Математика 1Б

Предавања

Александра Зимић

$u(x,y) = e^x \cos y \qquad v(x,y) = e^x \sin y$

диференцијабилне у свим тачкама $\mathbb{R}^2$
и задовољене су једначине Коши–Римана свуда у $\mathbb{R}^2$ $\Rightarrow$

у свим тачкама $\mathbb{R}^2$ e^z је аналитичка

$f = u + iv$

$f'(z) = u_x + i v_x \qquad f(z) = e^z$

$$(e^z)' = \frac{\partial}{\partial x}(e^x \cos y) + i \frac{\partial}{\partial x}(e^x \sin y) =$$
$$= e^x(\cos y + i \sin y) = e^z$$

$e^{x_1} \cdot e^{x_2} = e^{x_1 + x_2}$

понаша се исто као и реална ф-ја

$e^{z_1} \cdot e^{z_2} \stackrel{?}{=} e^{z_1 + z_2}$ ✓

$z_1 = x_1 + i y_1$

$z_2 = x_2 + i y_2$

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{x_1}(\cos y_1 + i \sin y_1) \cdot e^{x_2}(\cos y_2 + i \sin y_2)$$
$$= e^{x_1 + x_2}(\cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2)) =$$
$$= e^{z_1 + z_2}$$

$$e^{z + 2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^z$$

експоненцијална функција $z \longmapsto e^z$ је периодична са периодом $2\pi i$ $(2n\pi i,\ n \in \mathbb{Z})$

$e^z \cdot e^{-z} = e^0 = \underline{1}$

$e^{-z} = \dfrac{1}{e^z}$

3° Логаритми

$z \longmapsto e^z \qquad 1-1$

$e^{z_1} = e^{z_2} \qquad z_1 = x_1 + i y_1$

$\dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = 1 \qquad z_2 = x_2 + i y_2$

$e^{z_1 - z_2} = 1$

$e^{x_1 - x_2 + i(y_1 - y_2)} = 1$

$$e^{x_1 - x_2}(\cos(y_1 - y_2) + i \sin(y_1 - y_2)) = 1$$

$e^{x_1 - x_2} = 1 \Rightarrow x_1 = x_2$

$\cos(y_1 - y_2) + i\sin(y_1 - y_2)$

$\cos(y_1 - y_2) = 1 \wedge \sin(y_1 - y_2) = 0$

$y_1 - y_2 = 2n\pi, \ n \in \mathbb{Z}$

$\alpha \leq \operatorname{Im} z < \alpha + 2\pi$ – трака паралелна реалној оси не шира од 2π

питамо се како изгледа та инверзна функција?

$z \neq 0$

Свако $w \in \mathbb{C}$ са особином да је $e^w = z$ назива се логаритам комплексног броја z и означава са $\operatorname{Ln} z$.

$z = |z|(\cos \operatorname{Arg} z + i\sin \operatorname{Arg} z)$

$w = u + iv \qquad e^w = e^u \cdot e^{iv} = e^u(\cos v + i\sin v)$

Мора бити $e^u(\cos v + i\sin v) = |z|(\cos \operatorname{Arg} z + i\sin \operatorname{Arg} z)$

$e^u = |z|$

$u = \ln|z|$

$\cos v + i\sin v = \cos \operatorname{Arg} z + i\sin \operatorname{Arg} z$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \cos v = \cos \operatorname{Arg} z \\ \sin v = \sin \operatorname{Arg} z \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{v = \operatorname{Arg} z}$

$w = u + iv = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z$

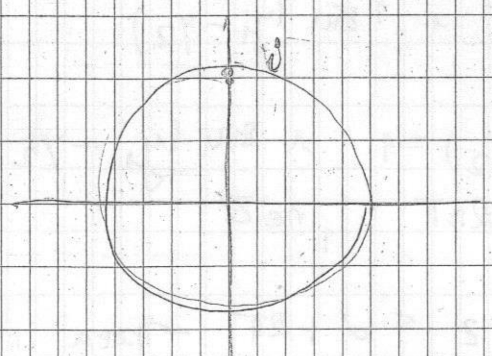
$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z \qquad \operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

$0 \leq \arg z < 2\pi$

$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\arg z + 2k\pi i, \ k \in \mathbb{Z}$

могу се потпуно равноправно узети све вредности две узастопне вредности са разликује за $2\pi i$

Пример: $\operatorname{Ln} i \to ?$



$$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\pi/2$$

$$\arg z = \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{Ln} i = \ln|i| + i\,\pi/2 + 2k\pi i, \quad k\in\mathbb{Z}$$

$$\operatorname{Ln} i = i(\pi/2 + 2k\pi), \quad k\in\mathbb{Z}$$

има их пребројиво много

често ће нам бити потребне

нека вредност која природно нема

$$i^i = e^{i \operatorname{Ln} i} = e^{i\, i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)} = e^{-\pi/2 - 2k\pi}, \quad k\in\mathbb{Z}$$

4° Тригонометријске функције

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y) \qquad z = x + iy$$

$$\left.\begin{aligned} e^{iy} &= \cos y + i\sin y \\ e^{-iy} &= \cos y - i\sin y \end{aligned}\right\} \Rightarrow \cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}$$

$$\sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

непосредно се добија

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$(\sin z)' = \cos z \qquad \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}$$

$$(\cos z)' = -\sin z \qquad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

$$\sin(z + 2\pi) = \sin z$$

$$\cos(z + 2\pi) = \cos z$$

У комплексној равни нису ограничене

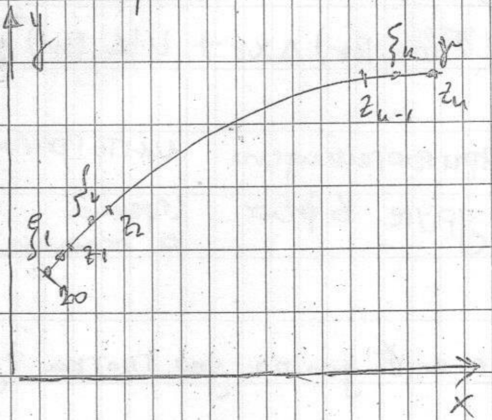
$$\cos z = \cos it = \frac{e^{iit} + e^{-iit}}{2} = \frac{e^{t} + e^{-t}}{2} = \operatorname{ch} t \xrightarrow[t\to\pm\infty]{} \infty$$

Рационална функција $R(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$ P_n, Q_m полиноми по z степена n и m

↓

аналитичка у целој комплексној равни када се из ње одстране нуле полинома Q_m под претпоставком да P_n и Q_m немају заједничке нуле!

Интеграл комплексне функције (писмено 8.)



Нека је у комплексној равни дата крива γ која је део по део глатка – оно са разлог. не коначно много пунктова. извод таквих функција има коначно много тачака прекида

$f : \gamma \to \mathbb{C}$

$\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$, $k = 1, \ldots, n$

бирамо тачке $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$

Саставимо збир $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k$ – интегрална сума функције f која одговара подели γ тачкама $z_0, z_1, \ldots, z_n$ и избору најближих тачака ξ_i

Дефиниција: Ако постоји $\lim\limits_{\substack{1\le i\le n \\ \max|\Delta z_i|\to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k$ и означимо га са I онда се каже да је I интеграл комплексне функције f по кривој γ и означава се са $\int_\gamma f(z)\,dz$

$$\left(I = \int_\gamma f\,dz \overset{\text{def}}{\iff} (\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall P)\left(\lambda(P)<\delta \Rightarrow \left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k - I\right|<\varepsilon\right.\right.$$

$z_k = x_k + i y_k$ $\qquad \Delta z_k = x_k - x_{k-1} + i(y_k - y_{k-1})$

$\xi_k = \alpha_k + i\beta_k$

$f(z) = u(x,y) + i\, v(x,y)$

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta z_k = \sum_{k=1}^{n} \left(u(\alpha_k,\beta_k) + i\, v(\alpha_k,\beta_k)\right)(\Delta x_k + i\Delta y_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} u(\alpha_k,\beta_k)\Delta x_k - v(\alpha_k,\beta_k)\Delta y_k + i\left(\sum_{k=1}^{n} v(\alpha_k,\beta_k)\Delta x_k + u(\alpha_k,\beta_k)\Delta y_k\right)$$

$$= \int_\gamma u\,dx - v\,dy + i\int_\gamma v\,dx + u\,dy$$

→ криволинијски интеграли друге врсте (преносе се особине)

Ако су u и v део по део непрекидне функције а γ део по део глатка ф-ја
довољно је рећи

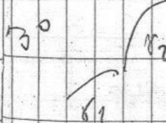
Може да а дефиниције мало општије. Овде ће бити деф. довољније

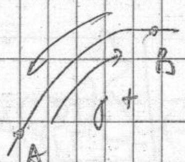
Особине интеграла комплексне функције

(последица особина криволинијског интеграла друге врсте)

1° $\int_\gamma (f+g)\,dz = \int_\gamma f\,dz + \int_\gamma g\,dz$

2° $\int_\gamma c f\,dz = c\int_\gamma f\,dz$

3° 
$\int_\gamma f\,dz = \int_{\gamma_1} f\,dz + \int_{\gamma_2} f\,dz$ $\qquad \gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$

4° 

$\int_{\gamma^+} f\,dz = -\int_{\gamma^-} f\,dz$

5° $\left|\int_\gamma f\,dz\right| \le \int_\gamma |f(z)|\,ds$

ds елемент дужи криве γ

$\gamma:\ z = x(t) + i y(t)$

$ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt$

$dz = dx + i\,dy$

$ds = |dz|$

Зависи од оријентације $\left|\int_\gamma f\,dz\right| \le \int |f|\cdot|dz|$

Ако је $|f(z)| \le M \ \forall z \in \gamma \Rightarrow \left|\int_\gamma f\,dz\right| \le M\int_\gamma |dz| = M$ (дужина лука криве γ)

датум: 28. 3. 2012.

γ - део по део глатка крива

$f: \gamma \to \mathbb{C}$ (део по део непрекидна)

$\int_\gamma f dz = \int_\gamma u dx - v dy + i \int_\gamma u dy + v dx$ (преносе се особине интеграла 2. врсте)

$f = u + iv$

$\gamma: z = z(t) = x(t) + i y(t) \quad \alpha \le t \le \beta$ - параметризована крива

x', y' постоје и непрекидни су сем у коначно много тачака

$\int_\gamma f(z) dz = \int_\alpha^\beta [u(x(t), y(t)) x'(t) - v(x(t), y(t)) y'(t)] dt \quad [\alpha, \beta]$

$+ i \int_\alpha^\beta [u(x(t), y(t)) y'(t) + v(x(t), y(t)) x'(t)] dt =$

$= \int_\alpha^\beta f(z(t)) z'(t) dt$ - не зависи од начина параметризације

$z'(t) = x'(t) + i y'(t)$

$\left| \int_\gamma f dz \right| \le \left| \int_\alpha^\beta f(z(t)) z'(t) dt \right| \le$

$\le \int_\alpha^\beta |f(z(t))| \, |z'(t)| dt = \int_\gamma |f(z)| ds =$

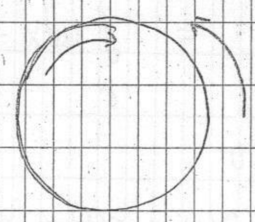
$|z'(t)| = \sqrt{x'^2 + y'^2} \quad dt$ $\qquad ds$ - елемент лука γ

$= \int_\gamma |f(z)| \, |dz|$

Ако је $|f(z)| \le M$ на γ.

