Непрекидне функције

У пертходним разматрањима граничне вредности, функција није морала бити дефинисана у самој тачки у којој тражимо граничну вредност. Међутим, на већини примера које смо видели, то јесте случај, а чак и више, гранична вредност је сама вредност функције у тој тачки. Тај случај представља важан појам у математици и издвајамо га посебном дефиницијом

Дефиниција Нека је $f\colon A \to \mathbb{R}$, где је $A \subset \mathbb{R}$ и $a \in A$. Кажемо да је функција f непрекидна у тачки a, ако за сваку околину V тачке $f(a)$ постоји околина U тачке a таква да је $f(U \cap A) \subset V$.

Слично као код граничних вредности, еквивалентна $\varepsilon - \delta$ дефиниција гласи

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A)(|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$

Претходна дефиниција има неке разлике у односу на дефиницију граничне вредности. Прво, као што је на почетку поменуто, f мора бити дефинисана у тачки a, а како и посмтрамо гранично понашање близу $f(a)$ нема смисла да узимамо пробушене околине као код лимеса. Друго, нисмо захтевали да је a тачка нагомилавања скупа a, што и не мора да буде. Ипак, тај случај је тривијалан, јер уколико је a није тачка нагомилавања скупа A, тада постоји околина U тачке a у којој нема других тачака скупа A осим ње саме, а тада је $f(U \cap A) = f(\{a\}) = \{f(a)\}$. Како свака околина тачке $f(a)$ садржи $f(a)$ то је функција увек непрекидна у таквној тачки.

Са друге стране, уколико a јесте тачка нагомилавања, дефниција је непрекидности еквивалентна је томе да је $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, а тиме важи

Став Нека је $f\colon A \to \mathbb{R}$, где је $A \subset \mathbb{R}$ и $a \in A$ тачка нагомилавања скупа A. Тада су следећа тврђења еквивалентна:

1. Функција f је непрекидна у тачки a.
2. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.
3. За сваки низ $x_n \in A$, за који је $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, важи $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.

Из претходног става специјално имамо да су раније уведене експоненцијална и логаритамска функција непрекидне, као и синусна и косинусна функција. Такође, директно се види да су константна функција $f(x) = c$ и идентичка $f(x) = x$ непрекидне.

Са друге стране, функција $f(x) = [x]$ није непрекидна у целобројним тачкама, јер у њима нема граничну вредност. Од до сада поменутих функција, Дирихлеова функција није непрекидна ни у једној тачки.

По логици ствари, уколико функција $f\colon A \to \mathbb{R}$ није непрекидна у тачки a, ту тачку називамо тачком прекида функције f.

Слично као код испитивања граничних вредности, Хајнеово својство из претходног става (тј. непрекидност преко низова) није згодна за показивање да је функција непрекидна у некој тачки, али може се искористити за показивање да је нека тачка прекид функције. Заиста, за то је довољно наћи један низ $x_n \to a$, такав да $f(x_n)$ не конвергира, или не конвергира ка $f(a) itd$. Тачке прекида даље класификујемо са

Дефиниција Нека је $f\colon A \to \mathbb{R}$ и a тачка прекида функције f. Кажемо да је тачка a :

1. Прекид прве врсте ако постоје леви и десни лимес (прецизније, они који имају смисла) функције f у тачки a. Уколико су они још и једнаки, кажемо да је прекид a отклоњив.
2. Прекид друге врсте, уколико није прекид прве врсте.

Приметимо да уколико је прекид отклоњив, тада можемо дефинисати функцију

$$\overline{f} = \begin{cases} f(x), x \in A \setminus \{a\} \\ \lim_{x\to a} f(x), x = a \end{cases}$$

која ће бити непрекидна у тачки a, одакле и долази нотација.

Од претходних примера, функција $f(x) = [x]$ има прекид прве врсте у свакој целобројној тачки, док Дирихлеова функција има прекид друге врсте у свакој тачки.

Још један често цитиран пример функције са прекидом друге врсте је $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, која има прекид друге врсте у нули.

