots, C_n), \ldots, y_n = y_n(x, C_1, \ldots, C_n).$$

У генеричком случају, како једном избору константи одговара тачно једна вредност Y, очекујемо да можемо да изразимо константе C_i преко вредности y_i. Како имамо n константи C_i, тиме добијамо и одговарајући број интеграла.

Хомогени систем диференцијалних једначина

У наредном делу, циљ нам је да дођемо до облика општег решења нормалног хомогеног система диференцијалних једначина (што ћемо краће називати хомогени систем), прецизније, у векторском облику, система

$$Y' = A(x)Y, \tag{1}$$

где је $A(x)$ матрица $n \times n$ чији су уноси непрекидне функције на неком интервалу I. Саме идеје аналогне су ранијем скаларном случају (односно линеарне једначине $n-$ог реда). За почетак
Лема Скуп решења претходног система једначина је векторски простор.
Заиста, уколико су $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и Y_1, Y_2 решења система, имамо да је

$$(\alpha Y_1 + \beta Y_2)' = \alpha Y_1' + \beta Y_2' = \alpha A(x) Y_1(x) + \beta A(x) Y_2(x) = A(x)(\alpha Y_1 + \beta Y_2),$$

одакле је и $\alpha Y_1 + \beta Y_2$ решење претходног система.
Аналогно дефинишемо и линеарну зависност, тј, за функције $f_1, \ldots, f_m \colon I \to \mathbb{R}^n$, где је $I \subset \mathbb{R}$ интервал, кажемо да су линеарно независне, уколико из једнакости

$$\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \ldots + \alpha_m f_m(x) = 0 \qquad \forall x \in I$$

следи да је $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$. У супротном, односно ако постоје бројеви α_i који нису сви истовремено нула и за које је $\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \ldots + \alpha_m f_m(x) = 0$, за све $x \in I$, кажемо да су функције $f_i(x)$ линеарно зависне.
Потпуно аналогно ранијим случајевима се доказује наредна
Лема Нека су функције $f_1, \ldots, f_m \colon I \to \mathbb{R}^n$ решења система (1). Ако постоји $x_0 \in I$ за које су вектори $f_1(x_0), \ldots, f_m(x_0)$ линеарно зависни, тада су и наведене функције линеарно зависне са истим коефицијентима (прецизније, вектори $f_1(x), \ldots, f_m(x)$ су линеарно зависни за свако $x \in I$ са истим коефицијентима).
Заиста, ако постоји x_0 за које су вектори $f_1(x_0), \ldots, f_m(x_0)$ линеарно зависни, тј. постоје α_i који нису сви нула и за које је

$$\alpha_1 f_1(x_0) + \alpha_2 f_2(x_0) + \ldots + \alpha_m f_m(x_0) = 0,$$

то исти почетни услов у тачки x_0 задовољава и решење $\varphi(x) = 0$. Отуда, по Теореми о јединствености решења линеарног система, ова два решење су једнака на целом интервалу I, што је и требало показати.
Претходна лема је заправо еквиваленција (свакако је увек тачно да ако су функције линеарно зависне, то постоји тачка у којој су вектори линеарно зависни, наиме свака тачка интервала I је одговарајућа), те контрапозицијом добијамо наредну лему
Лема Нека су функције $f_1, \ldots, f_m \colon I \to \mathbb{R}^n$ решења система (1). Тада је еквивалентно
а) Постоји тачка $x_0 \in I$ у којој су вектори $f_1(x_0), \ldots, f_m(x_0)$ линеарно независни.
б) Функције $f_1, \ldots, f_m$ су линеарно независне.
Даље, сада можемо прецизирати и димензију скупа решења.
Лема Постоји тачно n линеарно независних решења једначине (1). **Доказ** Означимо прво са $\varphi_i(x)$ решења, која у некој фиксираној тачки $x_0 \in I$ узимају за вредност векторе $e_i = (\underbrace{0, \ldots, 0, 1}_{i}, 0, \ldots, 0)$, тј. $\varphi_i(x_0) = e_i$, за $i = 1, \ldots, n$. Нека је даље $f(x)$ произвољно решење. Како је $f(x_0)$ вектор у $\mathbb{R}^n$, то је он линеарна комбинација вектори e_i, а самим тим су по претходној леми функције $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, f$ линеарно

зависне (јер су зависне у тачки x_0). Самим тим има тачно n линеарно независних решења.
Одавде имамо и

Теорема Произвољних n линеарно независних решења, гради базу простора решења.
Доказ претходне Теореме је суштински исти као у случају линеарне једначине $n-$ог реда. По аналогији, саму базу простора решења називамо и фундаментални скуп решења.
Дакле, уколико су $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ фундаментална решења система (1) опште решење је дато са

$$f(x) = c_1\varphi_1(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x),$$

где су $c_i \in \mathbb{R}$. Претходно можемо и једноставно записати матрично, уколико означимо са $M(x)$ матрицу чија $i-$та колона вектор $\varphi_i(x)$, опште решење система је дато са $f(x) = M(x) \cdot C$, где је $C \in \mathbb{R}^n$ фиксиран вектор.