Решавање диференцијалних једначина преко степених редова

Размотримо један начин примене степених редова у решавању диференцијалних једначина. Пођимо од наредног примера.

Пример Решити диференцијалну једначину $y'' - x^2 y = 0$

Потражимо решење у облику степеног реда $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, што би у овом контексту значило нађимо услове за коефицијенте a_n под којима је функција $y(x)$ решење почетне једначине. Као што је познато, степени редови могу да се диференцирају члан по члан, а самим тим је $y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ и $y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$, за сада, на радијусу конвергенције почетног реда. Уколико заменимо наведени израз у једначину добијамо

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 2 \cdot 1 a_2 + 3 \cdot 2 a_3 x + \sum_{n=0}^{\infty} (n+4)(n+3) a_{n+4} x^{n+2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = 0,$$

односно

$$2 \cdot 1 a_2 + 3 \cdot 2 a_3 x + \sum_{n=0}^{\infty} ((n+4)(n+3) a_{n+4} - a_n) x^{n+2} = 0.$$

Како је функција задана степеним редом једнака нули ако и само ако су јој сви коефицијенти једнаки нули, то добијамо

$$a_2 = a_3 = 0 \qquad (n+4)(n+3) a_{n+4} - a_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

односно

$$a_{n+4} = \frac{a_n}{(n+3)(n+4)}.$$

Одатле имамо да важи

$$\begin{aligned} a_{4n} &= \frac{1}{(3 \cdot 4) \cdot (7 \cdot 8) \cdot \ldots \cdot (4n-1) \cdot 4n} a_0 \\ a_{4n+1} &= \frac{1}{(4 \cdot 5) \cdot (8 \cdot 9) \cdot \ldots \cdot (4n) \cdot (4n+1)} a_1 \\ a_{4n+2} &= a_{4n+3} = 0. \end{aligned}$$

Дакле, опште решење је дато са

$$y(x) = a_0 \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(3 \cdot 4) \cdot (7 \cdot 8) \cdot \ldots \cdot (4n-1) \cdot 4n} \right) + a_1 \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{(4 \cdot 5) \cdot (8 \cdot 9) \cdot \ldots \cdot (4n) \cdot (4n+1)} \right).$$

Приметимо да оба степена реда конвергирају на целом $\mathbb{R}$ (види се директно применом Даламберовог критеријума) односно задају аналитичке функције на $\mathbb{R}$ какве су биле и коефицијенти почетне једначине. Исти закључак важи и иначе, и наводимо га без доказа

Теорема Нека је дата једначина $y'' + a_1(x) y' + a_2(x) y = 0$, где су a_1 и a_2 аналитичке функције у области $|x| < r$. Тада је свако решење једначине $y(x)$ такође аналитичка функција у области $|x| < r$.

Напоменимо још да је случај $n = 2$ изабран због једноставности записа, наиме Теорема важи и за линеарну једначину $n-$ог реда. Такође, степени редови су центрирани око нуле из истог разлога.

Претходно описан начин тражења решења може да се уопшти у још неким важим случајевима. Наиме, претпоставимо да имамо хомогену линеарну једначину дату са

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = 0,$$

такву да су функције $(x - x_0) a_1(x), (x - x_0)^2 a_2(x), \ldots, (x - x_0)^n a_n(x)$ аналитичке у некој околини тачке x_0. Овакву тачку називамо још и регуларно сингуларном тачком једначине. Идејно, ситуација одговара томе да функције $a_1(x), \ldots, a_n(x)$ могу да се развију у степени ред, али да могу да имају и понеки члан са негативним експонентом. Множењем једначине са $(x - x_0)^n$ добијамо еквивалентну једначину

$$(x - x_0)^n y^{(n)} + (x - x_0)^{n-1} b_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + (x - x_0) b_{n-1}(x) y' + b_n(x) y = 0,$$

где су сада функције $b_1, \ldots, b_n$ аналитичке у околини x_0. Једноставности ради, узмимо да је $n = 2$ и $x_0 = 0$, односно да решавамо једначину

$$x^2 y'' + x a_1(x) y' + a_2(x) y = 0,$$

где су a_1 и a_2 аналитичке у некој околини тачке $x = 0$. Решење тражимо у облику

$$y(x) = x^{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \qquad c_0 \neq 0,$$