Локална својства непрекидних функција

Локалним својствима непрекидних функција називамо она својства која непрекидна функција има у околини тачке у којој је непрекидна и суштински су својства граничних вредности. Као што ћемо видети, наредна тврђења биће само реформулације одговарајућих ставова лимеса функције, уз коришћење претходног става, да је функција непрекидна у тачки ако је $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Став Нека је $f\colon A \to \mathbb{R}$ непрекидна у тачки $a \in A$. Тада

1. Постоји околина U тачке a на којој је f ограничена.
2. Ако је $f(a) \neq 0$, тада постоји околина U на којој f има сталан знак, прецизније да за све $x \in U$, знак $f(x)$ је исти као знак $f(a)$.

Што се алгебарских својстава тиче важи

Став Нека су $f, g\colon A \to \mathbb{R}$ функције непрекидне у тачки $a \in A$. Тада су и функције $f \pm g, fg, f/g$ непрекидне у тачки a (последња уз услов $g(a) \neq 0$).

Вратимо се сада на Теорему о лимесу сложене функције. Као што смо раније видели, да би она важила,

осим услова да је $\lim_{x\to a} f(x) = b$ и $\lim_{x\to b} g(x) = c$ било нам је потребно и да f има околину на којој не узима вредност b. Приметимо да у случају када је g непрекидно тај услов нам није неопходан. Прециније
Став Нека су $f\colon A \to B$ и $g\colon B \to \mathbb{R}$ функције, a тачка нагомилавања скупа $A, \lim_{x\to a} f(x) = b$ и нека је још g непрекидна у тачки b. Тада је

$$\lim_{x\to a} g \circ f(x) = g(b).$$

Доказ Нека је W околина тачке $g(b)$. Тада постоји околина V тачке b, таква да је $g(V) \subset W$, а даље, постоји и околина U тачке a таква да је $f(U \setminus \{a\}) \subset V$. Одатле имамо $g \circ f(U \setminus \{a\}) = g(f(U \setminus \{a\})) \subset g(V) \subset W$, одакле следи тврђење става.
Последица претходног става, је да под истим претпоставкама, уколико је f непрекидна у тачки a и g непрекидна у тачки $b = f(a)$, тада је композиција $g \circ f$ непрекидна у тачки a.
Из претходних резултата имамо за још неке примере основних функција да су непрекидне. Прецизније
1. Полиноми су непрекидне функције. Заиста, сваки полином се може добити после коначно много корака множењем и сабирањем функција $f(x) = x$ и $f(x) = c$, које су непрекидне. Отуда по претпоследњем ставу су полиноми непрекидни у свакој тачки домена.
2. Приметимо да је функција $f(x) = \frac{1}{x}$ непрекидна у свим тачкама (овако како смо дефинисали непрекидност). За тачке $x \neq 0$ то следи из претпоследњег става, а у осталим тачкама није дефинисана, те и нема смисла испитивати непрекидност. Слично имамо и да су рационалне функције (дакле, функције облика $\frac{p(x)}{q(x)}$ где су p и q полиноми) непрекидне, као и преостале тригонометријске функције.
3. Степена функција је непрекидна у свим тачкама домена, јер се може представити као композиција $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ непрекидних функција.