$\left| \int_\gamma f dz \right| \le M \cdot \int_\gamma |dz| = M \cdot \underbrace{\text{дужина криве } \gamma}_{|\gamma|} = M \cdot |\gamma|$

Примери: 1) $\oint_\gamma (z-a)^n dz =$ $\quad n\in\mathbb{Z}$ $\quad \gamma = \{z : |z-a| = r\}$



$= \int_0^{2\pi} (re^{it})^n \cdot ri e^{it} dt =$

$= \int_0^{2\pi} r^{n+1} i\, e^{it(n+1)} dt =$

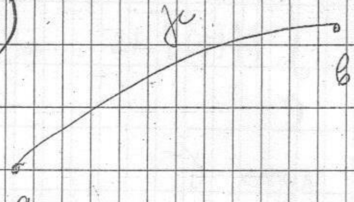
$= i\, r^{n+1} \begin{cases} 0, & n\neq -1 \\ 2\pi, & n=-1\end{cases}$

$z-a = re^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$, $z'(t) = rie^{it} dt$ — параметризација

$= 2\pi i \begin{cases} 0, & n\neq -1 \\ 1, & n=-1\end{cases}$ $\quad r^0 = 1$

$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma (z-a)^n dz = \begin{cases} 1, & n=-1 \\ 0, & n\neq -1\end{cases}$ не зависи од полупречника кружнице

2)



$z = z(t)$ $\quad \alpha \le t \le \beta$

$z(\alpha) = a$

$z(\beta) = b$

Нека је $n \in \{0,1,2,\dots\}$

$\int_\gamma z^n dz = \int_\alpha^\beta (z(t))^n z'(t)\, dt = \int_\alpha^\beta \left(\frac{z^{n+1}(t)}{n+1}\right)' dt =$ Њутн-Лајбницова формула

$= \frac{z^{n+1}(\beta) - z^{n+1}(\alpha)}{(n+1)} = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}$ * зависи само од почетне и крајње тачке

Ако је γ део по део глатка затворена крива (без самопресека) онда је

$\oint_\gamma z^n dz = 0 \quad \forall n \in \{0,1,2,\dots\}$

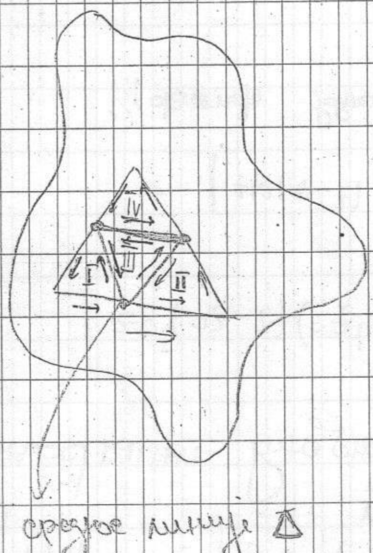
Теорема (основна Кошијева): Нека је f аналитичка функција у области D која је непрекидна на затворењу те области тада је $\int_{\partial D} f(z)dz = 0$. (претпостављамо да је ∂D део по део глатка, затворена крива)

тачке области остају с лева доследна оријентација

Доказ:

1° корак: **Став**: Нека је f аналитичка функција у области D. Тада за сваки $\triangle$ који лежи у области D важи $\int_{\partial\triangle} f\,dz = 0$.

Доказ 1: Претпоставимо супротно тј. да постоји $\triangle$ који лежи у области D и $\left|\int_{\partial\triangle} f\,dz\right| = M > 0$



средње линије $\triangle$

$$\int_{\partial I} f\,dz + \int_{\partial II} f\,dz + \int_{\partial III} f\,dz + \int_{\partial IV} f\,dz = \int_{\partial\triangle} f\,dz$$

$$\Downarrow$$

Неки од троуглова I, II, III, IV има особину да је модуо интеграл по његовој граници $\geq \frac{M}{4}$

Тај троугао означимо са $\triangle_1$

$$\left|\int_{\partial\triangle_1} f\,dz\right| \geq \frac{M}{4}$$

Слично $\exists\, \triangle_2 \subset \triangle_1$ такав да је $\left|\int_{\partial\triangle_2} f\,dz\right| \geq \frac{\frac{M}{4}}{4} = \frac{M}{4^2}$

сви су затворени

$\triangle \supset \triangle_1 \supset \triangle_2 \supset \triangle_3 \supset \ldots \supset \triangle_n \supset \ldots$

$$* \quad \left|\int_{\partial\triangle_n} f\,dz\right| \geq \frac{M}{4^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\delta(\Delta_n)$ - дијаметар троугла $\Delta_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\bigcap_{n=1,\dots} \Delta_n = \{z_0\}$ $z_0 \in D$ - на основу теореме о уметнутим одсечцима

f је аналитичка $\Rightarrow f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \alpha(z,z_0)(z-z_0)$

при чему је $\lim_{z\to z_0} \alpha(z,z_0) = 0$.

$\lim_{z\to z_0} \alpha(z,z_0) = 0 \iff (\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall z)(|z-z_0|<\delta \Rightarrow |\alpha(z,z_0)|<\varepsilon)$

Уочимо околину $U = \{z : |z-z_0|<\delta\}$

Како је $z_0 \in \Delta_n \ \forall n$ и $\delta(\Delta_n)\to 0$ то за $n \geq n_0$ важи $\Delta_n \subset U$.

Хајде да проценимо $\left|\int_{\partial\Delta_n} f\,dz\right|$, $\Delta_n \subset U$ → погледај пример!!!

$$\left|\int_{\partial\Delta_n} f\,dz\right| = \left|\underbrace{\int_{\partial\Delta_n} f(z_0)\,dz}_{=0} + \underbrace{\int_{\partial\Delta_n} f'(z_0)(z-z_0)\,dz}_{=0} + \int_{\partial\Delta_n}\alpha(z,z_0)(z-z_0)\,dz\right| =$$

по малопре доказаном

$$= \left|\int_{\partial\Delta_n}\alpha(z,z_0)(z-z_0)\,dz\right|$$

искористимо основну интегралну неједнакост

$$\left|\int_{\partial\Delta_n}\alpha(z,z_0)(z-z_0)\,dz\right| \leq \int_{\partial\Delta_n}|\alpha(z,z_0)|\,|z-z_0|\,|dz| \leq \varepsilon\int_{\partial\Delta_n}|z-z_0|\,|dz|$$

$$< \varepsilon\int_{\partial\Delta_n}|\partial\Delta_n|\,|dz| = \varepsilon|\partial\Delta_n|^2 = \varepsilon\left(\frac{1}{2^n}\cdot|\partial\Delta|\right)^2 = \varepsilon\cdot\frac{|\partial\Delta|^2}{4^n}$$

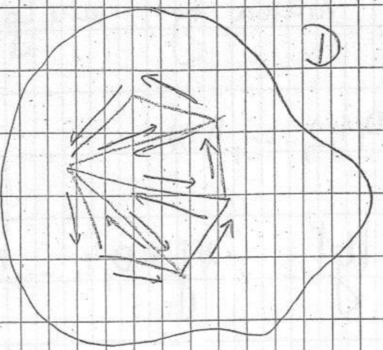
$$\frac{M}{4^n} \overset{(*)}{\leq} \left|\int_{\partial\Delta_n} f\,dz\right| \leq \frac{\varepsilon|\partial\Delta|^2}{4^n} \Rightarrow \boxed{M \leq \varepsilon|\partial\Delta|^2} \ \forall\varepsilon>0 \Rightarrow \boxed{M=0}$$

$\lightning$

$M = \left|\int_{\partial\Delta} f\,dz\right|$ ∇ грешка у претпоставци

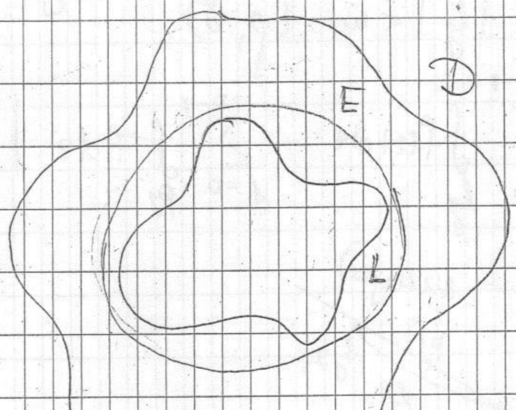
Доказали смо $\int_{\partial\Delta} f\,dz = 0 \quad \forall \Delta \subset D$

- полигон у области



$\int_{\partial\Pi} f\,dz = 0$

2) Триангулација полигона



L део по део глатка крива

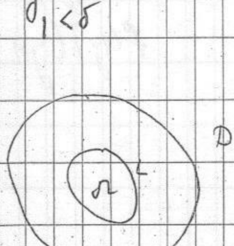
3°) * Покажимо: Ако је f аналитичка у D

$\Rightarrow \int_L f\,dz = 0$

$\delta = \operatorname{dist}(L, D)$

$E = \overline{E}$, E ограничен $L \subset E$

$\delta_1 < \delta$

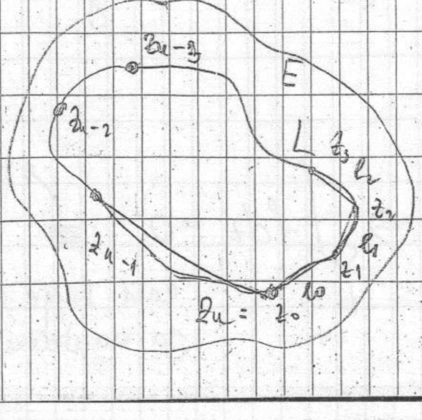


$E = \bigcup_{z\in L} B(z,\delta_1)$

⇒ због компактности E

f је на E равномерно непрекидна

тј. $(\forall\varepsilon>0)(\exists\rho>0)(\forall z_1,z_2\in E)\left(|z_1-z_2|<\rho \Rightarrow |f(z_1)-f(z_2)|<\varepsilon\right)$



бирамо n тачака на L

Датум: 21.3.2012.

$\{z : |z-a|<r\}$

$\{z : |z-a|\le r\}$

$\{z : |z-a|=r\}$

$G \subset \mathbb{C}$

↳ отворен ако за сваку тачку $a \in G$ постоји $r>0$: $\{z : |z-a|<r\} \subset G$

Скуп $F \subset \mathbb{C}$ је затворен ако је $\mathbb{C} \setminus F$ отворен.

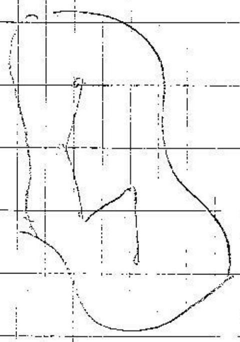
За тачку z кажемо да припада рубу скупа G ако за свако $r>0$ у скупу $\{\xi : |\xi - z|<r\}$ има тачака и скупа G и скупа $\mathbb{C} \setminus G = G^c$

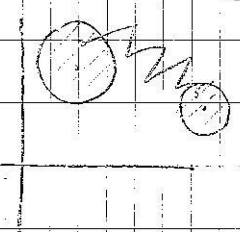
∂G - граница (руб) скупа G

$G \cup \partial G = \overline{G}$

Област $G \subset \mathbb{C}$

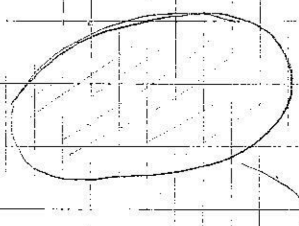
област:
- G отворен
- за сваке 2 тачке из G постоји изломљена линија која их спаја а цела лежи у G (путна повезаност)





није област

јесте област



G - област у $\mathbb{C}$

∂G - може да се састоји из једне компоненте: просто повезана или од више дисјунктних компоненти

идеја је да постоји изломљена линије која повезује 2 тачке

двоструко повезана

Ред повезаности - број дисјунктних компонената тачке $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$ $(z_n \equiv z_0)$ тако да дужина највећег од путева l_j $(j=0,1,\dots,n-1)$ буде мања од $\min(\rho,\delta)$

$$|l_j| < \min(\rho,\delta) \quad \forall j = 0,1,2,\dots,n-1$$

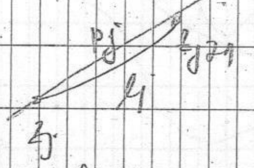
$$[z_j, z_{j+1}] = p_j \qquad |p_j| \le |l_j| \qquad \forall j = 0,1,\dots,n-1$$

$\Pi = \bigcup_{j=0}^{n-1} p_j$ полигонална линија, све тачке дужи p_j а самим тим и Π леже у E због $|l_j| < \min(\rho,\delta)$

$$\left|\int_L f\,dz\right| = \left|\int_L f\,dz - \underbrace{\int_\Pi f\,dz}_{0}\right| = \left|\sum_{j=0}^{n-1}\int_{l_j} f(z)\,dz - \sum_{j=0}^{n-1}\int_{p_j} f\,dz\right| \le$$

(полигонална линија)

$$\le \sum_{j=0}^{n-1}\left|\int_{l_j} f\,dz - \int_{p_j} f\,dz\right| \quad (*)$$



$$* \left|\int_{l_j} f\,dz - \int_{p_j} f\,dz\right| = \left|\int_{l_j}(f(z)-f(z_j))\,dz + \underbrace{\int_{l_j} f(z_j)\,dz}_{f(z_j)(z_{j+1}-z_j)} - \int_{p_j}(f(z)-f(z_j))\,dz - \underbrace{\int_{p_j} f(z_j)\,dz}_{f(z_j)(z_{j+1}-z_j)}\right|$$

$$= \left|\int_{l_j}(f(z)-f(z_j))\,dz - \int_{p_j}(f(z)-f(z_j))\,dz\right| \le$$

$$\le \int_{l_j}|f(z)-f(z_j)|\,|dz| + \int_{p_j}|f(z)-f(z_j)|\,|dz| < \varepsilon|l_j| + \varepsilon|p_j| <$$

$$< 2\varepsilon|l_j|$$

$$(*) \le \sum_{j=0}^{n-1} 2\varepsilon|l_j| = 2\varepsilon|L| \Rightarrow \int_L f\,dz = 0 \ \blacksquare$$

за случај криве без самопресека

али није довољно за општи случај!

