датум: 9.5.2012.

-Лапласова трансформација-

Фуријеова трансф.: $f \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-ixy} dy$ $\quad \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty$ — превелик захтев — ф-ја апсолутно интеграбилна

-да ли постоји нека трансформација која има употребну вредност

Дефиниција: Функцију f зовемо оригиналом ако је она комплексно вредносна функција реалног аргумента која задовољава следеће услове:

1. Непрекидна је на $\mathbb{R}$ или на неком скупу тачака где има прекиде само прве врсте и на сваком коначном интервалу реалне осе има само коначно много прекида
2. $f(t) = 0$ за $t < 0$
3. $\exists M, s$ $\quad |f(t)| \leq Me^{st} \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

$s_0 = \inf \{ s : \exists M > 0 \text{ и } |f(t)| \leq Me^{st} \ \forall t \in \mathbb{R} \}$

$\downarrow$

показатељ раста $\quad |f(t)| \leq Me^{(s_0+\varepsilon)t} \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Дефиниција: Ако је f оригинал онда функцију $p \longmapsto \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)\, dt = F(p)$ називамо Лапласовом трансформацијом оригинала f.

s_0 - показатељ раста f $\quad s_1 > s_0 \quad |f(t)| \leq Me^{s_1 t} \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$|e^{-pt} f(t)| = e^{-t \operatorname{Re} p} |f(t)| \leq Me^{-t(\operatorname{Re} p - s_1)}$

уколико је $\operatorname{Re} p > s_1$ онда због конвергенције $\int_0^{\infty} e^{-t(\operatorname{Re} p - s_1)} dt < +\infty$ тада посматрани интеграл конвергира апсолутно

$\mathcal{L}(f)(p) = F(p)$

$\mathcal{L}(f^{(n)})(p) = p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$

$y'' + ay' + by = f(x)$

Означимо са $\mathcal{L}(y)(p) = Y(p)$

$y(0) = A$ $\quad \mathcal{L}(f)(p) = F(p)$

$y'(0) = B$ примјенимо Лапласову трансформацију:

$$\mathcal{L}(y'') + a\,\mathcal{L}(y') + b\,\mathcal{L}(y) = F(p)$$

$$p^2 Y(p) - pA - B + a(pY(p) - A) + bY(p) = F(p)$$

$$Y(p)(p^2 + pa + b) = F(p) + pA + aA + B$$

$$\Rightarrow Y(p) = \frac{F(p)}{p^2+pa+b} + \underbrace{\frac{pA+aA+B}{p^2+ap+b}}_{\text{оригинал није тешко наћи}}$$

$g_1(x)$: $\mathcal{L}(g_1)(p) = \dfrac{pA+aA+B}{p^2+ap+b}$ (погодни је поступак)

$g_2(x)$: $\mathcal{L}(g_2)(p) = \dfrac{1}{p^2+ap+b}$

$Y(p) = \mathcal{L}(y)(p) = \mathcal{L}(f)(p) \cdot \mathcal{L}(g_2)(p) + \mathcal{L}(g_1)(p)$

$\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(f * g_2) + \mathcal{L}(g_1)$

$y = f * g_2 + g_1$

$y(x) = \int_0^x f(s)\, g_2(x-s)\, ds + g_1(x)$

исто се ради за виши ред

Мотивација: Нехомогена једначина са константним коефицијентима

$$Lx = x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x \qquad a_i = const.$$

$$Lx = f(t)$$ t - независна променљива

$$x(0) = x'(0) = \dots = x^{(n-1)}(0) = 0$$

- брзо налажење решења

$$Lx = 1$$

$$x(0) = x'(0) = \dots = x^{(n-1)}(0) = 0$$

Формула Духамела (Duhamel)

f, φ оригинали f непрекидна на $(0, +\infty)$

φ непрекидно диференцијабилна на $(0, \infty)$

$$\mathcal{L}(f)(p) = F(p)$$

$$\mathcal{L}(\varphi)(p) = \Phi(p)$$ сматрамо $\psi(t) = \int_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)\,d\tau$ конволуцију

$$\mathcal{L}(\psi)(p) = F(p)\Phi(p)$$

$$\psi'(t) = \int_0^t f(\tau)\varphi'(t-\tau)\,d\tau + f(t)\varphi(0)$$

$$\mathcal{L}(\psi')(p) = \mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tau)\varphi'(t-\tau)\,d\tau + \varphi(0)f(t)\right)$$

$$\|$$

$$p\mathcal{L}(\psi)(p) - \psi(0)$$

$$\|$$

$$pF(p)\Phi(p)$$

$$\left[\mathcal{L}\left(\varphi(0)f(t) + \int_0^t f(\tau)\varphi'(t-\tau)\,d\tau\right) = pF(p)\Phi(p)\right]$$

Нека је $x_1 : \; Lx_1 = 1$

$$x_1(0) = x_1'(0) = \dots = x_1^{(n-1)}(0) = 0$$

нека је $x : \; L(x) = f(t)$

$$x(0) = x'(0) = \dots = x^{(n-1)}(0) = 0$$

Применимо Лапласову трансформацију

$$X_1(p) = \mathcal{L}(x_1)(p)$$

$$\mathcal{L}(Lx_1)(p) = A(p)\, X_1(p) = \mathcal{L}(1) \quad \text{где је } A(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n$$

карактеристични

$$X(p) = \mathcal{L}(x)(p)$$

$$\mathcal{L}(Lx) = \mathcal{L}(Lx) = \mathcal{L}(f) = A(p)\cdot X(p)$$

полином, остали чланови су нула због услова

$$\Downarrow$$

Duhamel

$$\left.\begin{array}{l} A(p)\, X(p) = F(p) \\ A(p)\, X_1(p) = \frac{1}{p} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{X(p)}{X_1(p)} = p\,F(p) \Rightarrow X(p) = p\,F(p)\,X_1(p)$$

$$= \mathcal{L}\Big(f(t)\underbrace{x_1(0)}_{0} + \int_0^t f(\tau)\, x_1'(t-\tau)\, d\tau\Big)$$

$$\Rightarrow X(p) = \mathcal{L}(x)(p) = \mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tau)\, x_1'(t-\tau)\, d\tau\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{x(t) = \int_0^t f(\tau)\, x_1'(t-\tau)\, d\tau}$$

*шта ако имамо $x_0^{(\nu)} = A_\nu \quad \nu = 0, 1, \dots, n-1$

$$x(t) = P_{n-1}(t) + z(t)$$

$$x^{(\nu)}(0) = P_{n-1}^{(\nu)}(0) + z^{(\nu)}(0) = A_\nu$$

$$z^{(\nu)}(0) = A_\nu - P_{n-1}^{(\nu)}(0) \Rightarrow P_{n-1}^{(\nu)}(0) = A_\nu$$

Трансирамо да добијемо нову променљиву која има почетне услове 0!

$L x = L P_{n-1} + L z = f \qquad L z = \underbrace{f - L P_{n-1}}_{f_1}$

Пример:

$x' = -y \qquad x(0) = y(0) = 1 \qquad \mathcal{L}(x) = X(p)$

$y' = 2x + 2y \qquad \mathcal{L}(y) = Y(p)$

$$\mathcal{L}(x') = p X(p) - 1$$

$$\mathcal{L}(y') = p Y(p) - 1$$

$\mathcal{L}(x') = -\mathcal{L}(y) \Rightarrow p X(p) - 1 + Y(p) = 0$

$\mathcal{L}(y') = 2\mathcal{L}(x) + 2\mathcal{L}(y) \Rightarrow p Y(p) - 1 - 2X(p) + 2Y(p)$

$\Downarrow$

Крамер:

$$\begin{aligned} p X(p) + Y(p) &= 1 \quad / \cdot 2 \\ 2 X(p) + (2-p) Y(p) &= -1 \quad / \cdot (-p) \end{aligned}$$

$$X(p) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2-p \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p & 1 \\ 2 & 2-p \end{vmatrix}} = \frac{2-p+1}{p(2-p)-2} = \frac{3-p}{2p-p^2-2}$$

$$Y(p) = \frac{\begin{vmatrix} p & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p & 1 \\ 2 & 2-p \end{vmatrix}} = \frac{-p-2}{p(2-p)-2} = \frac{-(p+2)}{2p-p^2-2} = \frac{p+2}{p^2-2p+2}$$

Пример: Волтерова интегрална једначина друге врсте

$$\varphi(t) = f(t) + \int_0^t K(t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau$$

$\mathcal{L}(\varphi) = \Phi(p) \qquad \varphi = f + K * \varphi$

$\mathcal{L}(f) = F(p) \qquad \Rightarrow \Phi = F + K \cdot \Phi$

$\mathcal{L}(K) = K(p) \qquad \Phi(p) = \dfrac{F(p)}{1 - K(p)}$

Конкретан пример: $\varphi(t) = t + \int_0^t \sin(t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau$

$k(t) = \sin t$

$f(t) = t$

$\mathcal{L}(k) = \frac{1}{1+p^2}$ (таблица)

$\mathcal{L}(f) = \frac{1}{p^2}$

$$\Rightarrow \Phi(p) = \frac{\frac{1}{p^2}}{1-\frac{1}{1+p^2}} = \frac{1+p^2}{p^4} = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^4}$$

$$\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{p^{n+1}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{L}(t) = \frac{1}{p^2} \\ \mathcal{L}\left(\frac{t^3}{6}\right) = \frac{1}{p^4} \end{array}\right\} \Rightarrow \Phi(p) = \mathcal{L}\left(t + \frac{t^3}{6}\right)(p)$$

$$\Rightarrow \varphi(t) = t + \frac{t^3}{6}$$

датум: 16. 5. 2012.

<u>Хилбертов простор</u>

X – векторски простор над $\mathbb{R}, \mathbb{C}$

Дефиниција: $\|\ \| : X \to [0, +\infty)$ норма

1° $\|x\| = 0 \iff x = 0$

2° $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$

3° $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

X са $\|\ \|$ дефинисаном је нормиран векторски простор.