Глобална својства непрекидних функција

Глобалним својствима називаћемо она својства непрекидних функција која имају уколико су непрекидне у свакој тачки свог домена. У складу са тиме, нотације ради дефинишемо
Дефиниција За функцију $f\colon A \to \mathbb{R}$ кажемо да је непрекидна на скупу A уколико је непрекидна у свакој тачки скупа A.
Уобичајена је ознака $C(A)$ за скуп свих функција које су непрекидне на скупу A.
Прво глобално својство које наводимо је тзв. Коши - Болцанова Теорема о међувредности
Теорема Нека је $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ непрекидна функција и нека је $f(a) = A$ и $f(b) = B$. Тада за сваку број C који се налази између A и B постоји $c \in (a,b)$ такво да је $f(c) = C$. Специјално, уколико су $f(a)$ и $f(b)$ различитих знакова, тада постоји $c \in (a,b)$ такво да је $f(c) = 0$.
Доказ погледати у књизи.
Претходна Теорема донекле оправдава име непрекидна функција, јер одговара томе, што би се неформално рекло, да се график непрекидне црта без подизања оловке са папира. Дакле, ако непрекидна функција узме две вредности, мора да узме и све вредности између.
Такође важно, у претходној Теореми је битан услов да је домен интервал. Нпр, ако узмемо функцију $f(x) = x$ на скупу $[-1,0) \cup (0,1]$ она узима и негативне и позитивне вредности али не узима вредност 0.
Следеће важно својство непрекидних функција назива се Вајерштрасовом Теоремом.
Теорема Нека је $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ непрекидна функција. Тада је f ограничена и достиже минимум и максимум. Прецизније, постоје тачке $m, M \in [a,b]$ такве да је $f(m) = \min_{x\in[a,b]} f(x)$ и $f(M) = \max_{x\in[a,b]} f(x)$.
Доказ погледати у књизи.
Опет, у претходној Теореми је битно да је домен сегмент $[a,b]$. Нпр. функција $f(x) = \frac{1}{x}$ није ограничена на скупу $(0,1]$. Такође, функција $f(x) = x$ не достиже ни минимум ни максимум на скупу $(0,1)$.

Равномерна непрекидност

Погледајмо опет дефиницију непрекидности функције f на скупу A :

$$(\forall x_0 \in A)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta)(\forall x \in A)(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon).$$

Ако кренемо редом, прво узимамо произвољну тачку x_0 потом изаберемо $\varepsilon > 0$ које хоћемо и на крају, у зависности од x_0 и ε тражимо δ које ће испунити тражени услов. Дакле, δ бирамо у зависности од x_0 и ε. Донекле мотивисано одатле, поставље се питање да ли можемо да тражимо да δ бирамо само у зависности од ε. Прецизније
Дефиниција За функцију $f\colon A \to \mathbb{R}$ кажемо да је равномерно непрекидна на скупу A ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ такво да за тачке x_1, x_2 за које је $|x_1 - x_2| < \delta$, важи $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. Логички записано

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x_1, x_2 \in A)(|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon).$$

Назив равномерна долази из претходног разматрања, да бирамо једно δ које одговара (равномерно) свим тачкама $x_0 \in A$. Логички гледано, разлика је у томе што је квантификатор $\forall x_0 \in A$ заменио места, тј. записан је после $\exists \delta > 0$. Мада делује вештачки, а такође претходна дефиниција неће бити поткрепљена лепим примерима на овом курсу, претходна идеја је важна и често се јавља у математици. За сада приметимо прво да је равномерно непрекидна функција и непрекидна. Даље, размотримо неке примере

1. Функција $f(x)=x$ равномерно је непрекидна на $\mathbb{R}$. Заиста за $\varepsilon>0$ можемо да изаберемо $\delta=\varepsilon$, за које имамо

$$\left|f(x_1)-f(x_2)\right|=\left|x_1-x_2\right|<\delta=\varepsilon,$$

уколико је $|x_1-x_2|<\delta$. Тиме је ова функција равномерно непрекидна.

2. Слично, функција $f(x)=\sin x$ је равномерно непрекидна на $\mathbb{R}$, што се своди на својство синуса $|\sin x_1-\sin x_2|\leqslant|x_1-x_2|$. Тада као у претходном избором $\varepsilon=\delta$, за $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ за које је $|x_1-x_2|<\delta$ имамо аналогно

$$\left|f(x_1)-f(x_2)\right|=\left|\sin x_1-\sin x_2\right|\leqslant\left|x_1-x_2\right|<\delta=\varepsilon.$$

3. Потпуно аналоган закључак је за сваку функцију за коју важи $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant C|x_1-x_2|$, где је C константа. Конкретно, за изабрано $\varepsilon>0$ бирамо $\delta=\frac{\varepsilon}{C}$.