4°)

Претпоставићемо f је аналитичка у ограниченој области D непрекидна на $\overline{D}$ и нека постоји тачка $z_0 \in D$ са особином да све полуправе из z_0 секу ∂D само у једној тачки $\Rightarrow \int_{\partial D} f\,dz = 0$

(звездолика област)

датум: 2.4.2012.

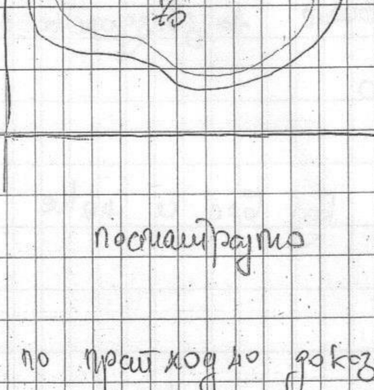
Теорема

Нека је област D звездолика, ограничена, ∂D је део по део глатка граница. Ако је f аналитичка на D и непрекидна на $\overline{D}$. Тада је $\int_{\partial D} f\,dz = 0$. (наша област је простоповезана (имплицитно следи))

(због компактности $\overline{D}$)

Доказ: f је равномерно непрекидна на $\overline{D}$ тј.

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall z_1, z_2 \in \overline{D})\left(|z_1 - z_2| < \delta \Rightarrow |f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon\right)$$



$$\left.\begin{aligned} z(t) &= z_0 + \lambda(t) \\ 0 &\le t \le 2\pi \end{aligned}\right\} \text{ вршимо параметризацију}$$

узмимо $0 < \rho < 1$

посматрајмо области D_ρ тако да је $\partial D_\rho = \{z_0 + \rho\lambda(t) : 0 \le t \le 2\pi\}$

по претходно доказаном $\int_{\partial D_\rho} f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho\lambda(t))\,\rho\cdot\lambda'(t)\,dt$

λ' је део по део непрекидна на $[0, 2\pi]$

$$\left[\int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho\lambda(t))\,\lambda'(t)\,dt = 0 \quad \forall \rho \in (0,1)\right]$$

$$\left|\int_{\partial D} f(z)\,dz\right| = \left|\int_0^{2\pi} f(z_0 + \lambda(t))\,\lambda'(t)\,dt\right| = \left|\int_0^{2\pi} f(z_0 + \lambda(t))\,\lambda'(t)\,dt - \underbrace{\int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho\lambda(t))\,\lambda'(t)\,dt}_{0}\right|$$

$$= \left|\int_0^{2\pi} \big(f(z_0+\lambda(t)) - f(z_0+\rho\lambda(t))\big)\cdot \lambda'(t)\,dt\right| \le \int_0^{2\pi} |f(z_0+\lambda(t)) - f(z_0+\rho\lambda(t))|\,|\lambda'|\,dt$$

$$\le M\int_0^{2\pi} |f(z_0+\lambda(t)) - f(z_0+\rho\lambda(t))|\,dt \le$$

$|\lambda(t)| \le M$

$|\lambda'(t)| \le M$

$z_1 = z_0+\lambda(t)$

$z_2 = z_0+\rho\lambda(t)$

$$|z_1 - z_2| \le |\lambda(t)|\,(1-\rho) \le M(1-\rho) < \delta \Rightarrow 1-\rho < \frac{\delta}{M}$$

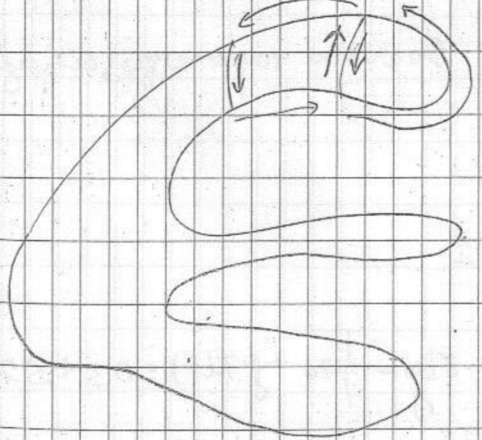
$$1 > \rho > 1-\frac{\delta}{M}$$

$$|f(z_1)-f(z_2)| = |f(z_0+\lambda(t)) - f(z_0+\rho\lambda(t))| < \varepsilon$$

у том тренутку детерминисано δ

$$\Rightarrow \le M\int_0^{2\pi} \varepsilon\,dt = \underline{\underline{2\pi M\varepsilon}}$$

$$\Rightarrow \left|\int_{\partial D} f(z)\,dz\right| \le 2\pi M\varepsilon \qquad \text{кад } \varepsilon\to 0 \Rightarrow \int_{\partial D} f\,dz = 0.$$



Дозвољава распарчавање на звездолике области

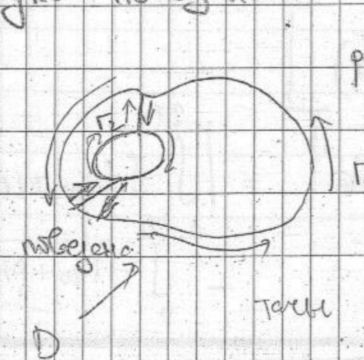
њих коначно много

„Ни таква патологија код вас се неће појавити".

Коментар: Основна Кошијева теорема важи и када је област вишеструко повезана.

разбијемо на 2 простоповезане

Пример



двоструко повезана

$$\int_{\partial D} f\,dz = \int_{\Gamma_1} f\,dz + \int_{\Gamma_2} f\,dz = 0$$

тачке области остају са леве стране

вишак претпоставка

Коши је овако рекао: Нека је f аналитичка у D, непрекидна на $\overline{D}$, ∂D део по део глатка крива и f' непрекидна ф-ја на $D \Rightarrow$

$$\int_{\partial D} f\,dz = 0$$

$$\int_{\partial D} f\,dz = \int_{\partial D} u\,dx - v\,dy + i\int_{\partial D} v\,dx + u\,dy = \iint_D \underbrace{(-v_x - u_y)}_{=0}\,dx\,dy + i\iint_D \underbrace{(u_x - v_y)}_{=0}\,dx\,dy$$

Гринова формула — применимо

$$\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

на основу Коши-Риманових једначина $-v_x - u_y = 0$, $u_x - v_y = 0$

а ово имамо из непрекидности f'.

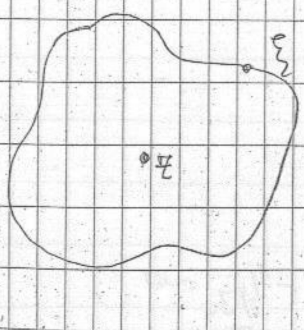
Теорема (Основна Кошијева интегрална формула): (испитане ∂)

Ако је f аналитичка у D, непрекидна на $\overline{D}$, ∂D део по део глатка тада $\forall z \in D$ важи

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi}$$

можемо третирати као параметарски интеграл

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}\,d\xi$$



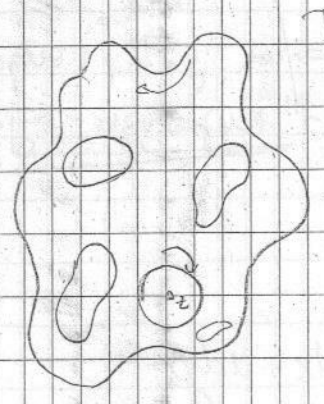
$$\left(\frac{1}{\xi - z}\right)^{(n)}_{(z)} = \frac{n!}{(\xi - z)^{(n+1)}}$$

имамо изводе свих редова по z!

Кошијева интегрална формула за изводе!

последица Коши-Риманових једначина и аналитичности у тачки и околини

Доказ:



D – n-тоструко повезана $\Rightarrow$ D_ρ (n+1)-струко повезана

$$U = \{\xi : |\xi - z| < \rho\} \subset D$$

$$D_\rho = D \setminus \bar{U}$$

$$g(\xi) = \frac{f(\xi)}{\xi - z}$$ – аналитичка у D_ρ и непрекидна на $\bar{D}_\rho$

$$\int_{\partial D_\rho} g(\xi)\,d\xi = 0$$ на основу Кошијеве опште теореме

$$= \int_{\partial D} g(\xi)\,d\xi + \oint_{|\xi - z| = \rho} g(\xi)\,d\xi = 0$$

$$\xi = z + \rho e^{i\theta}$$

$$\int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi = -\oint_{|\xi - z| = \rho} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi = \oint_{|\xi - z| = \rho} \frac{f(\xi)}{\xi - z} = \int_0^{2\pi} \frac{f(z + \rho e^{i\theta})}{\rho e^{i\theta}}\,\rho i e^{i\theta}\,d\theta$$

добијамо $$\int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi = \int_0^{2\pi} f(z + \rho e^{i\theta})\,d\theta$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z + \rho e^{i\theta})\,d\theta$$

кад $\rho \to 0+$ (можемо да уђемо под интеграл)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi = f(z)$$

$f = u + iv$

$u_x = v_y$

$v_x = -u_y$

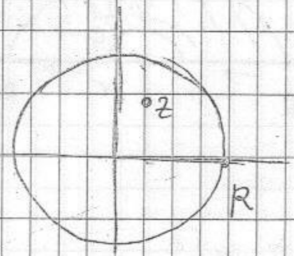
$$\left.\begin{aligned} u_{xx} &= v_{yx} \\ u_{yy} &= -v_{xy} \end{aligned}\right\} (+) \qquad \begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0 \\ v_{xx} + v_{yy} &= 0 \end{aligned}$$

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ $\quad \left.\begin{array}{l} \Delta u = 0 \\ \Delta v = 0 \end{array}\right\}$ u и v су хармонијске функције

u и v су реалне

Лиувил

Теорема (Лиувил) Ако је f аналитичка у $\mathbb{C}$ и $\exists M < \infty : |f(z)| \le M$ $\forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow f \equiv \text{const}.$



$|z| < R$

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi|=R} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2}\, d\xi$$

$$|f'(z)| \le \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi|=R} \frac{|f(\xi)|}{|\xi - z|^2} |d\xi| \le \frac{M}{2\pi} \int_{|\xi|=R} \frac{|d\xi|}{|\xi - z|^2} \le \frac{M}{2\pi} \int_{|\xi|=R} \frac{|d\xi|}{|\xi - z|^2} \le$$

$$\le \frac{M}{2\pi} \int_{|\xi|=R} \frac{|d\xi|}{(R - |\xi|)^2} = \frac{M}{2\pi} \frac{1}{(R - |z|)^2} \cdot 2\pi R$$

$$\Rightarrow |f'(z)| \le \frac{M R}{(R - |z|)^2} \quad \forall R : R > |z| \quad R \to +\infty$$

$$0 \le |f'(z)| \le 0$$

$$\Rightarrow f'(z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow f \equiv \text{const}. \ \blacksquare$$

Основни став АЛГЕБРЕ

Ако је P полином степена $n \ge 1$ са комплексних коефицијентима тада $\exists z_0 \in \mathbb{C} : P(z_0) = 0.$

Доказ:

Претпоставимо супротно тј. $\forall z \in \mathbb{C}$ $P(z) \ne 0$.

