## Парцијалне диференцијалне једначине првог реда

До сада смо разматрали само једначине у којој учествује функција једне променљиве (векторска или скаларна), наиме изводи који су били у једначинама су увек били по једној променљивој. Сходно наслову, наредна тема се односи на једначине у којима учествује функција више променљивих заједно са својим изводима. Како се задржавамо само на једначинама првог реда, формално дефинишемо само тај случај. Наиме, једначину облика

$$F(x_1,\ldots,x_n,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial u}{\partial x_n})=0,$$

где је $F$ непрекидна функција у области $U\subset\mathbb{R}^{2n+1}$ називамо парцијалном једначином првог реда (претпостављамо да у $F$ фигурише барем један парцијални извод).

Наравно, диференцијабилну функцију $u(x_1,\ldots,x_n)$ за $(x_1,\ldots,x_n)\in\Omega\subset\mathbb{R}^n$, где је $\Omega$ отворен скуп, називамо решењем претходне једначине, уколико је $F(X,u(X),\frac{\partial u}{\partial x_1}(X),\ldots,\frac{\partial u}{\partial x_n}(X))=0$ (где смо скраћено записали $X=(x_1,\ldots,x_n)$).

Површ ($n-$ димензионалну) коју добијамо сликом решења $u$, односно $\{u(x_1,\ldots,x_n)|(x_1,\ldots,x_n)\in\Omega\}$, називамо још интегралном површи једначине.

Једноставности ради, задржимо се накратко на случају $n=2$. У овом случају се традиционално једноставности ради користе ознаке $x,y$ за независно променљиве, $z$ за непознату функцију, као и $p$ и $q$ за парцијалне изводе $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ редом. Како је решавање парцијалне једначине, заправо аналогно одређивању интегралне површи, геометријски видимо да је проблем решавања парцијалне једначине заправо одређивање површи чији су тангентни вектори везани неком релацијом, за разлику од диференцијалне једначине, где је питање било наћи криву чији је тангентни вектор унапред задат.

**Пример** Једначину облика

$$\sum_{k=1}^{n}A_k(x_1,\ldots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_k}=0$$

називамо хомогеном линеарном једначином првог реда (приметимо да коефицијенти $A_k$ не зависе од тражене функције $u$). Придружимо овој једначини систем диференцијалних једначина $x_k'=A_k(x_1,\ldots,x_n)$, где сада $x_i$ посматрамо као функције које зависе од независно променљиве $t$. Како је одавде $\frac{dx_k}{dt}=A_k$, односно $\frac{dx_k}{A_k}=dt$, овај систем се често записује са

$$\frac{dx_1}{A_1(x_1,\ldots,x_n)}=\ldots=\frac{dx_n}{A_n(x_1,\ldots,x_n)}=dt.$$

Ако занемаримо део са $dt$, први део горње једначине представља $n-1$ једначина независно променљивих $x_1,\ldots,x_n$. Приметимо да у том случају, уколико је у некој тачки нпр $A_1\neq 0$, можемо опет да запишемо цео систем, где користимо $x_1$ као независну променљиву са

$$\frac{dx_k}{dx_1}=\frac{A_k(x_1,\ldots,x_n)}{A_1(x_1,\ldots,x_n)}.$$

Одавде, на основу раније поменутог, систем има $n-1$ независних интеграла, која су облика $F_i(x_1,\ldots,x_n)=C$.

Одавде је даље и $\frac{dF_i}{dt}=0=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial F_i}{\partial x_k}\frac{dx_k}{dt}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial F_i}{\partial x_k}A_k$. Изаберимо сада произвољну функцију $G\colon\mathbb{R}^{n-1}\to\mathbb{R}$ и означимо са $u(x_1,\ldots,x_n)=G(F_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,F_{n-1}(x_1,\ldots,x_n))$. Директним рачуном имамо да је

$$\frac{\partial u}{\partial x_k}=\sum_{i=1}^{n}\partial G_i\frac{\partial F_i}{\partial x_k},$$

а одатле и

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_k}=\sum_{i=1}^{n}\partial G_i\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial F_i}{\partial x_k}=0,$$

по претходном. Дакле, $u$ је решење линеарне једначине. Претходни метод се назива метод карактеристика.

Приметимо да се наведени метод може применити и на једначине облика $\sum_{i=1}^{n}A_i(x_1,\ldots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_i}+A_{n+1}(x_1,\ldots,x_n)=0$ (линеарна), као и облика $\sum_{i=1}^{n}A_i(x_1,\ldots,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}=A_{n+1}(x_1,\ldots,x_n,u)$ (квазилинеарна). Довољно је последње оправдати за квазилинеарну једначину.

Ако је решење облика $v(x_1,\ldots,x_n,u)$, где је $v$ класе $C^(1)$ и $\frac{\partial v}{\partial u}\neq 0$, онда, на основу теореме о имплицитној функцији, важи $\frac{\partial u}{\partial x_i}=-\frac{\frac{\partial v}{\partial x_i}}{\frac{\partial v}{\partial u}}$, за $1\leqslant i\leqslant n$, па се убацивањем у дату једначину добија $\sum_{i=1}^{n}A_i(x_1,\ldots,x_n,u)\frac{\partial v}{\partial x_i}+A_{n+1}(x_1,\ldots,x_n,u)\frac{\partial v}{\partial u}=0$, што је случај хомогене парцијалне једначине, разматран малопре (дакле, треба наћи $n$ независних првих интеграла из система $\frac{dx_1}{A_1(x_1,\ldots,x_n,u)}=\frac{dx_2}{A_2(x_1,\ldots,x_n,u)}=\ldots=\frac{dx_n}{A_n(x_1,\ldots,x_n,u)}=\frac{du}{A_{n+1}(x_1,\ldots,x_n,u)}$ и поновити закључке из претходних разматрања).