4. Функција $f(x)=\frac{1}{x}$ није равномерно непрекидна на $(0,1]$. Ово генерално најчешће показујемо налажењем два низа x_n и y_n за које $|x_n-y_n|\to 0$, док $|f(x_n)-f(y_n)|$ не тежи нули. У овом конкретном случају посматрајмо низове $x_n=\frac{1}{n}$ и $y_n=\frac{1}{n+1}$. Тада је $|y_n-x_n|=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}\to 0$. Са друге стране је $f(y_n)-f(x_n)=1$. Дакле, уколико изаберемо $\varepsilon=\frac{1}{2}$ (или било шта мање од 1) које год $\delta>0$ да узмемо, како $|y_n-x_n|$ тежи нули, то је за довољно велико n и $|y_n-x_n|<\delta$, а и даље је $f(y_n)-f(x_n)=1$, што није мање од ε. Тиме, ова функција није равномерно непрекидна.

5. Функција $f(x)=x^2$ није равномерно непрекидна на $\mathbb{R}$. У овом случају посматрајмо низове $x_n=\sqrt{n}$ и $y_n=\sqrt{n+1}$. Тада је $|y_n-x_n|=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\to 0$, а имамо и да је $f(y_n)-f(x_n)=1$. Аналогно, уколико изаберемо $\varepsilon=\frac{1}{2}$ (или опет било шта мање од 1) које год $\delta>0$ да узмемо, како $|y_n-x_n|$ тежи нули, то је за довољно велико n и $|y_n-x_n|<\delta$, а и даље је $f(y_n)-f(x_n)=1$, што није мање од ε. Тиме, ова функција није равномерно непрекидна.

Још неки примери се могу погледати у књизи.

Избор низова у последњем примеру да теже ка $+\infty$ није био случајан, прецизније мотивисан је следећом Теоремом, која се назива још Канторова Теорема о равномерној непрекидности.

Теорема Свака непрекидна функција $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ равномерно је непрекидна на $[a,b]$.

Доказ Претпоставимо супротно да f није равномерно непрекидна на скупу $[a,b]$. Негацијом дефиниције равномерне непрекидности имамо

$$(\exists\varepsilon>0)(\forall\delta>0)(\exists x,y\in A)(|x-y|<\delta\wedge|f(x)-f(y)|\geqslant\varepsilon).$$

Узмимо онда такво $\varepsilon>0$ и по претходном за $\delta=\frac{1}{n}$ постоје x_n и y_n такви да је $|x_n-y_n|<\frac{1}{n}$ и $|f(x_n)-f(y_n)|\geqslant\varepsilon$. Приметимо, низ x_n припада $[a,b]$, чиме је ограничен, а одатле, по Болцано - Вајерштрасовом својству има конвергентан подниз x_{n_k}, који конвергира ка неком c. Наравно и $x_{n_k}\in[a,b]$, односно $a\leqslant x_{n_k}\leqslant b$, па пуштањем лимеса кроз претходне неједнакости, како лимес чува знак $\leqslant$, то имамо и да је $a\leqslant c\leqslant b$. Даље, како је $|x_{n_k}-y_{n_k}|\leqslant\frac{1}{n_k}\to 0$, то и низ $y_{n_k}\to c$. Међутим, ово је контрадикција по Хајнеовој Теореми, тј. јер је f непрекидна у c. Заиста, низови x_{n_k} и y_{n_k} конвергирају ка c, а тиме по Хајнеу $f(x_{n_k})$ и $f(y_{n_k})$ конвергирају ка $f(c)$, међутим $|f(x_{n_k})-f(y_{n_k})|\geqslant\varepsilon$ што не тежи нули.

Непрекидност и монотоност

Пре него што формулишемо услове под којима је инверзна функција непрекидне функције непрекидна, посматрајмо основне везе између појмова непрекидности и монотоности. За почетак, у терминима непрекидности, реформулишимо тврђење које се односи на леве и десне лимесе монотоне функције.