$f(z) = \frac{1}{P(z)}$ — аналитичка ф-ја у $\mathbb{C}$

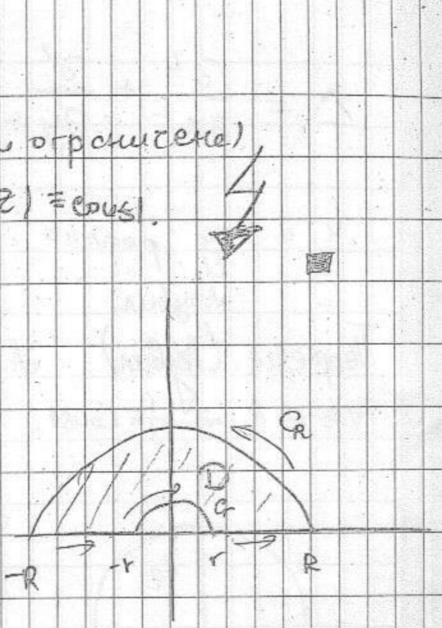
$\lim_{z \to \infty} f(z) = 0 \Rightarrow |f(z)| \le 1$ за $|z| > R$

$|f(z)| \le \max_{|z| \le R} |f| = C_1 \Rightarrow$

$|f(z)| \le \max(1, C_1)$ $\forall z \in \mathbb{C}$ (мора бити ограничена)

преко теореме Лиувила $f \equiv const. \Rightarrow P(z) \equiv const.$ ⚡ ■

Пример: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$



посматрамо комплексну ф-ју $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z}$

$f(z)$ је аналитичка у D и непрекидно

$$\int_{\partial D} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = 0$$

$$\int_r^R \frac{e^{ix}}{x}\,dx + \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz + \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x}\,dx + \int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = 0$$

$$\int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x}\,dx \qquad \overset{x=-t}{\int_R^r} \frac{e^{-it}}{-t}(-dt) = -\int_r^R \frac{e^{-it}}{t}\,dt = -\int_r^R \frac{e^{-ix}}{x}\,dx$$

$$\int_r^R \frac{e^{ix}}{x}\,dx - \int_r^R \frac{e^{-ix}}{x}\,dx + \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz + \int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = 0$$

$$2i\int_r^R \frac{\sin x}{x}\,dx + \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz + \int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = 0$$

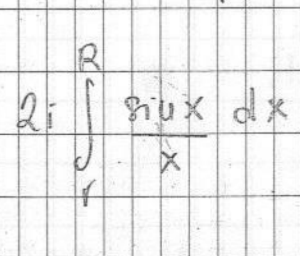
$\boxed{\sin\theta \ge \frac{2}{\pi}\theta \quad 0 \le \theta \le \pi/2}$ (*) Жорданова неједнакост

пустимо $r \to 0$, $R \to +\infty$

$$\left|\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz\right| = \left|\int_0^{2\pi} \frac{e^{i(R\cos\theta + iR\sin\theta)}}{Re^{i\theta}} Rie^{i\theta}\,d\theta\right|$$

$z = Re^{i\theta}$ смена

$$\le \int_0^{\pi} e^{-R\sin\theta}\,d\theta = 2\int_0^{\pi/2} e^{-R\sin\theta}\,d\theta \le$$



$$\le 2\int_0^{\pi/2} e^{-\frac{R2}{\pi}\theta}\,d\theta = 2\frac{e^{-\frac{2R\theta}{\pi}}}{-\frac{2R}{\pi}}\Bigg|_0^{\pi/2} =$$

лепу ћемо направити

$$= \frac{\pi}{R}\left(1-e^{-R}\right) \le \frac{\pi}{R} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

$$\int_{C_1} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = \int_{\pi}^{0} \frac{e^{i(r\cos\theta + ir\sin\theta)}}{re^{i\theta}}\, ri e^{i\theta}\, d\theta = -i\int_0^{\pi} e^{i(\cos\theta + i\sin\theta)r}\, d\theta \xrightarrow[r\to 0]{}$$

$z = re^{i\theta}$

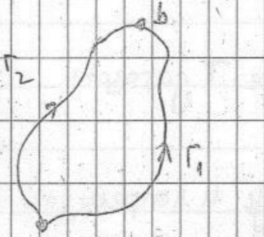
$$\longrightarrow -i\int_0^{\pi} d\theta = -\pi i$$

$$2\cancel{i}\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \pi\cancel{i} \Rightarrow \boxed{\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}}$$

датум: 9.4.2012.

D - простоповезана област, f - аналитичка функција у D

$a \neq b \quad a, b \in D$



Γ_1, Γ_2 део по део глатке $\Gamma_1, \Gamma_2 \in D$

$\Gamma_1 \cup \Gamma_2^-$

$$\int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2^-} f\,dz = 0 \qquad \int_{\Gamma_1} f\,dz + \int_{\Gamma_2^-} f\,dz = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\Gamma_1} f\,dz = \int_{\Gamma_2} f\,dz \quad \left(= \int_a^b f(z)\,dz\right)$$

$\int$ од a до b не зависи од криве по којој вршимо интеграцију ако је област простоповезана

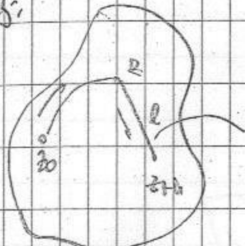
Дефиниција: За неку функцију Φ кажемо да је примитивна функција функције f у области D ако постоји Φ' за свако $z \in D$ и важи

$\Phi'(z) = f(z), \; z \in D.$

(ако су Φ_1 и Φ_2 две примитивне функције исте функције f онда је $\Phi_1' = \Phi_2' = f$ односно $(\Phi_1 - \Phi_2)' = 0 \Rightarrow \Phi_1 - \Phi_2 = const$)

Теорема: Ако је ф-ја f аналитичка у простоповезаној области D тада је ф-ја $F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\xi)\,d\xi$ аналитичка у D и важи $F'(z)=f(z)$.

Доказ:



h довољно мало по модулу тако да $z+h\in D$

бирамо најпростији праволинијски пут

$$F(z+h)=\int_{z_0}^{z} f(\xi)\,d\xi+\int_{l} f(\xi)\,d\xi = F(z)+\int_{l} f(\xi)\,d\xi$$

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h}=\frac{1}{h}\int_{z}^{z+h} f(\xi)\,d\xi$$

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h}-f(z)=\frac{1}{h}\int_{z}^{z+h}\left(f(\xi)-f(z)\right)d\xi$$

Ако покажемо да је $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{z}^{z+h}\left(f(\xi)-f(z)\right)d\xi=0$ онда је Т доказана.

Ако је f аналитичка у D то је аналитичка и у $\xi=z$ па је и непрекидна у тој, а то значи $(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall\xi\in D)\left(|\xi-z|<\delta\Rightarrow|f(\xi)-f(z)|<\varepsilon\right)$

$$\left|\frac{1}{h}\int_{z}^{z+h}\left(f(\xi)-f(z)\right)d\xi\right|\le\frac{1}{|h|}\int_{z}^{z+h}|f(\xi)-f(z)|\,|d\xi|<\frac{1}{|h|}\int_{z}^{z+h}\varepsilon\,|d\xi|=\varepsilon$$

од z до $z+h$ праволинијска путања

- како је $h<\delta$, ξ ће бити на дужи која спаја z и $z+h$ што значи $h<\delta\Rightarrow\left|\frac{1}{h}\int_{z}^{z+h}\left(f(\xi)-f(z)\right)d\xi\right|<\varepsilon$

$\Rightarrow \lim_{h\to 0}=0$ што је и требало доказати.

Последица (Њутн-Лајбницова формула): Ако је f аналитичка у простоповезаној области $z_0, z\in D$ тада је $\int_{z_0}^{z} f(\xi)\,d\xi=\Phi(z)-\Phi(z_0)$ где је Φ примитивна функција функције f.

Доказ: Видели смо да је ф-ја $F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\xi)\,d\xi$ примитивна ф-ја.

Ако је Φ било која друга примитивна Φ-ја $\Rightarrow \Phi(z) - F(z) = C$ (конст)

$$\left.\begin{array}{l} \Phi(z) = C + \int_{z_0}^{z} f(\xi)\,d\xi \\ z = z_0 \\ \Phi(z_0) = C \end{array}\right\} \Rightarrow \Phi(z) - \Phi(z_0) = \int_{z_0}^{z} f(\xi)\,d\xi$$

Пример: двострукоповезана област - круг без центра

$$f(z) = \frac{1}{z} \qquad |\xi| = r \quad 0 < r < 1 \qquad t = re^{i\theta}$$

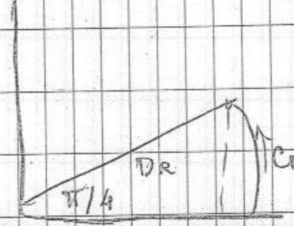
$$\oint \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{rie^{i\theta}\,d\theta}{re^{i\theta}} = 2\pi i \Rightarrow \text{нију} = 0 \Rightarrow \text{не важи}$$

(област није просто повезана)

Пример: Френелови интеграли (оптика)

$$\int_0^\infty \cos(x^2)\,dx \quad \text{и} \quad \int_0^\infty \sin(x^2)\,dx$$

$f(z) = e^{iz^2}$ - аналитичка ф-ја у целој комплексној равни



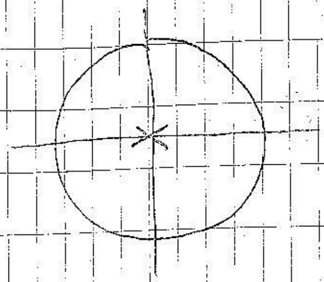
$z = x(1+i) \qquad x \in [R\sqrt{2}/2, 0]$

$$R\cos\frac{\pi}{4} = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

$$\int_{\partial D_R} f(z)\,dz = 0$$

$$\int_0^R e^{ix^2}dx + \int_{C_R} e^{iz^2}dz + \int_{\frac{R\sqrt{2}}{2}}^{0} e^{2ix^2 - 2i}(1+i)\,dx = 0$$

$$\int_0^R e^{ix^2}dx - (1+i)\int_0^{R\sqrt{2}/2} e^{-ix^2}dx = -\int_{C_R} e^{iz^2}dz \to 0 \qquad \left(\int e^{iz^2}dz \to 0 \text{ kad } R \to \infty\right)$$



двострукоповезана

Низови у $\mathbb{C}$

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ $\quad f(n) = a_n \in \mathbb{C}$

$(a_n)_{n=1}^{\infty}$

Дефиниција: $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $a_n \in \mathbb{C}$ се каже да конвергира $a \in \mathbb{C}$

$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists n_0 \in \mathbb{N})\ (\forall n \in \mathbb{N})\ (n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon)$

$a_n = \alpha_n + i\beta_n$

$a = \alpha + i\beta$

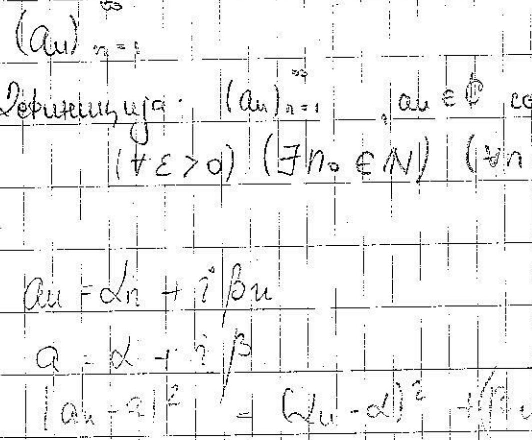
$|a_n - a|^2 = (\alpha_n - \alpha)^2 + (\beta_n - \beta)^2 \to 0$

конвергира ако и само ако $\alpha_n \to \alpha$ и $\beta_n \to \beta$

$(a_n)_{n=1}^{\infty}$ $a_n \in \mathbb{C}$ Пишемо $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \infty$ ако за свако $M > 0$ постоји $n_0 \in \mathbb{N}$: $n \geq n_0 \Rightarrow |a_n| > M$.