X са $d(x,y) = \|x-y\|$ и деф. нормом је метрички простор.

(X, d) метрички простор, у њему низ $x_n \in X$, $x_n \to x \in X$ за $d(x_n, x) \to 0$ тј. одавде $\|x_n - x\| \to 0$.

Особине норме и непрекидност операција сабирања и множења скаларом:

1° $\left.\begin{array}{l} x_n \to x \\ y_n \to y \end{array}\right\} \Rightarrow x_n + y_n \to x + y$

$2°$ $\left.\begin{array}{l} \lambda_n \to \lambda \\ x_n \to x \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_n x_n \to \lambda x$

$3°$ $x_n \to x \Rightarrow \|x_n\| \to \|x\|$ непрекидност норме

H - векторски простор над $\mathbb{R}, \mathbb{C}$

дефиниција: Нека је дефинисана $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to$ у поље $(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ у зависности од тога над којим пољем је дефинисан H која има следеће особине:

$1°$ $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in H, \; \lambda \in$ пољу

$2°$ $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle \quad \forall x_1, x_2, y \in H$

$3°$ $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \quad \forall x, y \in H$

$4°$ $\langle x, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in H$

$5°$ $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ се назива скаларним производом

Особине скаларног производа

$1°$ $\langle x, \lambda y \rangle = \overline{\lambda} \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in H, \; \forall \lambda \in$ пољу

$2°$ $\langle x, y_1 + y_2 \rangle = \langle x, y_1 \rangle + \langle x, y_2 \rangle$

3° $\langle \lambda x, \lambda y\rangle = |\lambda|^2 \langle x, y\rangle \quad \forall x, y \in H, \forall \lambda \in$ пољу

4° $|\langle x, y\rangle|^2 \le \langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle \quad \forall x, y \in H$ Кошијева неједнакост

5° $\sqrt{\langle x+y, x+y\rangle} \le \sqrt{\langle x, x\rangle} + \sqrt{\langle y, y\rangle} \quad \forall x, y \in H$

Доказ Кошијеве неједнакости: (4°)

$\lambda \in \mathbb{R}, \; x, y \in H$

на основу дефиниције 4)

$$\langle x + \lambda\langle x,y\rangle y, \; x + \lambda\langle x,y\rangle y\rangle \ge 0$$

$$\langle x, x\rangle + \lambda\langle x,y\rangle\langle y,x\rangle + \lambda\langle x,y\rangle\langle y,x\rangle + \lambda^2|\langle x,y\rangle|^2 \; + \lambda^2|\langle x,y\rangle|^2\langle y,y\rangle$$

$$\langle x, x\rangle + 2\lambda|\langle x,y\rangle|^2 + \lambda^2|\langle x,y\rangle|^2\langle y,y\rangle \ge 0$$

$$D \le 0 \qquad 4|\langle x,y\rangle|^4 - 4\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle|\langle x,y\rangle|^2 \le 0 \quad \blacksquare$$

особина 5°:

$$\langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle y,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle =$$
$$= \langle x,x\rangle + 2\,\mathrm{Re}\,\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle \le \langle x,x\rangle + 2|\langle x,y\rangle| +$$
$$+ \langle y,y\rangle \le \langle x,x\rangle + 2\sqrt{\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle} + \langle y,y\rangle =$$
$$= \left(\sqrt{\langle x,x\rangle} + \sqrt{\langle y,y\rangle}\right)^2$$

коректно $\blacksquare$

последица: $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \to$ норма на H $(H, \|\cdot\|)$ нормирани простор

$d(x,y) = \|x-y\|$ метрика на H

Дефиниција: Ако је векторски простор комплетан и има скаларни производ чиме је дефинисана метрика $d(x,y)=\|x-y\|$ где је норма $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$ назива се Хилбертов простор.

Примери: 1° $\mathbb{C}^n$

$$z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$$
$$w = (w_1, w_2, \dots, w_n) \qquad d(z,w) = \sqrt{}$$
$$\langle z, w\rangle = \sum_{\nu=1}^{n} z_\nu \overline{w_\nu}$$
$$\|z\| = \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} |z_\nu|^2}$$

2° Означимо са l^2 скуп свих низова $x=(x_1, x_2, \dots)$ у општем случају комплексних бројева тако да је

$p \geq 0$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$ сабирање се дефинише

$$\left.\begin{aligned} x &= (x_1, x_2, \dots) \\ y &= (y_1, y_2, \dots) \end{aligned}\right\} x+y = (x_1+y_1, x_2+y_2, \dots)$$

множење скаларом $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots)$

$$\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i} \qquad \left|\sum x_i \overline{y_i}\right| \leq \sum |x_i||y_i| \leq \sqrt{\sum |x_i|^2}\sqrt{|y_i|^2}$$

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2}$$

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^2}$$

$\mathcal{L}^2$ простор – Лебегов простор – непрекидна реализација

l^2 – Хилбертов простор

Дефиниција: Метрички простор се назива сепарабилним ако у њему постоји пребројив густ скуп тачака.

*Ако је Хилбертов простор сепарабилан тада је изометрично изоморфан простору l^2.

Дефиниција: Ако је H Хилбертов простор са скаларним производом $\langle \cdot , \cdot \rangle$ за векторе f, g кажемо да су ортогонални $f \perp g$ ако је $\langle f, g \rangle = 0$.

Ако имамо $f \perp g$ $\|f+g\|^2 = \langle f+g, f+g \rangle = \|f\|^2 + \|g\|^2$

$$\|f+g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2$$ што је Питагорина теорема.

Дефиниција: Скуп $S \subset H$ се назива конвексним ако је $\forall x, y \in S$ и $\forall \alpha \in [0,1]$ $\alpha x + (1-\alpha) y \in S$.

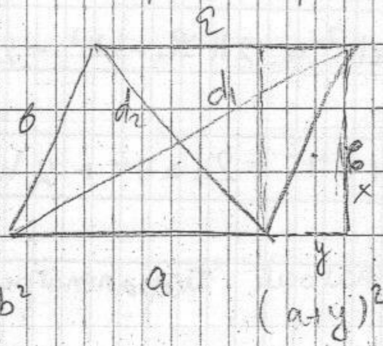
$$f, g \in H \Rightarrow \|f-g\|^2 + \|f+g\|^2 = 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2$$

$$\langle f-g, f-g \rangle + \langle f+g, f+g \rangle =$$

$$= \|f\|^2 - \langle g, f \rangle - \langle f, g \rangle + \|g\|^2 + \|f\|^2 + \langle f, g \rangle + \langle g, f \rangle + \|g\|^2 =$$

$$= 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2$$

Једнакост паралелограма → критеријум када је комплетан нормирани простор Хилбертов



$$d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$$

$x^2 + y^2 = b^2$ $(a+y)^2 + x^2 = d_1^2$ $d_2^2 = x^2 + (a-y)^2$

$x_n \to x$ $\quad \langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle$ непрекидна операција
$y_n \to y$

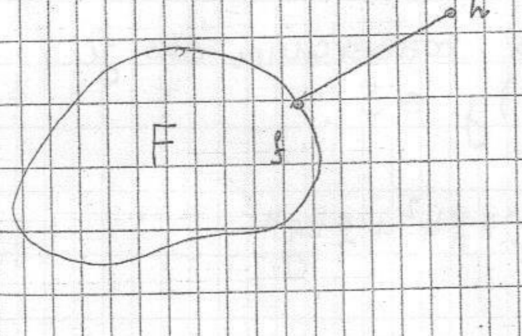
$$\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle = \langle x_n - x, y_n\rangle + \langle x, y_n\rangle - \langle x, y\rangle =$$
$$= \langle x_n - x, y_n\rangle + \langle x, y_n - y\rangle$$

H, $G \subset H$

$$G^{\perp} = \{ f \in H : \langle f, g\rangle = 0 \quad \forall g \in G \}$$

$$|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| \le$$
$$\le |\langle x_n - x, y_n\rangle| + |\langle x, y_n - y\rangle| \le$$
$$\le \underbrace{\|x_n - x\|}_{\downarrow\, 0} \underbrace{\|y_n\|}_{\text{ограничен}} + \|x\| \cdot \underbrace{\|y_n - y\|}_{\downarrow\, 0}$$

Теорема о најближем елементу: Нека је F непрекидан конвексан затворен подскуп H, $h \in H$.
Тада $\exists_1\, f \in F : \|h - f\| = \operatorname{dist}(h, F) =$
$\left(= \inf\limits_{g \in F} \|h - g\|\right)$



Доказ: почива на једнакости паралелограма

$$\delta = \operatorname{dist}(h, F) \Rightarrow \exists\, f_n \in F : \|h - f_n\| \to \delta$$

$$\|f_n - f_m\|^2 = 2\|f_n - h\|^2 + 2\|f_m - h\|^2 - 4\left\|\frac{f_n + f_m}{2} - h\right\|^2$$
$$\Leftrightarrow \|f_n - f_m\|^2 + \|f_n - h + f_m - h\|^2 = 2\|f_n - h\|^2 + 2\|f_m - h\|^2$$

$a = f_n - h$
$b = f_m - h$ $\qquad \|a - b\|^2 + \|a + b\|^2 = 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2$

$\downarrow$
једнакост паралелограма

$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt = \mathcal{L}(f)(p)$ $\quad f(t) \doteq F(p)$, $\quad F(p) \doteq f(t)$ — нотације

Тав: Ако је s_0 показатељ раста оригинала f тада је $F(p)$ аналитичка функција у полуравни $\operatorname{Re} p > s_0$.

$$\left(e^{-pt} f(t)\right)'_p = -t e^{-pt} f(t)$$

$$\left|t e^{-pt} f(t)\right| \le |t|\, e^{-t\operatorname{Re}p}\, e^{s_1 t} = |t|\, e^{-t\underbrace{(\operatorname{Re}p - s_1)}_{\varepsilon}}$$