Поменимо неформално и појам Кошијевог проблема код парцијалних једначина. Овде, тај проблем, представља захтев да се међу решењима $u=G(x_1,\ldots,x_n)$ одреди оно које садржи одговарајућу површ димензије $n-1$. Зарад једноставности, посматрајмо случај две променљиве, односно једнччину $F(x,y,z,p,q)=0$.

У овом случају је почетни услов одређен кривом, па ако је $(f_1(s), f_2(s), f_3(s))$ параметаризација те криве (где се $s$ пролази неким дозвољеним скупу параматара $S$), треба одредити оно решење једначине $z = G(x,y)$ које се заменом из параметризације криве претвара у идентитет (односно, при наведеним условима важи $f3(s) = G(f1(s), f2(s))$ за свако $s \in S$). Слично се дефинише Кошијев проблем за једначине више промењљивих.

Поменимо на крају један метод за решавање опште парцијалне једначине првог реда (две независне промењљиве) $F(x,y,z,p,q) = 0$. За почетак, претпоставимо да имамо један први интеграл $\Phi(x,y,z,p,q) = C$, где је $C \in \mathbb{R}$ (касније ћемо видети један начин како се до њега може доћи). Даље, из једначина $F(x,y,z,p,q) = 0$ и $\Phi(x,y,z,p,q) = C$ можемо да изразимо изводе $p$ и $q$ преко осталих промењљивих, наиме

$$p = A(x,y,z,C) \qquad q = B(x,y,z,C).$$

Даље је идеја да нађемо функцију $z$ из једначине тоталног диференцијала, односно из $dz = pdx + qdy$. Да би ово могли да урадимо, неопходно је и довољно да је $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$, односно $\frac{\partial A(x,y,z,C)}{\partial y} = \frac{\partial B(x,y,z,C)}{\partial x}$, а како и $z$ зависи од $x$ и $y$, добијамо да је услов $\frac{\partial A(x,y,z,C)}{\partial y} + \frac{\partial A(x,y,z,C)}{\partial z}\frac{z}{\partial y} = \frac{\partial B(x,y,z,C)}{\partial x} + \frac{\partial B(x,y,z,C)}{\partial z}\frac{z}{\partial x}$, или у нотацији са $p$ и $q$

$$\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{z}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial z}\frac{z}{\partial x}.$$

Наравно, поставља се питање налажења одговарајуће функције $\Phi$. Из $F(x,y,z,p,q) = 0$ и $\Phi(x,y,z,p,q) = C$ (по претходном, $p$ и $q$ зависе од $x,y,z$, а $x,y,z$ можемо сматрати независним промењљивим), диференцирањем по $z$, добијамо једначине $\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial z} = 0$ и $\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial z} = 0$, што је линеаран систем (по $\frac{\partial p}{\partial z}$ и $\frac{\partial q}{\partial z}$) и његовим решавањем се добија

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial q} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} & \frac{\partial \Phi}{\partial q} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial p} & \frac{\partial F}{\partial q} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial p} & \frac{\partial \Phi}{\partial q} \end{vmatrix}}, \qquad \frac{\partial q}{\partial z} = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial p} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial p} & \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial p} & \frac{\partial F}{\partial q} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial p} & \frac{\partial \Phi}{\partial q} \end{vmatrix}}$$

Аналогно, из $F(x,y,z,p,q) = 0$ и $\Phi(x,y,z,p,q) = C$, диференцирањем по $x$ добијамо $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x} = 0$ и $\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x} = 0$, одакле је

$$\frac{\partial q}{\partial x} = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial p} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial p} & \frac{\partial \Phi}{\partial x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial p} & \frac{\partial F}{\partial q} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial p} & \frac{\partial \Phi}{\partial q} \end{vmatrix}}$$

док диференцирањем по $y$ добијамо $\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial y} = 0$ и $\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial y} = 0$, одакле је

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial q} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} & \frac{\partial \Phi}{\partial q} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial p} & \frac{\partial F}{\partial q} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial p} & \frac{\partial \Phi}{\partial q} \end{vmatrix}}$$

Враћајући се на једначину $\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{z}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial z}\frac{z}{\partial x}$ и заменом горе наведених израза у истој, добијамо

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial q} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} & \frac{\partial \Phi}{\partial q} \end{vmatrix} + q \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial q} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} & \frac{\partial \Phi}{\partial q} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial p} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial p} & \frac{\partial \Phi}{\partial x} \end{vmatrix} + p \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial p} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial p} & \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{vmatrix},$$

а сређивањем истог израза (тј. развијањем свих детерминанти) добијамо

$$\frac{\partial F}{\partial p} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial q} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y} + (p\frac{\partial F}{\partial p} + q\frac{\partial F}{\partial q})\frac{\partial \Phi}{\partial z} - (\frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial z})\frac{\partial \Phi}{\partial p} - (\frac{\partial F}{\partial y} + q\frac{\partial F}{\partial z})\frac{\partial \Phi}{\partial q} = 0.$$

Одавде, $\Phi$ се може одредити из система

$$\frac{dx}{\frac{\partial F}{\partial p}} = \frac{dy}{\frac{\partial F}{\partial q}} = \frac{dz}{p\frac{\partial F}{\partial p} + q\frac{\partial F}{\partial q}} = -\frac{dp}{\frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{dq}{\frac{\partial F}{\partial y} + q\frac{\partial F}{\partial z}}$$