замишљамо један симбол

Риманова сфера



ако је унутар јединичног круга одговара једна тачка доње полусфере

тачка комплексне равни

$\mathbb{C} \cup \{\infty\} = \hat{\mathbb{C}}$ → затворена комплексна раван

Свакој тачки ван јединичног круга можемо да придружимо једну тачку горње полусфере

$$\int_0^\infty \cos(x^2)\,dx + i\int_0^\infty \sin(x^2)\,dx = (1+i)\int_0^\infty e^{-2x^2}dx$$

$$\int_0^\infty \sin(x^2)\,dx = \int_0^\infty \cos(x^2)\,dx = \int_0^\infty e^{-2x^2}dx = \int_0^\infty e^{-t^2}\frac{dt}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

реални делови исти

$z = Re^{i\varphi}$ $\quad 0\le\varphi\le\pi/4$

оцењујемо $\left|\int_{C_R} e^{iz^2}dz\right| = \left|\int_0^{\pi/4} e^{iR^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)}\, Rie^{i\varphi}d\varphi\right| \le \int_0^{\pi/4} e^{-R^2\sin 2\varphi}R\,d\varphi$

$$= \frac{R}{2}\int_0^{\pi/2} e^{-R^2\sin x}dx \le \frac{R}{2}\int_0^{\pi/2} e^{-R^2\frac{2}{\pi}x}dx \to 0$$

Пример:

$f(z)=e^{-\lambda z^2}$ $\quad \lambda\ge 0$, $\lambda=\text{const.}$ $\quad f(z)$ је аналитичка

- бирамо правоугаоник и правимо област

$$\int_{\partial D_R} f(z)\,dz = 0$$

$$\int_{-R}^{R} e^{-\lambda x^2}dx + \int_{\Gamma_1^R} f\,dz + \int_{R}^{-R} e^{-\lambda(x+ai)^2}dx + \int_{\Gamma_2^R} f\,dz = 0$$

Показаћемо да $\int_{\Gamma_1^R} f\,dz \to 0$ кад $R\to\infty$ и $\int_{\Gamma_2^R} f\,dz \to 0$ кад $R\to\infty$

$R\to\infty \Rightarrow$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda(x^2+2axi-a^2)}dx$$

$$e^{-\lambda a^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda x^2}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2a\lambda xi}\, e^{-\lambda x^2}dx$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\, e^{-\lambda a^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda x^2} e^{-2a\lambda x i}dx$$

$\lambda = 1/2$

$$e^{-a^2/2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}e^{-iax}dx$$

Фуријеове трансформације

$$\sqrt{2\pi}\, e^{-a^2/2} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}e^{-iax}dx \Rightarrow \boxed{e^{-a^2/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}e^{-iax}dx}$$

Сад показујемо да $\int_{\Gamma_1} f\,dz \to 0$ кад $R\to\infty$

$z = R+iy \quad 0\le y\le a \quad f(z)=e^{-\lambda z^2}$

$$\left|\int_{\Gamma_1} f\,dz\right| = \left|\int_0^a f(R+iy)\,i\,dy\right| \le \int_0^a |f(R+iy)|\,dy = \int_0^a \left|e^{-\lambda(R^2-y^2+i2Ry)}\right| dy$$

$$= e^{-\lambda R^2}\int_0^a e^{\lambda y^2}\,dy = e^{-\lambda R^2}\, e^{\lambda a^2}\cdot a \xrightarrow{R\to\infty} 0.$$

- Редови, функционални редови, степени редови - (штампе 10)

$a_n\in\mathbb{C} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$

Ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ је конвергентан ако $\exists \lim_{n\to\infty} S_n\in\mathbb{C}$

Ако $\sum|a_n|$ конвергира онда $\sum a_n$ апсолутно конвергира.

Ако је ред апсолутно конвергентан онда је и конвергентан.

* Функционални редови *

Нека је D област у $\mathbb{C}$ и нека је дат низ функција $f_n: D\to\mathbb{C}$. Ред овог облика $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ је функционални ред.

Каже се да функционални ред конвергира у тачки $z=z_0$ ако је конвергентан ред са комплексним члановима $\sum f_n(z_0)$.

Скуп свих тачака из D у којима функционални ред конвергира је домен његове конвергенције.

Нека $\sum f_n(z)$ конвергира $\forall z\in D$. Онда функцију $S(z)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ називамо сумом функционалног реда.

Појам равномерне конвергенције:

Нека је $f_n: D\to\mathbb{C}$ и ред $\sum f_n(z)$ конвергира $\forall z\in D$.

Дефиниција: Каже се да ред $\sum_{1}^{\infty} f_n(z)$ равномерно конвергира на D ако $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ таков да за $\forall n \geq n_0$ и свако $z \in D$ важи $\left|\sum_{k=n}^{\infty} f_k(z)\right| < \varepsilon$

$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_n(z)$ - остатак функционалног реда

$S_n(z) = \sum_{k=1}^{n} f_k \qquad S(z) - S_n(z) = R_n(z)$

Ако ред $\sum f_n$ равномерно конвергира на D тада $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})$ $(\forall z \in D)(n \geq n_0 \Rightarrow |S(z) - S_n(z)| < \varepsilon)$

Теорема (Коши): Функционални ред $\sum f_n(z)$ је равномерно конвергентан на D акко $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N})(\forall z \in D)\ (m > n \geq n_0 \Rightarrow \underbrace{\left|\sum_{k=n+1}^{m} f_k(z)\right|}_{|S_m - S_n|} < \varepsilon)$

Теорема (Вајерштрас): Нека је $f_n : D \to \mathbb{C}$ и постоји $c_n > 0$ такав да је $|f_n(z)| \leq c_n\ \forall z \in D$ и $\forall n \in \mathbb{N}$. Ако је ред $\sum c_n$ конвергентан тада је ред $\sum f_n(z)$ равномерно конвергентан на D.

Теорема:

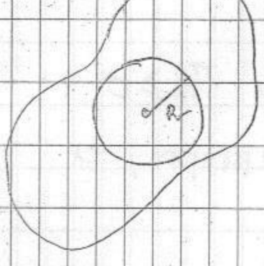
а) Нека је $D \subset \mathbb{C}$ и $f_n : D \to \mathbb{C}$ непрекидне функције и ред $\sum f_n(z)$ равномерно конвергира на D и нека је његова сума $S(z)$. Тада је S непрекидна ф-ја на D.

б) Нека је γ део по део глатка крива и $f_n : \gamma \to \mathbb{C}$ непрекидне ф-је и ред $\sum f_n(z)$ равномерно конвергира на γ. Тада је $S(z) = \sum_{1}^{\infty} f_k(z)$ непрекидна ф-ја на γ и $\int_\gamma S(z)\,dz = \sum \int_\gamma f_k(z)\,dz$.

в) Ако је f_n аналитичка ф-ја у области D и $\sum f_n(z)$ равномерно конвергира на D тада је $S(z) = \sum f_n(z)$ аналитичка ф-ја на D и $S^{(n)}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^{(n)}(z)$ $\forall n = 0, 1, \ldots$

датум: 11.4.2012.

* $f_n: D \to \mathbb{C}$ и f_n аналитичке ф-је на D и ред $\sum_{1}^{\infty} f_n(z)$ конвергира равномерно на D. Тада је $f(z) = \sum f_n(z)$ аналитичка ф-ја у D и важи $f^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$ $\forall k = 0,1,2\ldots$



$\gamma_r = \{ \xi : |\xi - z| = r \} \subset D$

$\{ \{ \xi : |\xi - z| \le r \} \subset D \}$

– цио круг лежи у D

$$\frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} \frac{k!}{2\pi i} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k!}{2\pi i} \frac{f_n(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}}$$ – овај ред равномерно конвергира на γ_r

(јер је $\left| \frac{k!}{2\pi i (\xi - z)^{k+1}} \right| = \frac{k!}{2\pi r^{k+1}}$ $\forall \xi \in \gamma_r$)

по тврђењу б) што је равномерно конвергентан на неком скупу може се интегралити члан по члан

$$\int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} \frac{k!}{2\pi i} \, d\xi = \sum \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f_n(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} \, d\xi$$

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z) \quad \blacksquare$$

- Степени редови - (Питање 11)

функционални редови $\sum f_n(z)$ када је $f_n(z) = a_n(z-z_0)^n$ $z_0 \in \mathbb{C}$

$a_n \in \mathbb{C}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad (*)$$

као у реалној анализи показује се да постоји $R \geq 0$: такав да у области $\{z \mid |z-z_0|<R\}$ ред (*) конвергира, а у области $\{z \mid |z-z_0|>R\}$ (*) дивергира.

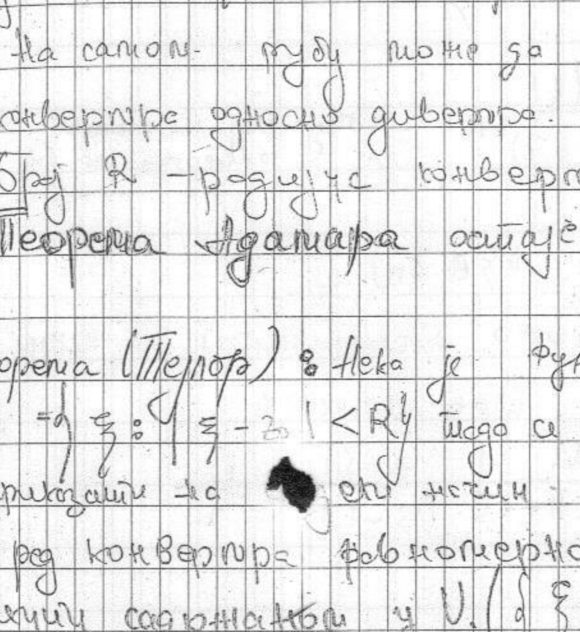
На самом рубу може да има вредности у којима конвергира односно дивергира.

Број R - радијус конвергенције.

Теорема Адамара остаје на снази $\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$

Теорема (Тејлор): Нека је функција f аналитичка у кругу $U = \{\xi : |\xi - z_0| < R\}$ тада се унутар тог круга она може приказати на [illegible]ен начин $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ и ред конвергира равномерно на сваком компактном кругу садржаном у U. $\left(\{\xi : |\xi - z_0| \le R'\}\ \forall R' \le R\right)$

Доказ:



$0 < r < R$

$z \in U$ $|z-z_0|<r$

према основној Кошијевој интегралној формули

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi-z_0|=r} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi-z_0|=r}\frac{f(\xi)}{\xi-z_0-(z-z_0)}\, d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi-z_0|=r} \frac{f(\xi)}{\xi-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\xi-z_0}}\, d\xi \;=$$

$$\left|\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right| = \frac{|z-z_0|}{|\xi-z_0|} = \frac{|z-z_0|}{r} = q < 1 \qquad \gamma_r = \{\xi : |\xi-z_0| = r\}$$

$$\left|\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right| = q < 1$$

→ само сума геометријског реда

геометријски

$$\frac{1}{1-q} = \sum_{0}^{\infty} q^n$$ — одмах оријентишемо развој у степени ред јер је $|q|<1$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(\xi - z_0)^n} d\xi =$$

ограничена ф-ја

по Вајерштрасу овај ред конвергира равномерно

све кв. равномерна

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} =$$

из Кошијеве интегралне формуле за извод

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n$$

Развоји који остају на снази

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$\forall z \in \mathbb{C}$

$$(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n, \quad |z|<1, \ \alpha \in \mathbb{R}$$

$$(1+z)^\alpha \big|_{z=0} = 1$$

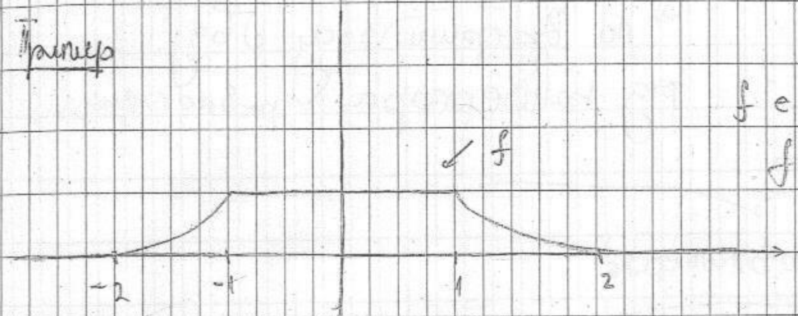
$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}, \ |z|<1$$

$$\ln(1+z)\big|_{z=0} = 0$$

$$(1+z)^\alpha = e^{\alpha \ln(1+z)}$$

Последица: Теорема јединствености: Нека је f аналитичка функција у области D и нека је $f(z)=0$ $\forall z \in E$, $E \subset D$ и нека скуп E има тачку нагомилавања која припада D. Тада је $f(z) \equiv 0$ на D.