$s_0 \quad s_1$

$$\int_0^\infty |t| e^{-\varepsilon t}\,dt < \infty \quad \text{конвергентан} \qquad \left|\frac{\partial}{\partial p} e^{-pt} f(t)\right| \le |t| e^{-\varepsilon t}$$

Вајерштрас! $\qquad \underline{\underline{\varepsilon > 0}}$

$$F'(p) = \int_0^\infty e^{-pt}(-t) f(t)\,dt$$ – има извод, значи има аналитичка је $\Leftarrow$ изводи свих редова

$$|F(p)| = \left|\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt\right| \le \int_0^\infty e^{-t\operatorname{Re}p} |f|\,dt \le \int_0^\infty e^{-\operatorname{Re}p\, t} M e^{s_1 t}\,dt =$$

$$= M \int_0^\infty e^{-t(\operatorname{Re}p - s_1)}\,dt = \frac{M}{\operatorname{Re}p - s_1} \xrightarrow{p \to \infty} 0$$

Особине Лапласове трансформације

Теорема:

1° Ако су f и φ оригинали $\Rightarrow \mathcal{L}(\alpha f + \beta \varphi)(p) =$
$= \alpha \mathcal{L}(f)(p) + \beta \mathcal{L}(\varphi)(p) \qquad \alpha, \beta = \text{const.}$

2° f оригинал $\quad \mathcal{L}(f(\alpha t))(p) = \frac{1}{\alpha} \mathcal{L}(f)\left(\frac{p}{\alpha}\right)$

3° ако је f оригинал и $f', \dots, f^{(n)}$ такође оригинали чији су редом показатељи раста $s_0, s_1, \dots s_n$ и нека $\mathcal{L}(f)(p) = F(p)$ тада је $\mathcal{L}(f^{(n)})(p) = p^n F(p) - Q(p)$
$Q(p) = p^{n-1} f(0) + p^{n-2} f'(0) + \dots + p f^{(n-2)}(0) + f^{(n-1)}(0)$

процена израза $\quad$ F конвексан

$$\frac{h_m+h_n}{2}\in F$$

$$\left\|\frac{h_m+h_n}{2}-h\right\|^2\geq \delta^2$$

2гена страна $\leq 2\|h_m-h\|^2+2\|h_n-h\|^2-4\delta^2 \xrightarrow[m,n\to\infty]{} 0$

$$\|h_m-h_n\| \xrightarrow[m,n\to\infty]{} 0$$

$\Downarrow$

(h_n) је Кошијев низ

$\Downarrow$ комплетан

због затворености F $\exists \lim_{n\to\infty} h_n = f\in F \Rightarrow$

$\Rightarrow \delta=\|h-f\|$

f је једина таква тачка

Ако $\exists f'\in F$ са истом особином: $\|h-f'\|=\delta$

тада би било

$$\|f-f'\|^2=2\|h-f\|^2+2\|h-f'\|^2-4\left\|\frac{f'+f}{2}-h\right\|^2$$

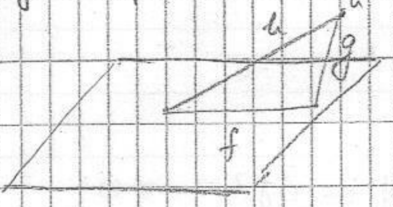
(помоћу једнакост паралелограма)

$$\leq 2\|h-f\|^2+2\|h-f'\|^2-4\delta^2=0$$

$$\Rightarrow f=f' \quad ↯$$

■

Теорема о пројекцији: H Хилбертов простор и $L = \bar{L} \subset H$ тада $\forall h \in H$ постоји $\exists_1 f \in L$ таква да је $h - f \overset{деф.}{=} g \in L^{\perp}$.



(доказ се ослања на претходни став)

Доказ: Према теореми о најближем елементу $\exists_1 f \in L : \operatorname{dist}(h, L) = \|h - f\|$

Треба доказати да је $h - f \perp L$

Претпоставимо супротно тј. нека постоји $f' \in L : \langle h - f, f' \rangle = \sigma$, $\sigma \neq 0$

Дефинишемо вектор $f'' = \underbrace{f}_{\in L} + \underbrace{\frac{\sigma}{\langle f', f' \rangle} f'}_{\in L}$

$$\Downarrow$$

$$f'' \in L$$

$$\|h - f''\|^2 = \|h - f - \frac{\sigma}{\langle f', f' \rangle} f'\|^2 \underset{\text{на основу особина скаларног производа}}{=} \|h - f\|^2 - \frac{|\sigma|^2}{\langle f', f' \rangle} < \|h - f\|^2$$

$\lightning$

лоша претпоставка $\leftarrow$ ово је најмање растојање

Дефиниција: H Хилбертов простор

$(e_i)_{i \in I} \subset H$ $\quad \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} \quad \forall i, j \in H$

ортонормирани скуп

Лема: $e_1, e_2, \dots, e_n$ ОНС у H

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$

$$\|f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\|^2 = \|f - \sum_{k=1}^{n} \langle f, e_k\rangle e_k\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k - \langle f, e_k\rangle|^2$$

Доказ: $$f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k = \underbrace{f - \sum_1^n \langle f, e_k\rangle e_k}_{F} + \underbrace{\sum_1^n (\langle f, e_k\rangle - \alpha_k) e_k}_{G}$$

$$F \perp G \Rightarrow \|f - \sum_1^n \alpha_k e_k\|^2 = \|f - \sum_1^n \langle f, e_k\rangle e_k\|^2 + \|\sum_1^n (\langle f, e_k\rangle - \alpha_k) e_k\|^2$$

Питагорина теорема

$$\|\sum_1^n (\langle f, e_k\rangle - \alpha_k) e_k\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k - \langle f, e_k\rangle|^2$$

Последица: $\|f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\| \geq \|f - \sum_1^n \langle f, e_k\rangle e_k\|$

Последице: $\|f\|^2 = \|f - \sum_1^n \langle f, e_k\rangle\|^2 + \sum_1^n |\langle f, e_k\rangle|^2 \geq \sum_1^n |\langle f, e_k\rangle|^2$

$\alpha_k = 0 \ \forall k$

$$\sum_{k=1}^{n} |\langle f, e_k\rangle|^2 \leq \|f\|^2$$

Беселова неједнакост

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, e_n\rangle|^2 \leq \|f\|^2$$

f, (e_n) ОНС

$\langle f, e_n\rangle$ Фуријеови коефицијенти вектора f по систему (e_n)

(*) *датум: 21.5.2012.

- Показали смо да ако је $(e_n)_n$ ОНС, $\alpha_k \in \mathbb{C}$ онда је $\|f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\|^2 = \|f - \sum_{k=1}^{n} \langle f, e_k\rangle e_k\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k - \langle f, e_k\rangle|$

за $\alpha_k = 0$ $\sum_{k\geq 1} |\langle f, e_k\rangle|^2 \leq \|f\|^2$ Беселова неједнакост

$\langle f, e_k\rangle$ Фуријеови коефицијенти вектора f у односу на систем (e_n)

Питање када важи једнакост. H - Хилбертов простор

- Теорема (Парсевал): За сваки ОНС $(e_n)_{n\geq 1}$ и свако $f \in H$ следећа три услова су еквивалентна:

1° $f \in \overline{\mathcal{L}}(e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots)$ - затворење скуп свих коначних линеарних комбинација вектора $e_1, e_2, \ldots, e_n$

2° $\|f\|^2 = \sum_{k\geq 1} |\langle f, e_k\rangle|^2$ (Парсевалова једнакост)

3° $f = \sum_{k\geq 1} \langle f, e_k\rangle e_k$ (Фуријеов ред f по ОНС (e_n))* значи да низ парцијалних сума конвергира - норма простора $\|f - \sum_{k=1}^{n} \langle f, e_k\rangle e_k\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$1° \Rightarrow 2°$ $2° \Rightarrow 3°$ $3° \Rightarrow 1$

кратко ловимо круг за доказ

$1° \Rightarrow 2°$:

Доказ: Нека важи 1° тј. $f \in \overline{\mathcal{L}}(e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n$:

$\|f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\| < \varepsilon$

$\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle f, e_k\rangle|^2 = \|f - \sum_{k=1}^{n} \langle f, e_k\rangle e_k\|^2 \leq$ (следи из (*) када је $\alpha_k = 0$)

$\leq \|f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\|^2 \leq \varepsilon^2$

$\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle f, e_k\rangle|^2 < \varepsilon^2$ док је $\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle f, e_k\rangle|^2 \geq \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, e_k\rangle|^2 \geq 0$ Бесел

$\Rightarrow 0 \leq \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle f, e_k\rangle|^2 < \varepsilon^2$ $\varepsilon \to 0$

$\Rightarrow 2°$ (односно једнакост)

$2^\circ \Rightarrow 3^\circ$ Знамо $\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |<f, e_k>|^2$ ← због овога

Треба да покажемо $\|f - \sum_{k=1}^{n} <f, e_k> e_k\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |<f, e_k>|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

у (*) ставимо $\alpha_k = 0$

$3^\circ \Rightarrow 1^\circ$ Ако важи $f = \sum_{k\geq 1} <f, e_k> e_k \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} <f, e_k> e_k \to f \Rightarrow$
$f \in \overline{\mathcal{L}(e_1, e_2, \dots, \dots)}$

Специјално ако је $\overline{\mathcal{L}(e_1, e_2, \dots)} = H$ онда 2° и 3° важе и еквивалентни су за свако $f \in H$.

Услов $\overline{\mathcal{L}(e_1, e_2, \dots)} = H \Leftrightarrow$ са условом: Једини вектор $f \in H$ који је ортогоналан на све векторе e_n је вектор $f = 0$.