где је за сада λ непозната константа. Такође, како су a_1 и a_2 аналитичке функције, означимо њихове развоје у ред око тачке 0 са $a_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$ и $a_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$. Извод функције $y(x)$ добијамо директним рачуном

$$y'(x) = \lambda x^{\lambda-1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n + x^{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} = x^{\lambda-1} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda c_n x^n + n c_n x^n = x^{\lambda-1} \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda + n) c_n x^n,$$

и аналогно се добија

$$y''(x) = x^{\lambda-2}\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda+n)(\lambda-1+n)c_n x^n.$$

Најзад, заменом свих претходних израза у почетну једначину добијамо

$$(1)\quad x^2\cdot x^{\lambda-2}\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda+n)(\lambda-1+n)c_n x^n + x\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}p_n x^n\right)\cdot x^{\lambda-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda+n)c_n x^n\right)+\left(\sum_{n=0}^{\infty}q_n x^n\right)\cdot x^{\lambda}\left(\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n\right)=0$$

и приметимо прво да сваки сабирак садржи чинилац x^λ те се он може скратити. Даље, нађимо коефицијент уз x^n, што се првог сабирка тиче, он учествује са $(\lambda+n)(\lambda-1+n)c_n$. Што се другог сабирка тиче, уколико узмемо из првог реда x^k да би добили x^n из другог реда треба да узмемо x^{n-k}. Прецизније, важи да је коефицијент уз x^n у производу наведена два реда дат са $p_0(\lambda+n)c_n + p_1(\lambda+n-1)c_{n-1}+\ldots+p_n\lambda c_0$[1]. Аналогно, трећи сабирак учествује са $q_0c_n+q_1c_{n-1}+\ldots+q_nc_0$. Узимајући претходне три ставке у обзир, једначина (1) се своди на

$$\sum_{n=0}^{\infty}((\lambda+n)(\lambda-1+n)c_n+(p_0(\lambda+n)c_n+p_1(\lambda+n-1)c_{n-1}+\ldots+p_n\lambda c_0)+(q_0c_n+q_1c_{n-1}+\ldots+q_nc_0))x^n=0,$$

што је тачно уколико је коефицијент уз x^n једнак нули за свако $n\in\mathbb{N}$. Специјално за $n=0$ добијамо једначину

$$\lambda(\lambda-1)c_0+\lambda c_0p_0+q_0c_0=0,$$

а како смо претпоставили да $c_0\neq 0$ скраћивањем добијамо једначину

$$\lambda(\lambda-1)+\lambda p_0+q_0=0,$$

која се још назива иницијална једначина. Њеним решавањем добијамо две вредности λ_1 и λ_2 и у зависности од њих разликујемо следеће случајеве. Узимамо да је $\mathfrak{Re}\lambda_1\geqslant\mathfrak{Re}\lambda_2$.

Први случај Уколико је $\lambda_1\neq\lambda_2$ и $\lambda_1-\lambda_2$ није цео ненегативан број, тада су два линеарно независна решења једначине дата са

$$y_1(x)=|x|^{\lambda_1}\sum_{n=0}^{\infty}c'_nx^n\qquad y_2(x)=|x|^{\lambda_2}\sum_{n=0}^{\infty}c''_nx^n,$$

где редови $\sum_{n=0}^{\infty}c'_nx^n$ и $\sum_{n=0}^{\infty}c''_nx^n$ конвергирају у околини нуле. Сами коефицијенти се налазе даље из рекурентне везе добијене из једначине (1).

Други случај Уколико је $\lambda_1-\lambda_2$ цео ненегативан број (дакле укључујући нулу) линеарно независна решења су дата са

$$y_1(x)=|x|^{\lambda_1}\sum_{n=0}^{\infty}c'_nx^n\qquad y_2(x)=|x|^{\lambda_2}\sum_{n=0}^{\infty}c''_nx^n+cy_1(x)\ln|x|,$$

где је још $c'_0\neq0$ као и $c''_0\neq0$ и c је константа која се даље налази из услова једначине (једноставности ради, у оба случаја се може узети $c'_0=c''_0=1$).

Претходни метод се назива метод Фробенијуса.

[1] Заправо користило смо и делом оправдали следећу формулу за производ степених редова $(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n)\cdot(\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$, где је $c_n=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$