Пример



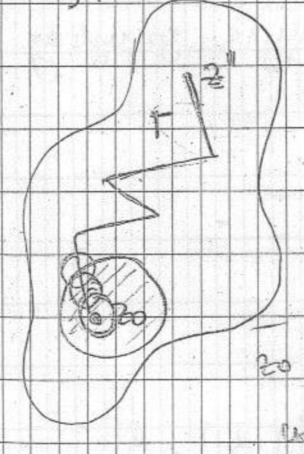
$f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$

$f(x) = 1$ на $[-1, 1]$

$0 \leq f(x) \leq 1$ на $[-2,-1] \cup [1,2]$

$f(x) = 0$ за $|x| \geq 2$

Доказ:



Задатак (домаћи)

Израчунајте

$$\sup_{z \in D} (1-|z|^2) \int_D \frac{|\xi|}{|1-z\bar{\xi}|^3}\, dm(\xi)$$

$D = \{z : |z| < 1\}$

$\xi = x + iy$

$dm(\xi) = dx\,dy$

$z_0 \in D$

z_0 тачка нагомилавања скупа $E \Rightarrow \exists$ низ $z_k \in E$: $f(z_k) = 0$, $\forall k = 1, 2, \dots$

$U = \{z : |z - z_0| < r\} \subset D$

Без смањења општости може се сматрати да сви z_k леже у U ($z_k \in U$)

По теореми Тејлора $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, $z \in U$

$$0 = f(z_k) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z_k - z_0)^n$$

$$0 = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z_k - z_0)^n = \text{ смемо да пуштамо лим-а } = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{k\to\infty} a_n (z_k - z_0)^n = a_0.$$

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z_k - z_0)^{n} \,/ : (z_k - z_0)$$ јер је $a_0 = 0$

јер не може бити $z_k = z_0$

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z_k - z_0)^{n-1}$$ поновљамо поступак $\lim_{k \to \infty}$

$\Rightarrow a_1 = 0$

$a_0 = a_1 = a_2 = \dots = 0 \Rightarrow f(z) \equiv 0$ на U.

област : отворен и повезан скуп

$d' = dist(\Gamma, \partial D)$

ρ - полупречник круга U $\qquad 0 < r < \min(d', \rho)$

$\left[\frac{l}{\frac{2r}{3}}\right] + 1$ прелаза $\qquad \Rightarrow f(z') = 0$

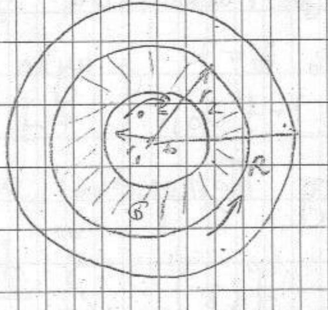
стално направимо за исти позитивни број

*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

a_n не зависи од r

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}$$



$$\oint_{|\xi - z_0| = r_1} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \overset{?}{=} \oint_{|\xi - z_0| = r_2} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$$

$$\int_{\partial G} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi = 0$$

аналитичка ф-ја у G

$$-\oint_{|\xi - z_0| = r_1} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi + \oint_{|\xi - z_0| = r_2} \frac{f(\xi)\, d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}} = 0$$

Кошијева неједнакост

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi - z_0| = r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$$

$$\gamma_r = \{ \xi : |\xi - z_0| = r \}$$

$$M(r) = \max_{\xi \in \gamma_r} |f(\xi)|$$

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_r} \frac{M(r)}{r^{n+1}} |d\xi| = \frac{M(r)}{2\pi r^{n+1}} \cdot 2\pi r = \frac{M(r)}{r^n}$$

$$\boxed{a_n \leq \frac{M(r)}{r^n}}$$

последица: теорема Лиувила

Ако је f аналитичка у $\mathbb{C}$ и $\exists M : |f(z)| \leq M$ $\forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow f(z) \equiv const.$

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ конвергира $\forall z \in \mathbb{C}$

према Кошијевој неједнакости $|a_n| \leq \frac{M}{r^n}$ $r > 0$

$n \geq 1 \Rightarrow a_n = 0$ јер пуштамо $r \to \infty$

$\Rightarrow f(z) = a_0 = const.$ ■

Нуле аналитичке функције

Нека је f аналитичка у области D и $z_0 \in D$

Деф. $z = z_0$ је нула реда r $(r \geq 1)$ аналитичке функције f ако је $f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(r-1)}(z_0) = 0$ и $f^{(r)}(z_0) \neq 0$.

из ред Тејлоровог реда у околини ове тачке

$$f(z) = \sum_{k=r}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k$$

$$\Rightarrow f(z) = (z - z_0)^r \sum_{k=r}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^{k-r}$$

$$f(z) = (z - z_0)^r h(z)$$

при чему је h аналитичка у z_0 и $h(z_0) \neq 0$ бет $h(z_0) = \frac{f^{(r)}(z_0)}{r!}$

Пример $f(z) = \sin z - z$

$z = 0$ је нула те функције

$f'(z) = \cos z - 1$ $\qquad f(0) = 0$

$f'' = -\sin z$ $\qquad f'(0) = 0$

$f''' = -\cos z$ $\qquad f''(0) = 0$

$f'''(0) = -1 \neq 0$

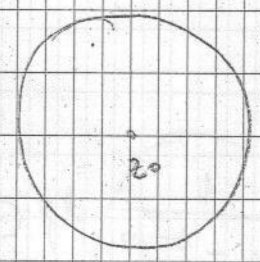
нула трећег реда $\quad r = 3$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots$$

$$\sin z - z = z^3\left(-\frac{1}{3!} + \frac{z^2}{5!} - \cdots\right) \quad \blacktriangle$$

датум: 18.4.2012.

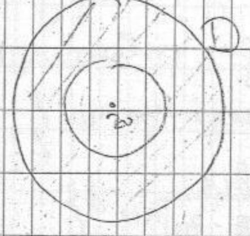
Лоранов ред



$$D = \{ z : |z - z_0| < r \}$$

f аналитичка у D

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$



$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k (z - z_0)^k \quad \text{Лоранов ред}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} (z - z_0)^{-k} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

Теорема: Нека је функција f аналитичка у $D = \{ z : r < |z - z_0| < R \}$ тада се у D она може приказати у облику

Преносе и све аритметичке операције између низова.

$\sum c_n$: $\quad S=\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n \qquad \sigma_n=\sum\limits_{k=1}^{n} c_k$

$a_n\in\mathbb{C} \quad \sum a_n \qquad S=\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n \qquad \sigma_n=\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$

ствари у којима постоји поредак не можемо пренети

$\sum|a_n|$ → или рашчлањивање на реални и имагинарни део

Гранична вредност комплексне функције (питање 7.)

Нека је $G\subset\mathbb{C}$ и нека је f функција дефинисана у некој околини тачке $z_0\in G$ али не и обавезно у тачки z_0.

1° Дефиниција: Каже се да је $A\in\mathbb{C}$ гранична вредност функције f када $z\to z_0$ и пише се $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$ ако

$$(\forall\varepsilon>0)\ (\exists\delta>0)\ (\forall z\in G)\ (\underbrace{0<|z-z_0|<\delta}_{\text{бушна } \delta\text{-околина тачке } z_0} \Rightarrow |f(z)-A|<\varepsilon)$$

коначна гранична вредност у коначној тачки

Пример: $f(z)=\frac{z^2-1}{z-1}$ $\quad z=1$ није дефинисана

$\lim\limits_{z\to 1} f(z)=2$ – има исте аритметичке операције особине као и са реалним функцијама

$f: D\to\mathbb{C}$, $z=x+iy$

$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$

$A=A_1+iA_2 \qquad \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y)=A_1$

$z_0=x_0+iy_0$

$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y)=A_2$

у облику $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$ где је $a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi-z_0|=\rho} \frac{f(\xi)\,d\xi}{(\xi-z_0)^{n+1}}$, $r<\rho<R$

Овај ред равномерно кв. на сваком ужем прстену и јединствен је

Доказ:

$D'=\{\xi : r'<|\xi-z_0|<R'\}$ $\quad r<r'<R'<R$

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D'}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\,d\xi =$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi-z_0|=R'} \frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi-z} + \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi-z_0|=r'}\frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi-z}=$$

$$=\underbrace{\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi-z_0|=R'}\frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi-z}}_{I_1(z)} - \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi-z_0|=r'}\frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi-z}}_{I_2(z)}$$

$$I_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi-z_0|=R'}\frac{f(\xi)}{\xi-z_0-(z-z_0)}\,d\xi = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi-z_0|=R'}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\xi-z_0}}\,d\xi =$$

развијено у геометријски ред који равномерно конвергира по ξ

$$\left|\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right| = \frac{|z-z_0|}{R'} = q<1$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi-z_0|=R'} f(\xi)\sum_0^\infty \frac{(z-z_0)^n}{(\xi-z_0)^{n+1}}\,d\xi = \sum_{n=0}^\infty (z-z_0)^n \frac{1}{2\pi i}\underbrace{\oint\limits_{|\xi-z_0|=R'}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}\,d\xi}_{\text{не зависи од полупречника прстена}} =$$

$$=\sum_{n=0}^\infty (z-z_0)^n \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi-z_0|=\rho}\frac{f(\xi)\,d\xi}{(\xi-z_0)^{n+1}}}_{a_n} \quad r<\rho<R \quad \Rightarrow I_1(z)=\sum_0^\infty a_n(z-z_0)^n$$

$$I_2(z) = \frac{-1}{2\pi i} \oint\limits_{|\xi - z_0| = r'} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{-1}{2\pi i} \oint\limits_{|\xi - z_0| = r'} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0 - (z - z_0)} d\xi =$$

$$= + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - z_0| = r'} \frac{f(\xi)}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\xi - z_0}{z - z_0}} d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\xi - z_0| = r'} f(\xi) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\xi - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}} d\xi \qquad \left| \frac{\xi - z_0}{z - z_0} \right| = \frac{r'}{z - z_0} = q < 1$$

ова величина не зависи од положаја ξ на функцији
повлачи развијамо у геометријски ред

заменимо редослед сумирања и интеграције

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z - z_0)^{n+1}} \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\xi - z_0| = r'} f(\xi) (\xi - z_0)^n d\xi =$$

аналогно претходном

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z - z_0)^{n+1}} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\substack{|z - z_0| = \rho \\ r < \rho < R}} f(\xi) (\xi - z_0)^n d\xi = \qquad \frac{1}{1 - q} = \sum q^n$$

ставимо $-n-1 = k$

$k \in \{-1, -2, \dots\}$

$$= \sum_{k=-\infty}^{-1} (z - z_0)^k \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z - z_0| = \rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+1}} d\xi = \sum_{n=-\infty}^{-1} (z - z_0)^n \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\xi)\, d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}}}$$

$$f(z) = I_1 + I_2 = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n}_{\text{правилни део}} + \underbrace{\sum_{-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n}_{\text{главни део}} = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