Дефиниција: За систем вектора $g_n \in H$ кажемо да је потпун ако из $<f, g_n> = 0 \quad \forall n$ следи да је $f = 0$.

Дефиниција: Потпуни ортонормирани системи се називају ортонормирани базис простора H.

Дефиниција: За неки Хилбертов простор H се каже да је сепарабилан ако у њему постоји пребројив свуда густ скуп.

Теорема: Ако је H сепарабилан онда има коначну или највише пребројиву ОНБ (потпун ОНС).

$l^2 \quad x = (x_1, x_2, \dots) \quad \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty$

$y = (y_1, y_2, \dots)$

$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots)$ $\quad <x, y> = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$

$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots)$

$l^2 \ni 0 = (0, 0, 0, \dots)$ $\quad e_1 = (1, 0, 0, \dots) \quad e_3 = (0, 0, 1, 0, \dots)$

$e_2 = (0, 1, 0, \dots)$

$(e_n)_{n=1}^{\infty}$ је ОНБ l^2

$x = (x_1, x_2, \dots) = \sum_{\nu=1}^{\infty} x_\nu e_\nu \in \ell_2$

Нека је H сепарабилан бесконачно димензиони Хилбертов простор

$\Rightarrow \exists$ ОНБ $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ у H $\Rightarrow \forall f \in H \Rightarrow f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, e_n \rangle e_n$

$\wedge \; \|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, e_n \rangle|^2$.

дефинишемо пресликавање $U : H \longrightarrow \ell^2$

$$Uf = (\langle f, e_1 \rangle, \langle f, e_2 \rangle, \langle f, e_3 \rangle, \dots)$$

U је линеаран оператор

$U(\alpha f + \beta g) = (\langle \alpha f + \beta g, e_1 \rangle, \langle \alpha f + \beta g, e_2 \rangle, \dots) =$

$= (\alpha \langle f, e_1 \rangle + \beta \langle g, e_1 \rangle, \alpha \langle f, e_2 \rangle + \beta \langle g, e_2 \rangle, \dots) =$

$= \alpha (\langle f, e_1 \rangle, \langle f, e_2 \rangle, \dots) + \beta (\langle g, e_1 \rangle, \langle g, e_2 \rangle, \dots) = \alpha Uf + \beta Ug.$

U је $1-1$ $\quad Uf = Ug \Rightarrow f = g$

$\iff U(f-g) = 0 \Rightarrow f - g = 0 \iff Uh = 0 \Rightarrow h = 0$

пресликавање U је $1-1$ ако му је језгро тривијално

$0 = Uh = (\langle h, e_1 \rangle, \langle h, e_2 \rangle, \dots) = (0, 0, \dots), 0 \in \ell^2$

$\Rightarrow \langle h, e_n \rangle = 0 \; \forall n \Rightarrow h = 0$

(пошто је e_n потпун)

U је на $(c_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^2$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$ $\quad$ дочимо ред $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$

да ли конвергира? Проверимо Кошијев услов:

$$\|\sum_{k=n}^{m} c_k e_k\|^2 = \sum_{k=n}^{m} |c_k|^2 \xrightarrow[m,n \to \infty]{} 0$$

како је H комплетан онда је тај низ конвергентан

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$$

$$Ux = (\langle x, e_1 \rangle, \langle x, e_2 \rangle, \dots) = (c_1, c_2, \dots) \in \ell^2$$ доказали да је на

$$\|Uf\|^2 = \|(\langle f,e_1\rangle, \langle f,e_2\rangle, \dots)\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f,e_k\rangle|^2 = \|f\|^2$$

$\|Uf\| = \|f\|$ $\Rightarrow$ пресликавање је изометрија

$\|U(f-g)\| = \|f-g\|$ $\quad \|Uf-Ug\| = \|f-g\|$

са математичке тачке гледишта H и ℓ^2 су исти.

Линеарни оператори и функционали на Хилбертовим просторима

Нека је H Хилбертов простор: $A: H \to H$

деф. $A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$ $\quad \forall x,y \in H \ \forall \alpha,\beta \in \mathbb{C}$ — линеарно пресликавање

деф. 2 За оператор $A: H \to H$ се каже да је ограничен ако постоји $M<+\infty$:

$\|Ax\| \leq M\|x\| \quad \forall x \in H$ $\qquad Ax = A(x)$

$\|A\| = \inf\{M : \|Ax\| \leq M\|x\| \ \ \forall x \in H\}$ — норма оператора

$\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \quad \forall x \in H$

$\ker A = \{x \in H : Ax = 0\}$ — језгро оператора A

представља потпростор од H

$x, y \in \ker A$

$A(\alpha x + \beta y) = \alpha \underbrace{Ax}_{0} + \beta \underbrace{Ay}_{0} = 0$

Ако је A ограничен оператор $\Rightarrow$ $\overline{\ker A} = \ker A$

$\overline{\ker A} \supset \ker A$

? $\overline{\ker A} \subset \ker A$

Узмимо тачку $x \in \overline{\ker A}$ $\Rightarrow \exists x_n \in \ker A : \|x_n - x\| \to 0 \Rightarrow Ax_n = 0$

$\|Ax\| = \|A(x - x_n)\| \leq \|A\| \, \|x_n - x\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \Rightarrow Ax = 0$

$\Downarrow$

$x \in \ker A$.

обавезно је и затворен у оквиру Хилбертовог простора

Дефиниција: Пресликавање $g^*: H \to \mathbb{C}$ се назива линеарни функционел на H ако је $g^*(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha g^*(f_1) + \beta g^*(f_2)$ $\forall f_1, f_2 \in H$ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Дефиниција: Линеарни функционел $g^*: H \to \mathbb{C}$ се назива ограничени ако $\exists M < \infty$, $|g^*(f)| \leq M\|f\|$ $\forall f \in H$

$\|g^*\|$ - норма функционела $= \inf\{M : |g^*(f)| \leq M\|f\| \ \forall f \in H\}$

важи $|g^*(f)| \leq \|g^*\| \cdot \|f\|$ $\forall f \in H$.

Важи $\ker g^* = \overline{\ker g^*}$ ако је g^* ограничен

Теорема (Рисс): Сваком ограниченом линеарном функционалу g^* на Хилбертовом простору H одговара тачно један вектор $g \in H$ такав да је $g^*(f) = \langle f, g \rangle$ $\forall f \in H$ и $\|g^*\| = \|g\|$.

Доказ: нека је $g \in H$ фиксиран

$g^*(f) = \langle f, g \rangle$ је линеарно пресликавање

$$|g^*(f)| = |\langle f, g \rangle| \underset{\text{Кошијева неједнак.}}{\leq} \|f\| \|g\| \Rightarrow \|g^*\| \leq \|g\|$$

ограничен g

Нека је g^* неки ограничен линеарни функционел на H

$\ker g^* = \overline{\ker g^*}$

$1°$ $\ker g^* = H$ $\Downarrow$ $g^*(f) = \langle f, 0 \rangle$

$2°$ $\ker g^* \neq H$ $\Downarrow$ $h \neq 0$ $h \perp \ker g^*$

$f \in H$ произвољан вектор

$$f - \frac{g^*(f)}{g^*(h)} \cdot h$$

$$g^*\left(f - \frac{g^*(f)}{g^*(h)} \cdot h\right) = g^*(f) - \frac{g^*(f)}{g^*(h)} \cdot g^*(h) = 0$$

$$\Rightarrow f - \frac{g^*(f)}{g^*(h)} \cdot h \in \ker g^*$$

$$\Downarrow$$

$$\left\langle f - \frac{g^*(f)}{g^*(h)} h, h \right\rangle = 0 \qquad \langle f, h \rangle - \frac{g^*(f)}{g^*(h)} \|h\|^2 = 0$$

$$\Rightarrow g^*(f) = \frac{g^*(h)}{\|h\|^2}\langle f, h\rangle = \langle f, \underbrace{\frac{\overline{g^*(h)}}{\|h\|^2} h}_{g}\rangle$$

$$g^*(f) = \langle f, g\rangle$$

јединственост: $g^*(f) = \langle f, g_1\rangle \quad \forall f \in H$

$$g^*(f) = \langle f, g_2\rangle$$

$$\langle f, g_1 - g_2\rangle = 0 \quad \forall f \in H$$

$$f = g_1 - g_2$$

$$\|g_1 - g_2\|^2 = 0 \Rightarrow g_1 = g_2$$

Показали смо $\|g^*\| \leq \|g\|$ (1)

Знамо да је $g^*(f) = \langle f, g\rangle \quad f = g \Rightarrow g^*(g) = \|g\|^2$

$$\Rightarrow \|g^*\|\|g\| \geq |g^*(g)| = \|g\|^2 \Rightarrow \underline{\|g^*\| \geq \|g\|} \quad (2)$$

(1) и (2) $\Rightarrow \|g^*\| = \|g\|$. ■

Ако је H Хилбертов простор онда је пресликавање
$\Phi: H \times H \to \mathbb{C}$ које има особине
1° $\Phi(\alpha f + \beta g, h) = \alpha\Phi(f,h) + \beta\Phi(g,h) \quad \forall f, g, h \in H$
2° $\Phi(h, \alpha f + \beta g) = \bar{\alpha}\Phi(h,f) + \bar{\beta}\Phi(h,g) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$
сесквилинеарна форма

Дефиниција: Сесквилинеарна форма се назива ограниченом ако $\exists M$ т.д.:
$|\Phi(f,g)| \leq M\|f\|\|g\| \quad \forall f, g \in H$
$\|\Phi\| = \inf\{M : |\Phi(f,g)| \leq M\|f\| \cdot \|g\|, \forall f, g \in H\}$ норма сесквилинеарне форме Φ

Став: Свакој ограниченој сесквилинеарној форми Φ на H одређени су на јединствен начин ограничени линеарни оператори A и B на H тако да је $\Phi(f,g) = \langle Af, g\rangle = \langle f, Bg\rangle$ $\forall f, g \in H$ и при томе је $\|A\| = \|B\| = \|\Phi\|$.