Став Нека је $f\colon A\to\mathbb{R}$ монотона функција. Тада она има само прекиде прве врсте и то њих највише пребројиво много.

Даље, за монотону функцију, у неком смислу, важи обрат Коши - Болцанове Теореме.

Став Нека је $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ монотона функција, таква да за сваку вредност C између $f(a)$ и $f(b)$ постоји $c\in[a,b]$ такво да је $f(c)=C$ (другачије речено, слика интервала $[a,b]$ при пресликавању f је интервал са крајевима $f(a)$ и $f(b)$). Тада је f непрекидна на $[a,b]$.

Доказ се у суштини опет своди на претходни став. Како f има увек леви и десни лимес у свакој тачки, она у тој тачки има прекид ако одговарајући лимес нису једнаки вредности f. Прецизније ако узмемо да је f нпр. растућа, тада је увек $\lim_{x\to d-}f(x)\leqslant f(d)\leqslant\lim_{x\to d+}f(x)$ и има прекид у d ако неки од два лимеса није једнак вредности $f(d)$. Нека је нпр. $f(d)<\lim_{x\to d+}f(x)$. Тада било који број између поменута два није у слици f. Детаље погледати у књизи.

Став Нека је $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ непрекидна и $1-1$. Тада је f строго монотона.

Овај став је последица Коши - Болцанове Теореме. Наиме, уколико f не би била строго монотона, тада би постојале три тачке $x_1<x_2<x_3$ такве да вредности $f(x_1),f(x_2)$ и $f(x_3)$ нису монотоно поређане. Ако узмемо да је нпр. $f(x_2)<f(x_1)<f(x_3)$ тада би постојала тачка $d\in(x_2,x_3)$ таква да је $f(d)=f(x_1)$ односно f није $1-1$. Исто се дешава у свим осталим распоредима.

Резимирајмо претходне теореме.

Теорема Нека је $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ непрекидна и строго монотона (или еквивалентно $1-1$) функција и нека је $B=f([a,b])$. Тада је B интервал са крајевима $f(a)$ и $f(b)$ и $f^{-1}\colon B\to\mathbb{R}$ је непрекидна и строго монотона.

Доказ Да је B интервал следи из Коши - Болцанове Теореме, а да има наведене крајеве следи из монотоности f. Прецизније $B = [f(a), f(b)]$ ако је f растућа, односно $B = [f(b), f(a)]$ ако је опадајућа. Даље, $f^{-1}\colon B \to [a, b]$ је строго монотона, а како јој је слика интервал, то је и непрекидна по другом наведеном ставу у овом делу.

Елементарне функције

Нотације ради, мало формалније уведимо класу функција са којом се најчешће бавимо.

Дефиниција Основне елементарне функције су константе, идентичка функција, експоненцијална и логаритамска, степена, тригонометријске функције и инверзне тригонометријске функције.

Дефиниција Елементарне функије су оне које чине најмању класу $\mathcal{E}$ функција са својствима:

1. Ако је f основна елементарна, тада је $f \in \mathcal{E}$.
2. Ако су $f_1, f_2 \in \mathcal{E}$, онда су и $f_1 \pm f_2 \in \mathcal{E}, f_1 f_2 \in \mathcal{E}$ и $\frac{f_1}{f_2} \in \mathcal{E}$, све на одговарајућим доменима.
3. Ако су $f_1, f_2 \in \mathcal{E}$, тада је и $f_2 \circ f_1 \in \mathcal{E}$, опет, где наведена композиција има смисла.

Дакле, елементарне функција су све оне које се од основних елементарниј могу добити коначном применом алгебарских операција и композиције функција. На основу непрекидности основних елементарних функција, као и из тога да су збир, производ, количник и композиција непрекидних функција непрекидне имамо

Теорема Све елементарне функције су непрекидне.

Одавде видимо да имамо функције које нису елементарне, примера ради таква је Дирихлеова функција.