јединственост је очигледан

хоћемо да оценимо коефицијенте реда — Кошијеве неједнакост

$$M(\rho) = \max_{|\xi - z_0| = \rho} |f(\xi)|$$

$$|a_n| \le \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi - z_0| = \rho} \frac{M(\rho)}{|\xi - z_0|^{n+1}} |d\xi| = \frac{M(\rho)}{2\pi} \int_{|\xi - z_0| = \rho} \frac{|d\xi|}{\rho^{n+1}} = $$

$$= \frac{M(\rho)}{2\pi \rho^{n+1}} 2\pi\rho = \frac{M(\rho)}{\rho^n}$$

$$\Rightarrow |a_n| \le \frac{M(\rho)}{\rho^n} \quad n \in \mathbb{Z}, \quad r < \rho < R$$ (груба оцена за свеку кружницу)

Пример 1) Построени су нпр. сви основни развоји

$$\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2} = \frac{2z-3}{z^2-3z+2}$$

Развити ф-ју $f(z) = \dfrac{2z-3}{z^2-3z+2}$ у Лоранов ред око тачке $z=0$

једнако $\dfrac{1}{z-1} + \dfrac{1}{z-2}$

имамо 3 ситуације

оба се развијају у потенцијални ред

1° $|z| < 1$ — биће Тејлоров ред

2° $1 < |z| < 2$ — прстен

присутни су и чланови са негативним

3° $|z| > 2$

1° $f(z) = -\dfrac{1}{1-z} - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1-\frac{z}{2}} =$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} z^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n$$

2° $f(z) = \dfrac{1}{z-1} - \dfrac{1}{2-z} = \dfrac{1}{z}\,\dfrac{1}{1-\frac{1}{z}} - \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{1-\frac{z}{2}} =$

$$= \underbrace{\frac{1}{z}\sum_{0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^{n}}_{\text{негативни}} - \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n}}{2^{n}}}_{\text{позитивни}} \qquad 1<|z|<2$$

3° $f(z) = \dfrac{1}{z-1} + \dfrac{1}{z-2} = \dfrac{1}{z}\,\dfrac{1}{1-\frac{1}{z}} + \dfrac{1}{z}\,\dfrac{1}{1-\frac{2}{z}} =$

$$= \frac{1}{z}\sum_{0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^{n} + \frac{1}{z}\sum_{0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^{n} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}\left(2^{n}+1\right), \quad |z|>2$$

Спољашњост неког круга је околина неке бесконачне тачке.

2) $f(z) = e^{1/z}$ у свакој тачки аналитичка сем у тачки $\{0\}$.

Тражимо развој ван координатног почетка

$$f(z) = e^{1/z} = \sum_{0}^{\infty}\frac{1}{n!}\,\frac{1}{z^{n}}$$

Изоловане сингуларне тачке

Дефиниција: За тачку $z = a \in \mathbb{C}$ се каже да је изолована тачка ф-је ако је f аналитичка у $D = \{z : 0 < |z-a| < \varepsilon\}$

1° $\lim\limits_{z \to a} f(z) = A \in \mathbb{C}$, отклоњива сингуларна тачка

2° $\lim\limits_{z \to a} f(z) = \infty$, $z = a$ је пол ф-је f

3° $\lim\limits_{z \to a} f(z)$ не постоји $z = a$ есенцијална сингуларна тачка

Примери: 1° $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ $z = 0$ је отклоњив сингуларитет

јер је $\lim\limits_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$

2° $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ $z = i$ $\lim\limits_{z \to i} \frac{1}{1+z^2} = \lim\limits_{z \to i} \frac{1}{(z-i)(z+i)} = \infty$ пол

3° $f(z) = e^{1/z}$ $z = 0$ $z_n = \frac{1}{n} \to 0$ $w_n = -1/n \to 0$

$\lim\limits_{n \to \infty} f(z_n) = \lim\limits_{n \to \infty} e^{n} = \infty$ $\lim\limits_{n \to \infty} f(w_n) = \lim\limits_{n \to \infty} e^{-n} = 0$

Лимес не зависи од избора низа

Сада да успоставимо тврђење које ће се бавити структуром Лорановог реда у околини неке тачке

Теорема: Нека је $z = a \in \mathbb{C}$ изолована сингуларна тачка ф-је f. Тада

а) $z = a$ је отклоњив сингуларитет $\Leftrightarrow$ Лоранов ред функције f у околини $z = a$ нема главног дела.

б) $z = a$ је пол $\Leftrightarrow$ Лоранов ред функције f у околини $z = a$

у главном делу има коначно много чланова

в) $z=a$ је есенцијални сингуларитет $\Leftrightarrow$ бесконачно много чланова

Доказ: а) ($\Leftarrow$) Претпоставка је да је $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n (z-a)^n$

$\Rightarrow \lim_{z\to a} f(z) = a_0 \Rightarrow z=a$ је отклоњив сингуларитет

($\Rightarrow$) $z=a$ је отклоњив сингуларитет $\lim_{z\to a} f(z) = A \in \mathbb{C} \Rightarrow$
$|f(z)| \leq M \quad \forall z: 0<|z-a|<\varepsilon$ ограничена и користимо

ф-ју) $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-a)^n \quad |a_n| \leq \frac{M(\rho)}{\rho^n} \quad M(\rho)=\max|f|$

Коши: $|a_n| \leq M\rho^{-n}$ $\quad |\xi - a| = \rho$, $0<\rho<\varepsilon$

$$|a_{-n}| \leq M\rho^n \quad \forall \rho\in(0,\varepsilon)$$

кад $\rho\to 0 \Rightarrow a_{-n}=0$ за $n\geq 1 \Rightarrow$ нема главног дела

($\Rightarrow$)

б) Нека је $z=a$ пол $\Rightarrow \lim_{z\to a} f(z) = \infty \Rightarrow$ у некој околини

$\{z: 0<|z-a|<\varepsilon\}$ функција f се не анулира и посматрамо

функцију $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ она је аналитичка у $\{z: 0<|z-a|\leq\varepsilon\}$

$\lim_{z\to a} g(z) = 0 \in \mathbb{C} \Rightarrow z=a$ је отклоњив сингуларитет

за ф-ју $g(z)$, што значи да ф-ја g нема главног дела

$\Rightarrow$ Поренов ред $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-a)^k \quad a_0 = 0$ мора бити

може да се деси да је $g(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z-a)^k$ при

чему је $a_0 = a_1 = \dots = a_{n-1} = 0 \quad (n\geq 1) \quad a_n \neq 0$

a_n први који се не анулира.

$$g(z) = (z-a)^n \underbrace{(a_n + a_{n+1}(z-a) + \dots)}_{h(z)}$$

$h(z)$ је аналитичка у околини $z=a$ и $h(a) = a_n \neq 0$

$$g(z) = (z-a)^n h(z) \Rightarrow f(z) = \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{(z-a)^n} \frac{1}{h(z)}$$

$h(z)$ је аналитичка у околини $z=a$ и $h(a) = a_n \neq 0 \Longrightarrow h(z)$ је аналитичка у $\{z : |z-a| < r_1\}$ и не анулира се на њему

$\Rightarrow \frac{1}{h(z)}$ је аналитичка на $\{z : |z-a| < r_1\}$ па према теореми

Тејлора $\frac{1}{h(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} d_k (z-a)^k \quad d_0 = \frac{1}{a_n}$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{(z-a)^n} \sum_{k=0}^{\infty} d_k (z-a)^k = \overbrace{\frac{d_0}{(z-a)^n} + \frac{d_1}{(z-a)^{n-1}} + \dots} + d_n +$$

$+ d_{n+1}(z-a) + \dots \Rightarrow$ у главном делу има коначно много чланова

$(\Leftarrow)$ Нека је $f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} a_k (z-a)^k \quad n \geq 1 \quad a_{-n} \neq 0$

$$(z-a)^n f(z) = \underbrace{a_{-n} + a_{-n+1}(z-a) + \dots}_{h(z)}$$

$h(z)$ је аналитичка ф-ја у $\{z : |z-a| < \varepsilon\}$

$h(a) = a_{-n} \neq 0$

$f(z) = \frac{h(z)}{(z-a)^n} \qquad \lim_{z \to a} f(z) = \infty \Rightarrow z=a$ је пол ф-је f ∎

в) је последица а) и б) чиме је теорема доказана како доћи до $\frac{a_{-n}}{(z-a)^{n}}$

$\frac{1}{f(z)} = (z-a)^n \frac{1}{h(z)}$ у некој довољно малој околини

$\frac{1}{h(z)}$ је аналитичка и нуле се не анулира

n се назива ред пола $z=a$

па је $z=a$ нула реда n функције $\frac{1}{f(z)}$.

Ред пола $z=a$ функције f је ред нуле $z=a$ ф-је $\frac{1}{f(z)}$.

Пример $f(z) = \frac{1}{(z-1)^3 \sin z}$ $\frac{1}{f(z)} = (z-1)^3 \sin z$

$z=1$ – пол функције f $z=1$ није нула $\sin z$

$z=1$ је пол 3. реда ф-је f.

Ред пола је важно питање!

f $z=\infty$ ако је ф-ја $g(\xi) = f\left(\frac{1}{\xi}\right)$ аналитичка у $\xi=0$

дефиниција:
Каже се да је $z=\infty$ изолована сингуларна тачка ф-је f ако је f аналитичка у некој околини $z=\infty$ тј. на скупу $\{z : |z|>R\}$ за неко $R>0$.

Према понашању f у близини тачке $z=\infty$ биће:

1° $z=\infty$ је отклоњив сингуларитет ако је $\lim_{z\to\infty} f(z) \in \mathbb{C}$

2° $z=\infty$ је пол ако је $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$

3° $z=\infty$ је есенцијални сингуларитет $\lim_{z\to\infty} f(z)$ не постоји датум: 23. 4. 2012.

Теорема: $z=\infty$ је отклоњив сингуларитет $\iff$ Лоранов ред у околини $z=\infty$ нема чланова са позитивним степенима z

-||- пол -||- коначно много чланова

-||- суштински сингуларитет -||- бесконачно много чланова

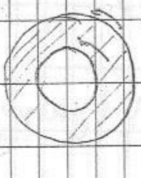
Теорема Јулијана Сохоцког: Ако је z_0 суштинска сингуларна тачка ф-је f, тада: $\forall A \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ $\exists$ низ $z_n \in \mathbb{C}$ такав да $z_n \to z_0$ и да $f(z_n) \to A$, $n \to \infty$.

Резидум (остатак)

$z_0 \in \mathbb{C}$ изолована сингуларна тачка ф-је f

тј. f је аналитичка на $\{0 < |z-z_0| < \varepsilon\}$ за неко $\varepsilon > 0$.

Дефиниција: Под резидумом ф-је f у тачки z_0 подразумева се величина $\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} f\,dz$ $\quad 0<r<\varepsilon$



$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-z_0)^k \qquad 0 < |z-z_0| < \varepsilon$$

$$\gamma_r = \{z : |z-z_0| = r\} \qquad 0<r<\varepsilon$$

f конвергира на γ_r

Тада је
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} f(z)\,dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} (z-z_0)^k\,dz}_{\delta_{k,-1}} = c_{-1}$$

$$\delta_{kl} = \begin{cases} 0, & k \neq l \\ 1, & k = l \end{cases}$$

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} f(z)\,dz = c_{-1}$$

У случају суштинског сингуларитета мора се ф-ја развијати у Лоранов ред!

и онда очитавамо c_{-1}

Став 6; Ако је $z=z_0$ пол реда n тада је

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left((z-z_0)^n f(z)\right)$$

Доказ: $f(z) = \sum\limits_{k=-n}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$ $c_{-n} \neq 0$

$$= \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \frac{c_{-n+1}}{(z-z_0)^{n-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + \dots \Big/ (z-z_0)^n$$

$$\Rightarrow (z-z_0)^n f(z) = c_{-n} + c_{-n+1}(z-z_0) + \dots + c_{-1}(z-z_0)^{n-1} + c_0(z-z_0)^n + \dots$$

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left((z-z_0)^n f(z)\right) = c_{-1}(n-1)! + d_1(z-z_0) + d_2(z-z_0)^2 + \dots$$

кад $z\to z_0 \Rightarrow \underbrace{c_{-1}}_{\operatorname*{Res}\limits_{z=z_0} f}(n-1)! = \lim\limits_{z\to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left((z-z_0)^n f(z)\right)$

за прости пол $n=1$ $\operatorname*{Res}\limits_{z=z_0} f = \lim\limits_{z\to z_0} (z-z_0) f(z)$.