Доказ: Хајде да фиксирамо оператор B ограничен на H и посматрамо $\Phi(f,g) = \langle f, Bg\rangle$ јесте сесквилинеарна форма, хајде да утврдимо да ли је ограничена:

$$|\Phi(f,g)| = |\langle f, Bg\rangle| \le \|f\| \cdot \|Bg\| \le \|f\| \cdot \|B\| \cdot \|g\|$$

$$\Downarrow$$

$$\|\Phi\| \le \|B\| \qquad (1)$$

Обратно: нека је Φ ограничена сесквилинеарна форма на H.

Фиксирамо $g \in H$ $\quad g^*(f) = \Phi(f,g)$ – линеарни функционал

$$|g^*(f)| = |\Phi(f,g)| \le \|\Phi\| \|g\| \|f\| \Rightarrow \underbrace{\|g^*\| \le \|\Phi\| \cdot \|g\|}_{\text{ограничен}}$$

$\Rightarrow g^*$ је ограничен линеарни функционал на H па по теореми Риса $\exists_1 h_g : g^*(f) = \langle f, h_g\rangle$ $\forall f \in H$ $\wedge$ $\|g^*\| = \|h_g\|$

Покажимо да је додељивање $g \longmapsto h_g$ линеарна операција.

Ми знамо следеће: $\Phi(f,g) = g^*(f) = \langle f, h_g\rangle$

$$\boxed{\langle f, h_{\alpha g_1 + \beta g_2}\rangle} = \Phi(f, \alpha g_1 + \beta g_2) = \bar{\alpha}\,\Phi(f, g_1) + \bar{\beta}\,\Phi(f, g_2) =$$

$$= \bar{\alpha}\langle f, h_{g_1}\rangle + \bar{\beta}\langle f, h_{g_2}\rangle = \boxed{\langle f, \alpha h_{g_1} + \beta h_{g_2}\rangle} \quad \forall f \in H$$

$$\Rightarrow \langle f, h_{\alpha g_1 + \beta g_2} - \alpha h_{g_1} - \beta h_{g_2}\rangle = 0 \quad \forall f \in H$$

$\Rightarrow h_{\alpha g_1 + \beta g_2} = \alpha h_{g_1} + \beta h_{g_2}$ $\Rightarrow$ $g \longmapsto h_g$ је линеарно пресликавање

тј. $h_g = Bg$

Специјално за $n=1$ $\mathcal{L}(f')(p) = pF(p) - f(0)$

4° Диференцирање слике

f оригинал $\Rightarrow (-1)^n t^n f(t)$ је такође оригинал и

$$\mathcal{L}((-1)^n t^n f(t))(p) = (\mathcal{L}(f)(p))^{(n)}$$

5° интеграција оригинала

f оригинал $\Rightarrow \int_0^t f(u)\,du$ је оригинал и важи

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(u)\,du\right)(p) = \frac{1}{p}\mathcal{L}(f)(p)$$

6° Интеграција слике $\mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right)(p) = \int_p^\infty \mathcal{L}(f)(u)\,du$

7° $(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) g(x-u)\,du$ конволуција

Кад оригинали тада се интеграл редукује:

$$(f*g)(x) = \int_0^x f(u) g(x-u)\,du$$

$$\mathcal{L}(f*g)(p) = \mathcal{L}(f)(p)\cdot\mathcal{L}(g)(p)$$

Доказ: 1° следи из особине интеграла, тривијално

2° следи из смене променљиве

$$\mathcal{L}(f(\alpha t))(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(\alpha t)\,dt = \begin{bmatrix} \alpha>0 \\ \alpha t = s \\ t = s/\alpha \end{bmatrix} = \int_0^\infty e^{-\frac{p}{\alpha}s} f(s)\frac{ds}{\alpha} =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\mathcal{L}(f)\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

3° $s > \max\{s_0, s_1, \dots, s_n\}$

p ; $\operatorname{Re} p > s$

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(t))(p) = \int_0^\infty e^{-pt}\,df^{(n-1)} = e^{-pt} f^{(n-1)}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty f^{(n-1)}(-p)e^{-pt}\,dt$$

$$= -f^{(n-1)}(0) + p\int_0^\infty e^{-pt} f^{(n-1)}(t)\,dt$$

$\|g^*\| = \|hg\| \quad \wedge \quad \|g^*\| \leq \|\phi\| \cdot \|g\| \quad \Rightarrow \quad \|hg\| \leq \|\phi\| \|g\|$

$$\|Bg\| \leq \|\phi\| \cdot \|g\|$$
$$\Rightarrow \|B\| \leq \|\phi\| \quad (2)$$

$\phi(f, g) = \langle f, hg \rangle = \langle f, Bg \rangle$ и B је јединствено одређен (што следи из теореме Рисса)

из (1) и (2) $\Rightarrow \|\phi\| = \|B\|$

аналогно $\phi^*(f, g) = \overline{\phi(g, f)}$ ⇒ за оператор A

$\phi(f, g) = \langle Af, g \rangle$

A је ограничен оператор
$\|\phi\| = \|A\|$

$\phi(f, g) = \langle f, Bg \rangle$

где је B јединствено одређен формом ϕ
$\|B\| = \|\phi\| = \|A\|$

Кад се има неки ограничен оператор A на H тада постоји $\exists_1 B$ ограничен на H тако да је $\langle Af, g \rangle = \langle f, Bg \rangle \ \forall f, g \in H$

Оператор B се назива адјунговани оператор оператору A

Ознака $B = A^*$.

Уколико је $A^* = A$ онда се назива самоадјунговани.

Ортогонални полиноми

$I \subset \mathbb{R}$ и нека је ρ позитивна функција на I ($\rho > 0$)

можемо да разматрамо $1, x, x^2, x^3, \ldots$

$$\langle f, g \rangle = \int_I f \cdot \bar{g} \, \rho(x) \, dx \qquad \rho(x) \text{ - тежинска ф-ја}$$

Применимо Грам-Шмитов поступак ортогонализације

$$\langle P_n, P_m \rangle = \int_I P_n \cdot \overline{P_m}\, \rho(x)\, dx = \delta_{nm}$$

Пример: $I = (-1,1)$

$\rho(x) \equiv \underline{1}$ $\qquad P_n(x) = C_n \cdot \left((x^2-1)^n \right)^{(n)}$

→ Лежандрови полиноми

$I = (0,\infty)$ $\quad \rho(x) = e^{-x}$ – Лагерови полиноми

$I = (-1,1)$ $\quad \rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ — Чебишевљеви полиноми

$I = \mathbb{R}$, $\rho(x) = e^{-x^2}$ $\quad H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\left(e^{-x^2}\right)^{(n)}$

→ Ермитов полиноми

водећи већинујени ће бити 2^n

$H_n(x) = 2^n x^n + \ldots$

хајде да проверимо ортогоналност:

$H_0(x) = \underline{1}$ $\quad H_1(x) = 2x$ $\quad H_2(x) = 4x^2 - 2$ $\quad H_3(x) = 8x^3 - 12x \ldots$

довољно са показату

$m < n$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \cancel{e^{-x^2}} (-1)^n \cancel{e^{x^2}} \left(e^{-x^2}\right)^{(n)} \cdot (-1)^m e^{x^2}\left(e^{-x^2}\right)^{(m)} dx$$

$$= (-1)^{n+m} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{x^2} \left(e^{-x^2}\right)^{(m)} \cdot \left(e^{-x^2}\right)^{(n)} dx = \text{парцијална интеграција}$$

$$= (-1)^{n+m} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{x^2} \left(e^{-x^2}\right)^{(m)} d\left(e^{-x^2}\right)^{(n-1)} = (-1)^{m+n} \left[e^{x^2}\left(e^{-x^2}\right)^{(m)} \left(e^{-x^2}\right)^{(n-1)} \right]_{-\infty}^{+\infty}$$

$$- \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{-x^2}\right)^{(n-1)} \cdot \left(e^{x^2}\left(e^{-x^2}\right)^{(m)}\right)' dx = (-1)^{m+n+1} \int_{\mathbb{R}} \left(e^{x^2}\left(e^{-x^2}\right)^{(m)}\right)' \cdot \left(e^{-x^2}\right)^{(n-1)} dx$$

= даље настављамо поступак n-пута све укупно

$$(-1)^{m+n+n}\int_{\mathbb{R}} \underbrace{\left(e^{x^2}\left(e^{-x^2}\right)^{(m)}\right)^{(n)}}_{\overset{\shortparallel}{0}} e^{-x^2}\,dx = 0$$

пошто је $m<n$.

