Тачке нагомилавања низова

До сада, осим на неколико примера, разматрали смо искључиво низове који конвергирају, прецизније, теорија којом смо се бавили односила се само на конвергентне низове. Како нису сви низови такви, идеја је дакле даље да посматрамо гранично понашање низова који нису обавезно конвергентни. За почетак, дефинишемо поднизове, на логичан начин

Дефиниција Нека је $n\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ строго растуће пресликавање природних бројева, тј.

$$n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$$

и нека је $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ низ реалних бројева. За низ $a \circ n\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ кажемо да је подниз низа a.

Дати подниз углавном означавамо са a_{n_k}, где је $k \in \mathbb{N}$. Дакле, подниз низа a_n је опет низ који се састоји од неких чланова низа a_n, у нотацији из дефиниције баш од чланова $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots$ Такође, сачуван је исти поредак међу члановима какав је био и код низа a што имамо из претпоставке да је пресликавање n строго растуће.

Уколико посматрамо конвергентан низ, његови подниѕови такође конвергирају, прецизније важи

Став Уколико низ има граничну вредност a тада и сваки његов подниз a_{n_k} има граничну вредност a.

Доказ следи из тога што по претпоставци имамо да је пресликавање n строго монотоно растуће, одакле имамо да су индекси n_k произвољно велики када је k произвољно велико. Заиста, како $a_n \to a$, односно $|a_n - a| < \varepsilon$ за $n > N$, имаћемо из поменуте монотоности да је $n_k > N$ за све $k > K$. Али тада је $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$ односно $a_{n_k} \to a$.

Са друге стране, подниѕови могу да конвергирају иако сам низ не конвергира. Одатле имамо следећу дефиницију

Дефиниција За тачку $a \in \mathbb{R}$ кажемо да је тачка нагомилавања низа a_n уколико постоји подниз a_{n_k} који конвергира ка a када $k \to \infty$.

Уколико низ конвергира, лимес је његова једина тачка нагомилавања, што је у суштини реформулација претходног става.

Низ не мора да конвергира а може да има тачке нагомилавања. Архипример је низ $a_n = (-1)^n$, који има две тачке нагомилавања 1 и -1, којима конвергирају његови подниѕови a_{2n} и a_{2n+1} респективно.

Другачија карактеризација тачака нагомилавања је следећа

Став Тачка $a \in \overline{\mathbb{R}}$ је тачка нагомилавања низа a_n ако и само ако за сваку околину U тачке a и свако $n \in \mathbb{N}$ постоји $r > n$ такво да је $a_r \in U$.

Ако погледамо формулацију претходног става, она у суштини каже да је a тачка нагомилавања уколико за сваку околину имамо произвољно велике индексе r такве да се одговарајући чланови низа налазе у тој околини. Тада се од тих произвољно великих индекса може саставити подниз. Други смер следи директно из претходног става. Детаљи се могу погледати у књизи.

Претходни став показује разлику између лимеса и тачке нагомилавања. У дефиницији лимеса имамо да у произвољној околини су сви чланови низа почевши од неког, односно ван те околине се налази највише првих коначно много чланова. Са друге стране, претходни став каже да се у произвољној околини тачке нагомилавања налази бесконачно много чланова низа, али не говори ништа о томе колико има чланова ван те околине (тј. и ван ње их може бити бесконачно много).

Приметимо још да тачка нагомилавања низа није исто што и тачка нагомилавања скупа његових вредности $\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$. Примера ради, скуп вредности низа $a_n = (-1)^n$ је $\{-1, 1\}$, који нема тачке нагомилавања. Дакле разлика је у томе што смо у дефиницији тачке нагомилавања скупа захтевали да у свакој околини постоји барем једна тачка различита од ње саме. Са друге стране помоћу низова се може дати још једна карактеризација тачака нагомилавања скупа.

Став Тахцка $a \in \overline{\mathbb{R}}$ је тачка нагомилавања скупа A ако и само ако постоји низ a_n различитих елемената скупа A, такав да $a_n \to a$.

Доказ се може наћи у књизи.

Најзад, важно својство низова исказано је у наредној теореми, коју по аналогији исто називамо Болцано - Вајерштрасовом Теоремом.

Теорема

1. Сваки ограничен низ има барем једну тачку нагомилавања у $\mathbb{R}$.
2. Сваки низ има барем једну тачку нагомилавања у $\overline{\mathbb{R}}$.

Доказ се у потпуности своди на одговарајуће тврђење за скупове. Заиста ако је скуп вредности $\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ бесконачан, тачка нагомилавања тог скупа, која знамо да постоји из аналогне теореме за скупове, је и тачка нагомилавања низа a_n. Уколико је скуп вредности коначан, тада низ a_n узима неку од тих вредности бесконачно много пута (у супротном би низ имао коначно много чланова) и опет је та вредност тачка нагомилавања. Детаљи се могу наћи у књизи.

Кошијеви низови

Приметимо да у дефиницији лимеса, унапред морамо да знамо да је неки број лимес низа да би формулисали услов да низ ка том броју конвергира. Такође, приметимо да уколико низ конвергира, сви његови чланови почевши од неког су близу лимеса, а самим тим и међусобно су близу. Отуда, имамо мотивацију за наредну дефиницију

Дефиниција За низ реалних бројева a_n кажемо да је Кошијев низ уколико за свако $\varepsilon > 0$ постоји $N \in \mathbb{N}$,

такво да за све $m, n > N$ важи $|a_m - a_n| < \varepsilon$.
Претходна формулација је само у терминима чланова низа, дакле не претпостављамо постојање неке нове тачке са неким својствима.
Основна својства Кошијевих низова исказана су у следећем ставу
Став
1. Сваки конвергентан низ је Кошијев.
2. Сваки Кошијев низ је ограничен.
3. Уколико Кошијев низ има конвергентан подниз, тада и он сам конвергира.

Доказ погледати у књизи.
Питање које се поставља је да ли важи обрат тврђења 1. Одговор на то називамо Кошијевим принципом конвергенције.
Теорема Сваки Кошијев низ у $\mathbb{R}$ конвергира.
Претходна теорема је заправо директна последица неколико раније поменутих ствари. Нека је a_n Кошијев низ. Тада је он ограничен по претходном ставу. Одатле он има тачку нагомилавања по одговарајућој Болцано - Вајерштрасовој теореми, односно има подниз који конвергира. Самим тим он конвергира и сам, опет по претходном ставу.
Напоменимо само да се претходна теорема односи на својство простора, а не на својство низова. У принципу, за Кошијеве низове очекујемо да конвергирају као низови, а питање да ли конвергирају се односи на то да ли простор садржи те тачке које би требало да буду лимеси тих низова. Примера ради, претходна теорема не важи за рационалне бројеве, прецизније, ако имамо Кошијев низ рационалних бројева он не мора да има за лимес рационалан број (наравно по претходној теореми мора да има реалан број за лимес). Заиста, низ $(1 + 1/n)^n$ се састоји од рационалних бројева и конвергира, одакле следи да је Кошијев, али лимес му је e који није рационалан број.