Исти резон за $m=n$

$$*\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x)H_m(x)e^{-x^2}\,dx = (-1)^n\int_{\mathbb{R}} (-2)^n\cdot n!\, e^{-x^2}\,dx =$$

$$= 2^n n!\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx = 2^n n!\sqrt{\pi}$$

$$\left[\hat{H}_n(x) = \frac{H_n(x)}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}\right]$$

, $n=0,1,2\ldots$ називас се ортонормирани систем Ермитових полинома

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{H}_m(x)\hat{H}_n(x)\, e^{-x^2}\,dx = \delta_{mn}$$

$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\left(e^{-x^2}\right)^{(n)}$

$F(x,t) = e^{2xt-t^2}$ можемо да је развијемо у степени ред по t: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_t^{(n)}(0)}{n!}t^n$

онда је $F(x,t)$ - генератриса Ермитових полинома

такве ф-је имају сви ортогонални полиноми

$$F_t^{(n)}(0) = \frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{2xt-t^2}\Big|_{t=0} = e^{x^2}\frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{-(t-x)^2}\Big|_{t=0}$$

уведемо $r(s)=e^{-s^2}$

$$= e^{x^2}\frac{\partial^n}{\partial t^n} r(x-t)\Big|_{t=0} = e^{x^2}(-1)^n r^{(n)}(x-t)\Big|_{t=0} = e^{x^2}(-1)^n r^{(n)}(x) =$$

$$= e^{x^2}(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2} = H_n(x)$$

$$e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n$$

$\downarrow$

генератриса Ермитових полинома

хајде да диференцирамо по t: $e^{2xt-t^2} 2(x-t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} n\, t^{n-1}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n(x)}{(n-1)!} t^{n-1} = 2(x-t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_{n+1}(x)}{n!} t^n = 2x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^{n+1} =$$

$n+1=k$

$$= 2x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 H_{k-1}(x)}{(k-1)!} t^k \qquad k \in \{1,2,\dots\}$$

$$H_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{n+1}(x)}{n!} t^n - 2x H_0(x) - 2x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 H_{n-1}(x)}{(n-1)!} t^n$$

$$H_1(x) - 2x H_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} t^n \left(\frac{H_{n+1}(x)}{n!} - \frac{2x H_n(x)}{n!} + \frac{2 H_{n-1}(x)}{(n-1)!} \right) = 0$$

ово је идентитет $\Rightarrow$ $H_1(x) = 2x H_0(x)$

$$\frac{H_{n+1}(x)}{n!} - \frac{2x H_n(x)}{n!} + \frac{2 H_{n-1}(x)}{(n-1)!} = 0 \,\Big/\, n!$$

$H_{n+1}(x) - 2x H_n(x) + 2n H_{n-1}(x) = 0$ рекурентна формула

$H_0 = 1$

$H_1 = 2x$

} сви ортогонални полиноми имају неки тип трочлане везе потпун и ортонормиран

$(e_n)_{n=1}^{\infty}$ $\qquad f = \sum \langle f, e_i \rangle e_i$

$\hat{H}_n \qquad \langle f, \hat{H}_n \rangle = 0 \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots \qquad \int |f|^2 e^{-x^2} dx < \infty$

$\Downarrow$

$f = 0$ скоро свуда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \hat{H}_n(x) e^{-x^2} dx = 0 \qquad \forall n = 0, 1, \dots$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) H_n(x) e^{-x^2} dx = 0 \qquad \forall n = 0, 1, \dots$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot x^n e^{-x^2} dx = 0 \qquad \forall n = 0, 1, 2, \dots$$ право одузимање

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{(zx)^n}{n!} e^{-x^2} dx = 0 \quad \forall n$$

ако просумирамо ред

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{zx - x^2} dx = 0 \quad \forall z \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-x^2} e^{zx} dx = 0 \quad \forall z$$

$z = -it, \ t \in \mathbb{R} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-x^2} e^{-ixt} dx = 0$

$\widehat{f e^{-x^2}} \equiv 0$

Парсевал: $\underbrace{\int_{\mathbb{R}} |f e^{-x^2}|^2 dx = \int |\widehat{f e^{-x^2}}|^2 dx = 0}$

$$\Downarrow$$

$f = 0$ скоро свуда

$\forall f: \int_{\mathbb{R}} |f|^2 e^{-x^2} dx < \infty \qquad f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n H_n(x)$

$$c_n = \langle f, \hat{H}_n \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \hat{H}_n(x) e^{-x^2} dx$$

конвергенција по норми!

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \hat{H}_n(x) \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} c_k H_k(x) \right|^2 e^{-x^2} dx \to 0 \quad n \to \infty$$

важи Парсевал $\int_{-\infty}^{+\infty} |f|^2 e^{-x^2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2$

– конвергенција тачка по тачка

датум: 23.5.2012.

$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} (e^{-x^2})^{(n)}$ Ермитов полином

$\hat{H}_n(x) = \frac{H_n(x)}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}}$ нормирани

$H_0(x) = 1, \; H_1(x) = 2x$

$e^{2xt - t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n$ – генератриса

За Ермитове полиноме рекурентна формула:

$H_{n+1}(x) - 2x H_n(x) + 2n H_{n-1}(x) = 0$

Изводимо формулу Кристофел–Дарбуа

$$H_{k+1}(x) - 2x H_k(x) + 2k H_{k-1}(x) = 0 \; / \cdot H_k(t)$$

$$H_{k+1}(x) \cdot H_k(t) - 2x H_k(x) H_k(t) + 2k H_{k-1}(x) H_k(t) = 0 \; / : 2^{k+1} k!$$

$$\frac{H_{k+1}(x) \cdot H_k(t)}{2^{k+1} k!} - \frac{x H_k(x) H_k(t)}{2^k k!} + \frac{H_{k-1}(x) \; H_k(t)}{2^k \cdot (k-1)!} = 0 \quad (1)$$

иста релација важи када пермутујемо x и t

$$\frac{H_{k+1}(t) H_k(x)}{2^{k+1} k!} - \frac{t H_k(t) H_k(x)}{2^k k!} + \frac{H_{k-1}(t) H_k(x)}{2^k \cdot (k-1)!} = 0 \quad (2)$$

одузмемо $(1) - (2)$:

$$\frac{1}{2^{k+1} k!} \left[H_{k+1}(x) H_k(t) - H_{k+1}(t) H_k(x) \right] + (t - x) \frac{H_k(x) H_k(t)}{2^k k!} + \frac{(H_{k-1}(x) H_k(t) - H_{k-1}(t) H_k}{2^k (k-1)!}$$

из претходне релације добијамо:

$$\frac{(x-t)H_k(x)H_k(t)}{2^k\, k!} = \frac{1}{2^{k+1}\cdot k!}\left(H_{k+1}(x)H_k(t) - H_{k+1}(t)\cdot H_k(x)\right) -$$

$$- \frac{1}{2^k (k-1)!}\left(H_k(x)H_{k-1}(t) - H_{k-1}(x)H_k(t)\right)$$

Десна страна је облика $a_k - a_{k-1}$

Просумирамо

$$(x-t)\sum_{k=1}^{n}\frac{H_k(x)H_k(t)}{2^k\, k!} = \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0 =$$

$$= \frac{1}{2^{n+1} n!}\left(H_{n+1}(x)H_n(t) - H_{n+1}(t)\cdot H_n(x)\right) - \frac{1}{2}(2x-2t)$$

$$(x-t)\sum_{k=0}^{n}\frac{H_k(x)H_k(t)}{2^k\, k!} = \frac{1}{2^{n+1} n!}\left(H_{n+1}(x)H_n(t) - H_{n+1}(t)H_k(x)\right)$$

јер смо убацили 1 $\Downarrow$ директно добијамо релацију са нормираним

$$(*)\quad \sum_{k=0}^{n}\hat{H}_k(x)\hat{H}_k(t) = \sqrt{\frac{n+1}{2}}\;\frac{\hat{H}_{n+1}(x)\hat{H}_n(t) - \hat{H}_{n+1}(t)\hat{H}_n(x)}{x-t}$$

Формула Кристофел Дарбу (попут Дирихлеовог језгра)

Ова формула може да се изведе за било које ортогоналне полиноме по нашој схеми ако је позната генератриса

- они задовољавају и диференцијалну једначину другог реда

$u = e^{-x^2}$

$u' = e^{-x^2}(-2x) = -2xu$ / диференцирамо $(n+1)$-пут

$u^{(n+2)} = -2(xu)^{(n+1)} = \underbrace{-2\sum_{\nu=0}^{n+1}\binom{n+1}{\nu} x^{(\nu)} u^{(n+1-\nu)}}_{\text{Лајбницова формула}} \Rightarrow$

$u^{(n+2)}(x) + 2x\,u^{(n+1)}(x) + 2(n+1)u^{(n)}(x) = 0 \quad (*)$

$(e^{-x^2})^{(k)} = (-1)^k e^{-x^2} H_k(x) = u^{(k)}$

уврстимо у $(*)$

$\left((-1)^n e^{-x^2} H_n(x)\right)'' + 2x\left((-1)^n e^{-x^2} H_n(x)\right)' + 2(n+1)(-1)^n e^{-x^2} H_n(x) =$

$\left(e^{-x^2} H_n(x)\right)'' + 2x\left(e^{-x^2} H_n(x)\right)' + 2(n+1)e^{-x^2} H_n(x) = 0$

када се обави диференцирање и утроши израз добијамо

$$\boxed{H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0}$$

пошто знамо да је $H_n(x)$ полином степена n можемо методом неодређених коефицијената добити тачан облик полинома

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(-1)^k n!}{k!(n-2k)!}(2x)^{n-2k}$$

може се добити и као:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+it)^n e^{-t^2}\,dt$$

↳ развијемо по биномној формули и искористимо особине Γ - B-је!

диференцирањем интеграла по параметру

$\Rightarrow H_n'(x) = 2n H_{n-1}(x)$

Уз Ермитове полиноме природно се везује ф-ја $v_n(x) = H_n(x)\, e^{-x^2/2}$

$\Downarrow$

$v_n'' + (2n+1-x^2)\, v_n = 0$

$\left(v'' + (2n+1-x^2)\, v = 0 \right)$

конкретно односи

$$v_n(0) = H_n(0) = \begin{cases} (-1)^{n/2} \dfrac{n!}{\left(\frac{n}{2}\right)!} & n \text{ парно} \\ 0 & n \text{ непарно} \end{cases}$$

$$v_n'(0) = \begin{cases} 0 & \text{ако је } n \text{ парно} \\ (-1)^{[n/2]} \dfrac{n!}{\left(\left[\frac{n}{2}\right]\right)!} \cdot 2, & n \text{ непарно} \end{cases}$$

диф. ј-ну пишемо на другачији начин:

$v_n'' + (2n+1)\, v_n = x^2 v_n$ (имамо два почетна услова)

кад се искористи формула Duhamel-a: (погледај страну 13):

$$e^{-x^2/2} H_n(x) = \lambda_n \cos\left(\sqrt{2n+1}\, x - \frac{n\pi}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \int_0^x \sin\left(\sqrt{2n+1}\,(x-t)\right) e^{-t^2/2}\, t^2 H_n(t)\, dt$$

$$\lambda_{2m} = \frac{(2m)!}{m!}$$

$$\lambda_{2m+1} = \frac{2\,(2m+1)!}{m!\,\sqrt{4m+3}}$$

применимо Стирлингову формулу

$$\lambda_n = 2^{\frac{n+1}{2}}\, n^{\frac{n}{2}}\, e^{-\frac{n}{2}} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \quad n \to \infty$$

$$e^{-x^2/2} H_n(x) = \lambda_n \cos\left(\sqrt{2n+1}\, x - \frac{n\pi}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \int_0^x \sin\left(\sqrt{2n+1}\,(x-t)\right) e^{-t^2/2}\, t^2 H_n(t)\, dt$$

уведемо $\sqrt{2n+1} = N$ да би олакшали запис

$$= \lambda_n \Big[\cos\left(Nx - \frac{n\pi}{2}\right) + \underbrace{\frac{1}{N\lambda_n} \int_0^x \sin\left(N(x-t)\right) t^2 e^{-t^2/2} H_n(t)\, dt}_{R_N(x)} \Big]$$

$$|R_N(x)| \le \frac{1}{N\lambda_n} \int_0^x \left|\sin\left(N(x-t)\right)\right| t^2 e^{-t^2/2} |H_n(t)|\, dt \le$$

$$\le \frac{1}{N\lambda_n} \underbrace{\int_0^x t^2 e^{-t^2/2} |H_n(t)|\, dt}_{\text{применимо Кошијеву неједнакост}} \le \frac{1}{N\lambda_n} \sqrt{\int_0^x (t^2)^2 dt \int_0^x e^{-t^2} |H_n(t)|^2 dt}$$

$$\int |f \cdot g|\, dx \le \sqrt{\int |f|^2 dx \int |g|^2 dx}$$

$$\le \frac{1}{N\lambda_n} \sqrt{\frac{|x|^5}{5} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} |H_n|^2 dt}_{\text{коефицијент нормирања}}} \le \frac{\mathrm{const}\, |x|^{5/2}}{N\lambda_n} \sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}$$

када се примени Стирлингова формула и среди

$$\boxed{|R_n(x)| \le C \cdot |x|^{5/2} \cdot n^{-1/4}}$$

не зависи од n

имамо $H_n(x) = e^{x^2/2}\, 2^{n+1/2}\, n^{n/2}\, e^{-n/2} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(\cos\left(Nx - \frac{n\pi}{2}\right) + R_n(x)\right)$

узмемо и помножимо

$|e^{-pt}|\,|f^{(n-1)}| \le |e^{-pt}|\, M e^{st} = M e^{-t(\operatorname{Re} p - s)}$ (оцена)

наведени поступак понављамо $n-1$ пут

ако хоћемо строго да формализујемо – индукција.

4° $\mathcal{L}(f)(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt \quad \operatorname{Re} p > s_0$ аналитичка ф-ја

смемо да диференцирамо

$$\mathcal{L}(f)(p)^{(n)} = \int_0^\infty (-t)^n f(t) e^{-pt}\,dt = \mathcal{L}((-t)^n f(t))$$

5° $\varphi(t) = \int_0^t f(u)\,du$

$\varphi'(t) = f(t)$, $\varphi(0)$

$$\left.\begin{aligned} &\underbrace{\mathcal{L}(\varphi')(p)}_{\shortparallel} = \mathcal{L}(f)(p) = \\ &p\,\mathcal{L}(\varphi)(p) - \varphi(0) = p\,\mathcal{L}(\varphi)(p) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathcal{L}\left(\int_0^t f(u)\,du\right)(p) = \frac{\mathcal{L}(f)(p)}{p}$$

6° $$\int_p^{+\infty} \mathcal{L}(f)(s)\,ds = \int_p^{+\infty} ds \int_0^\infty e^{-su} f(u)\,du = \int_0^\infty f(u)\,du \int_p^{+\infty} e^{-su}\,ds =$$

$$= \int_0^\infty f(u)\,du\, \frac{e^{-pu}}{u} = \int_0^\infty \frac{f(u)}{u} e^{-pu}\,du = \mathcal{L}\left(\frac{f(u)}{u}\right)(p)$$

7° f, g оригинали

$$f * g(t) = \int_0^t f(u)\, g(t-u)\,du$$

$$\mathcal{L}(f*g)(p) = \int_0^\infty e^{-pt}\,dt \int_0^t f(u)\, g(t-u)\,du =$$

$$= \int_0^\infty e^{-pt}\,dt \int_0^\infty f(u)\, g(t-u)\,du =$$ (доопштавите него кад инистремено по простору)

$$= \int_0^\infty f(u)\,du \int_0^\infty e^{-pt} g(t-u)\,dt = \begin{bmatrix} t-u = x & t = x+u \\ dt = dx & \end{bmatrix}$$

$$= \int_0^\infty f(u)\,du \int_{-u}^{\infty} e^{-p(x+u)} \underbrace{g(x)}_{\text{оригинал}}\,dx = \begin{pmatrix} t=0 & x=-u \\ t=\infty & x=\infty \end{pmatrix}$$

$$H_n(x) = e^{x^2/2}\, 2^{n+1/2}\, n^{n/2} e^{-n/2} \Big[\cos\left(Nx - \frac{n\pi}{2}\right) + R_n(x) +$$

$$O\left(\frac{1}{n}\right) + C_1 |x|^{5/2} \cdot n^{-5/4} \Big]$$ када све сједимо добијамо

$$H_n(x) = \sqrt{2}\left(\frac{2n}{e}\right)^{n/2} e^{x^2/2} \cdot \left(\cos\left(Nx - \frac{n\pi}{2}\right) + \frac{a_n}{n} + b_n \cdot n^{-1/4} |x|^{5/2}\right)$$

a_n и b_n ограничени низови

Нама је важно како изгледа нормирани полином

$$\hat{H}_n(x) = \frac{H_n}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}}$$ поново примјенимо Стирлингову формулу

$$\Rightarrow \hat{H}_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,(2n)^{-1/4} e^{x^2/2}\left(\cos\left(Nx - \frac{n\pi}{2}\right) + \frac{\alpha_n}{n} + \beta_n n^{-1/4} |x|^{5/2}\right)$$

$n \to \infty$

α_n и β_n су ограничени низови

Дакле за x фиксирано

$$\hat{H}_n(x) = O\left(\frac{1}{n^{1/4}}\right)$$

Нека је f ф-ја дефинисана на реалној оси и постоји $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} |f(t)|^2 dt < \infty$

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \langle f, \hat{H}_k \rangle \hat{H}_k$$ при чему је кв по норми

Нас занима да ли ова ф-ја кв тачка по тачка ка $f(x)$

парцијалне суме

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \langle f, \hat{H}_k \rangle \hat{H}_k(x) = \sum_{k=0}^{n} \int_{\mathbb{R}} f(t) \hat{H}_k(t) e^{-t^2} \hat{H}_k(x)\, dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(t) \sum_{k=0}^{n} \hat{H}_k(x) \hat{H}_k(t) e^{-t^2} dt$$

из скаларног производа тежина

Важна релација:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} \sum_{k=0}^{n} \hat{H}_k(x)\hat{H}_k(t)\,dt = 1$$

$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} \hat{H}_0^2\,dt}_{\text{ОНС}} + \sum_{k=1}^{n} \hat{H}_k(x) \underbrace{\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} \hat{H}_k(t)\,dt}_{0}$$

хајде да покажемо

$$\| \quad 1$$

$$e^{2tx-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n \Big/ e^{-x^2}$$

$$e^{-x^2+2tx-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n e^{-x^2} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \text{по } x$$

$$\| \quad e^{-(x-t)^2}$$

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-t)^2}\,dx}_{\sqrt{\pi}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n(x)\,dx}$$

степени ред $\Rightarrow$ сви интеграли за $n \geq 1$ су 0

$$f(x) - f_n(x) = \int_{\mathbb{R}} (f(x) - f(t))\, e^{-t^2} \sum_{k=0}^{n} \hat{H}_k(x)\hat{H}_k(t)\,dt =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)-f(t)}{x-t} \left(\hat{H}_{n+1}(x)\hat{H}_n(t) - \hat{H}_n(x)\hat{H}_{n+1}(t) \right) \sqrt{\frac{n+1}{2}}\,dt$$

Кристофел-Дарбу

$$\varphi_x(t) = \frac{f(x) - f(t)}{x - t}$$

Лема: $\varphi : \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |t|^{5/2}) e^{-t^2/2} |\varphi(t)| dt < \infty$

тада је $n^{1/4} \cdot a_n(\varphi) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ $\quad a_n(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} \varphi(t) \hat{h}_n(t) dt$

Доказ: морамо да узмемо оцену за $\hat{h}_n(t)$

$$a_n(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} \varphi(t) \sqrt{\frac{2}{\pi}} (2n)^{-1/4} e^{t^2/2} \Big(\cos\big(Nt - \frac{n\pi}{2}\big) + \frac{\alpha_n}{n} + \beta_n n^{-1/4} |t|^{5/2} \Big) dt$$

$$n^{1/4} a_n(\varphi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, 2^{-1/4} \Big[\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/2} \varphi(t) \big(\cos Nt \cos\frac{n\pi}{2} + \sin Nt \sin\frac{n\pi}{2}\big) dt + \frac{\alpha_n}{n} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) e^{-t^2/2} dt + \frac{\beta_n}{n^{1/4}} \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} \varphi(t) |t|^{5/2} dt \Big]$$

Сви остали сабирци тривијално теже 0 из услова леме и ограничености α_n и β_n

теже 0 по леми Римана

Теорема: Нека је функција f таква да је $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ $\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{f(x) - f(t)}{x - t} \right| (1 + |t|^{5/2}) e^{-t^2/2} dt < \infty$

тада важи $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \langle f, \hat{h}_n \rangle \hat{h}_n(x)$.

Lorsq : $\varphi(x) - S_n(x) = \sqrt{\frac{n+1}{2}} \underbrace{\left[\hat{H}_{n+1}(x) \cdot a_n(\varphi_x) - a_{n+1}(\varphi_x)\hat{H}_n(x) \right]}_{\substack{\downarrow\, n \to \infty \\ 0}}$

$$\left. \begin{aligned} a_n(\varphi_x) &= o\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right) \\ \hat{H}_n(x) &= O\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right) \end{aligned} \right\}$$

$\blacksquare$

$$= \int_0^\infty f(u)\,du \int_0^\infty e^{-pu} e^{-px} g(x)\,dx = \int_0^\infty e^{-pu} f(u)\,du \int_0^\infty e^{-px} g(x)\,dx =$$

$$= \mathcal{L}(f)(p)\cdot \mathcal{L}(g)(p) \quad \blacksquare$$

Примери (мотивација чему би ово могло да служи)

$$y'' + 2\beta y' + \omega^2 y = 0 \qquad \mathcal{L}(y)(p) = Y(p)$$

$$y(0) = A \qquad \mathcal{L}(y')(p) = p\cdot Y(p) - A$$

$$y'(0) = B \qquad \mathcal{L}(y'')(p) = p^2 Y(p) - pA - B$$

$$\mathcal{L}(y'')(p) + 2\beta\,\mathcal{L}(y')(p) + \omega^2 \mathcal{L}(y) = 0$$

$$\underline{p^2 Y(p)} - pA - B + \underline{2\beta p Y(p)} - 2\beta A + \underline{\omega^2 Y(p)} = 0$$

(диференцијална ј-на се свела на алгебарску)

$$Y(p)\left(p^2 + 2\beta p + \omega^2\right) = 2\beta A + pA + B$$

$$Y(p) = \frac{2\beta A + pA + B}{p^2 + 2\beta p + \omega^2}$$

нашли смо слику дејства Лапласове трансформације

// Ако у свим тачкама непрекидности имају исту Лапласову трансформацију онда су једнаки. //

нас занима од чега је настало

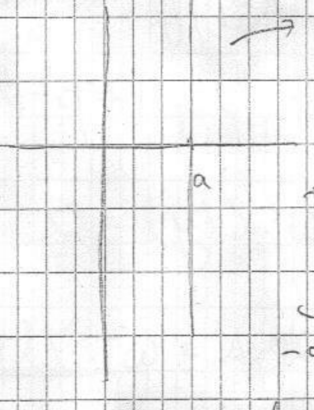
добили смо карактеристични полином у имениоцу

s_0 - показатељ раста неког интеграла ... тренутно за нас неки фиксиран број.)

Став: Ако је функција $F(p)$ аналитичка у полуравни $\operatorname{Re} p > s$, $(s > s_0)$ $\lim\limits_{\substack{p \to \infty \\ \operatorname{Re} p \geq a > s_0}} F(p) = 0$ униформно по $\arg p$ и $\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} F(p)\,dp$ $(a > s_0)$

конвергира апсолутно тада $\exists$ f оригинал такав да је $\mathcal{L}(f)(p) = F(p)$

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} F(p)\,dp$$



→ вршимо интеграцију по правој

$p = a + iy$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(a+iy)\, e^{(a+iy)t}\, dy$$

Теорема (Мелин) Ако је f оригинал са показатељем раста s_0 и $F(p) = \mathcal{L}(f)(p)$ тада у свакој тачки непрекидности функције f важи

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{pt} F(p)\,dp.$$

Доказ помоћу Фуријеове трансформације.

датум: 14.5.2012.

Доказ: $s > s_0$ $\quad$ s_0 показатељ раста f $\quad$ $0 < \varepsilon < s - s_0$

$\varphi(t) = f(t) e^{-st}$

$$|f(t)| \leq M e^{(s_0+\varepsilon)t}$$

$$|\varphi(t)| \leq M e^{(s_0+\varepsilon)t} e^{-st} = M e^{\underbrace{(s_0+\varepsilon-s)}_{<0}t}$$

$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi|\,dt < \infty$ апсолутно интеграбилна

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\, e^{-it\xi}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \varphi(t)\, e^{-i\xi t}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-st} e^{-i\xi t}\, dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t(s+i\xi)} f(t)\, dt$$

$$\Rightarrow \quad \varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\xi)\, e^{i\xi t}\, d\xi$$

инверзна Фуријеова трансформација

$$s + i\xi = p$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)\, dt = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} F(p)}$$

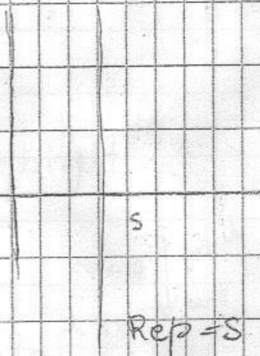
$$f(t) \cdot e^{-st} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi)\, e^{i\xi t}\, d\xi = \text{убацимо}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F(s+i\xi)\, e^{i\xi t}\, d\xi$$

$$\Rightarrow f(t) \cdot e^{-st} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(s+i\xi)\, e^{i\xi t}\, d\xi$$

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(s+i\xi)\, e^{(i\xi+s)t}\, d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} F(s+i\xi)\, e^{(i\xi+s)t}\, d(s+i\xi) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(p)\, e^{pt}\, dp$$

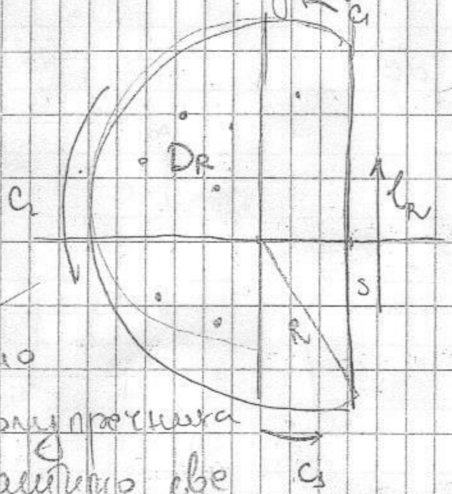


има теоријски значај због успостављања једнозначне везе

Теорема: Ако је F рационална функција (F је Лапласова трансформација његог оригинала f). Тада је $f(t) = \sum \mathrm{Res}\, e^{pt} F(p)$, где се сумирање врши по свим половима функције F.

Доказ: Како је F рационална функција и Лапласова трансформација то мора бити степен полинома у имениоцу барем за један већи него у бројиоцу: $F(p) = O\left(\frac{1}{p}\right)$ $p \to \infty$.

Нека је $s \in \mathbb{R}$ такав да су сви сингуларитети ф-је F у полуравни $\operatorname{Re} p < s$.



$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty}$$

круг довољно
великог полупречника
да обухватимо све
сингуларитете

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_R} e^{pt}F(p)\,dp = \sum \operatorname{Res} e^{pt}F(p)$$

по свим половима ф-је

$$\| $$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{l_R} e^{pt}F(p)\,dp + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{1R}} e^{pt}F(p)\,dp + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{2R}} e^{pt}F(p)\,dp + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{3R}} e^{pt}F(p)\,dp$$

$$\downarrow R\to\infty \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow R\to\infty$$

$$\underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{pt}F(p)\,dp}_{f(t)} \qquad\qquad 0$$

по Жордановој леми
ротација за $\pi/2$

C_{1R} $\quad p = Re^{i\varphi}$

$$\varphi \in \left(\varphi_R, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\varphi_R = \arccos\frac{s}{R}$$

$$\left|\int_{C_{1R}} F(p)e^{pt}\,dp\right| \le \left|\int_{\varphi_R}^{\pi/2} |F(Re^{i\varphi})|\, \left|e^{t(R\cos\varphi + iR\sin\varphi)}\right| R\,d\varphi\right| \le$$

$$\leq \int_{\varphi_R}^{\pi/2} \frac{M}{R} \cdot R e^{tR\cos\varphi} d\varphi \leq \int_{\varphi_R}^{\pi/2} M e^{ts} d\varphi = M e^{ts}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_R\right) \to 0$$

■

Нека су полови функције F у тачкама $p_1, p_2, \ldots, p_n$ и нека су њихови редови $m_1, m_2, \ldots, m_n$ респективно

Тада је $\varphi(t) = \sum \mathrm{Res}\, e^{pt} F(p) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(m_k-1)!} \lim_{p\to p_k} \frac{d^{m_k-1}}{dp^{m_k-1}}\left((p-p_k)^{m_k} e^{pt} F(p)\right)$

Специјално ако је $F(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$, A, B полиноми и $F(p)$ има само просте полове у $p_1, \ldots, p_n$ тада је:

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{n} \lim_{p\to p_k} \frac{(p-p_k)A(p)}{B(p) - \underset{0}{\overset{\shortparallel}{B(p_k)}}} e^{pt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t}.$$

$A(p_k) \neq 0$

Примене Лапласове трансформације

Таблица Лапласових трансформација

Оригинал	Слика
1	$\frac{1}{p}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$t^\alpha \ (\alpha > -1)$	$\Gamma(\alpha+1) / p^{\alpha+1}$
$e^{\lambda t}$	$1 / p-\lambda$
$\sin\omega t$	$\omega / p^2+\omega^2$
$\cos\omega t$	$p / p^2+\omega^2$
$\mathrm{sh}\,\omega t$	$\omega / p^2-\omega^2$
$\mathrm{ch}\,\omega t$	$p / p^2-\omega^2$
$e^{\lambda t}\sin\omega t$	$\omega / (p-\lambda)^2+\omega^2$
$e^{\lambda t}\cos\omega t$	$p-\lambda / (p-\lambda)^2+\omega^2$
J_n	$(\sqrt{p^2+1} - p)^n / \sqrt{p^2+1}$