<u>последица</u>: $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, φ, ψ су аналитичке у тачки $z=z_0$

само за прости пол

$\varphi(z_0)\neq 0$

$\psi(z_0) = 0$, $\psi'(z_0)\neq 0$

$\psi(z)$ има у z_0 пол првог реда

$$\boxed{\operatorname*{Res}_{z=z_0} f = \lim_{z\to z_0} \frac{(z-z_0)\varphi(z)}{\psi(z)} = \lim_{z\to z_0} \frac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z)-\psi(z_0)}{z-z_0}} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}}$$

бесконачно у коначној тачки — нек је дефинисана у целој равни

2° $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$ $z_0 \in \mathbb{C}$

Дефиниција: $(\forall M > 0)(\exists \delta > 0)(\forall z)(0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z)| > M)$

деф: у бесконачности коначна вредност

3° $\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = A \in \mathbb{C}$

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists R > 0)(\forall z)(|z| > R \Rightarrow |f(z) - A| < \varepsilon)$

деф: у бесконачности бесконачно

4° $\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = \infty$

$(\forall M > 0)(\exists R > 0)(\forall z)(|z| > R \Rightarrow |f(z)| > M)$

Може једнообразно да се уради преко Риманове сфере и сферне МЕТРИКЕ! (ми имамо експлицитну формулу)

Непрекидност

$f: D \to \mathbb{C}$

Дефиниција: Функција f је непрекидна у тачки $z = z_0 \in D$ ако је $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Функција f је непрекидна на D ако је непрекидна у свакој тачки $z \in D$.

Особине непрекидних функција — компактан скуп

Т: Нека је $D = \overline{D}$ и D је ограничен и $f: D \to \mathbb{C}$ и f је непрекидна на D.

Тада:

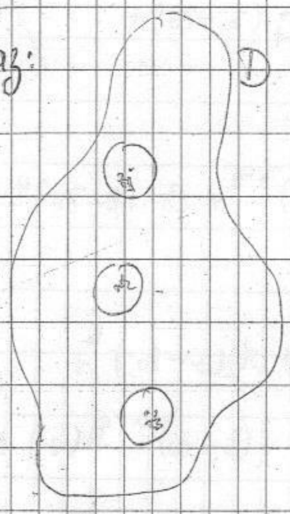
1° f је ограничена на D.

2° f је равномерно непрекидна на D.

Теорема Кошија о резидуму: Нека је f аналитичка у области G сем у коначно много изолованих тачака $z_1, z_2, \dots, z_n$. Ако је $D \subset G$ област која садржи тачке $z_1, z_2, \dots, z_n$ и ∂D је део по део глатка, тада је

$$\int_{\partial D} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f.$$

Доказ:



$r>0$ тако да кругови са центрима у тачкама $z_1, z_2, \dots, z_n$ и полупречником r леже у D и међусобно су дисјунктни

$$D_r = D \setminus \bigcup_{\nu=1}^{n} \{z : |z-z_\nu| \le r\}$$

тада је f аналитичка у D_r (област)

$$\Downarrow$$

$$\int_{\partial D_r} f\,dz = 0 = \int_{\partial D} f\,dz + \sum_{\nu=1}^{n} \int_{\gamma_\nu} f\,dz = 0$$

$$\{|z-z_\nu| = r\} = \gamma_\nu$$

$$\Rightarrow \int_{\partial D} f\,dz = \sum_{\nu=1}^{n} \oint_{\gamma_\nu} f\,dz = 2\pi i \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\nu} f\,dz =$$

$$= 2\pi i \sum_{\nu=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_\nu} f. \quad \blacksquare$$

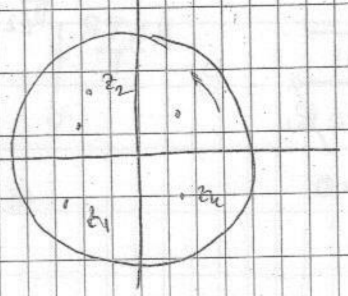
Ако је $z=\infty$ изолована сингуларна тачка ф-је f тада

а $\operatorname*{Res}_{z=\infty} f = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=R} f\,dz$ $\quad$ R довољно велико

доследна оријентација јер тачка треба да нам остане са леве стране

Став: Ако су $z_1, z_2, \dots, z_n, \infty$ изоловане сингуларне тачке ф-је f тада је $\sum\limits_{\nu=1}^{n} \operatorname{Res}\limits_{z=z_\nu} f + \operatorname{Res}\limits_{z=\infty} f = 0$

Доказ:



$$\oint\limits_{|z|=R} f\,dz = 2\pi i \sum_{\nu=1}^{n} \operatorname{Res}_{z=z_\nu} f$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} \operatorname{Res}_{z=z_\nu} f - \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z|=R} f\,dz = 0$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} \operatorname{Res}_{z=z_\nu} f + \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z|=R} f\,dz}_{\operatorname{Res}\limits_{z=\infty} f} = 0$$

Лема (Жордан)

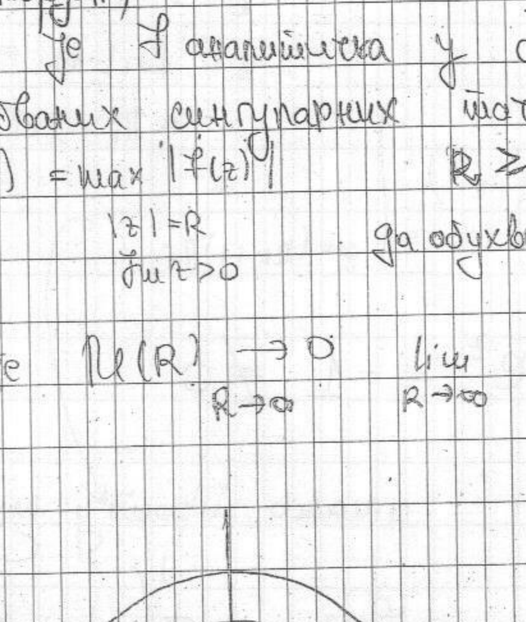
Нека је f аналитичка у $\operatorname{Im} z > 0$ сем у коначно много изолованих сингуларних тачака.

$M(R) = \max\limits_{\substack{|z|=R \\ \operatorname{Im} z>0}} |f(z)|$ $\quad R \geq R_0$ (узмемо полукружницу тако да обухватимо све сингуларитете)

Ако је $M(R) \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$ $\quad \lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{\gamma_R} f(z) e^{iaz}\,dz = 0$

$$\gamma_R = \{z : |z| = R, \operatorname{Im} z > 0\} \text{ и } a > 0$$

Доказ:



$$z = Re^{i\varphi} \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$$

$$\left| \int\limits_{\gamma_R} f(z) e^{iaz}\,dz \right| =$$

$$= \left| \int_0^\pi f(Re^{i\varphi}) e^{ia(R\cos\varphi + iR\sin\varphi)} Ri e^{i\varphi}\,d\varphi \right|$$

$$\le \int_0^{\pi} |f(Re^{i\varphi})| R\, e^{-aR\sin\varphi}\, d\varphi \le \int_0^{\pi} M(R)\, R e^{-aR\sin\varphi}\, d\varphi =$$

$$= RM(R)\int_0^{\pi} e^{-aR\sin\varphi}\, d\varphi = 2RM(R)\int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2a}{2}R\sin\varphi}\, d\varphi \le \quad /\sin\varphi \ge \frac{2}{\pi}\varphi$$

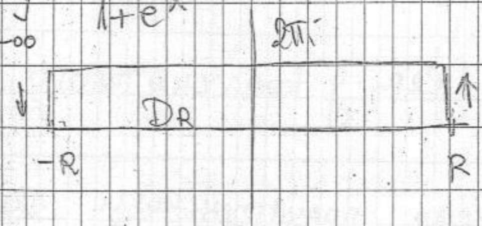
$$\le 2RM(R)\int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2a\varphi}{\pi}R}\, d\varphi = \cancel{2R}M(R)\frac{\pi}{-2a\cancel{R}}\, e^{-\frac{2a\varphi R}{\pi}}\Big|_0^{\pi/2} \quad \varphi\in[0,\pi/2] \longrightarrow 0$$

када $R\to\infty$

Примери (слично је рађено на вежбама)

1) $\Gamma(a)\,\Gamma(1-a) = \int_0^{\infty}\frac{t^{a-1}}{1+t}\,dt \qquad 0<a<1$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^{x}}\,dx \qquad 0<a<1 \qquad f(z)=\frac{e^{az}}{1+e^{z}}$$



$e^z=-1$

$z=\mathrm{Ln}(-1) =$

$= \pi i + 2k\pi i,\ k\in\mathbb{Z}$

$$(1+e^z)'\Big|_{z=(2k+1)\pi i} = e^z = -1 \ne 0$$

у правоугаонику D_R имамо само један пол

имамо просту нулу

$\Downarrow$

$f(z)$ има просте полове

На основу Кошијеве теореме о резидуму

$$\int_{\partial D_R} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=\pi i}\frac{e^{az}}{1+e^{z}} = \frac{e^{a\pi i}}{-1} = -e^{a\pi i}$$

хајде да решимо интеграл

$$\int_{-R}^{R}\frac{e^{ax}}{1+e^{x}}\,dx+\int_{\Gamma_{1R}} f\,dz+\int_{R}^{-R}\frac{e^{a(2\pi i+x)}}{1+e^{2\pi i+x}}\,dx+\int_{\Gamma_{2R}} f\,dz=-e^{a\pi i}$$

$$\int_{-R}^{R}\frac{e^{ax}}{1+e^{x}}\,dx-e^{2a\pi i}\int_{-R}^{R}\frac{e^{ax}}{1+e^{x}}\,dx+\int_{\Gamma_{1R}} f\,dz+\int_{\Gamma_{2R}} f\,dz=-e^{a\pi i}$$

$$*\ \left|\int_{\Gamma_{1R}} f\,dz\right|=\left|\int_{0}^{2\pi}\frac{e^{a(R+iy)}}{1+e^{R+iy}}\,i\,dy\right|\le\int_{0}^{2\pi}\frac{e^{aR}}{|e^{R+iy}+1|}\,dy\le$$

$z=R+iy$

$y\in[0,2\pi]$

$$\underbrace{|z-w|\ge\big||z|-|w|\big|}_{\text{следи из неједнакости }\triangle\text{ за комплексне бројеве}}$$

$$\le\int_{0}^{2\pi}\frac{e^{aR}}{e^{R}-1}\,dy=2\pi\frac{e^{aR}}{e^{R}-1}\to 0 \quad \text{кад } R\to\infty$$

$(a\in(0,1))$

аналогно за други

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^{x}}\,dx-e^{2\pi i a}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^{x}}\,dx=-e^{a\pi i}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^{x}}\,dx=-\frac{e^{a\pi i}}{1-e^{2\pi a i}}=\frac{\pi}{\sin a\pi}$$

$$e^{x}=t\in(0,+\infty)$$

$$\Rightarrow \int_{0}^{\infty}\frac{t^{a-1}}{1+t}\,dt=\frac{\pi}{\sin a\pi}$$ ▲

2) $\int_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x)\,dx$ R - рационална функција

$\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$

$dz = e^{ix}\, i\,dx \Rightarrow dx = \dfrac{dz}{iz}$

$$\int_0^{2\pi} R\left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right) dx = \left[\begin{array}{c}\text{смена } e^{ix} = z \\ z \text{ ће описивати} \\ \text{јединичну кружницу}\end{array}\right] =$$

$$= \oint_{|z|=1} \underbrace{R\left(\frac{z^2-1}{2iz}, \frac{z^2+1}{2z}\right)\frac{dz}{iz}}_{g(z)} = 2\pi i \sum_{\substack{z = z_0 \\ |z_0| < 1}} \operatorname{Res} g(z)$$

Не сме се применити у општем случају када пол падне на кружницу.

3) како можемо записати $\binom{n}{n} = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma \dfrac{(1+z)^n}{z^{n+1}}\,dz$ γ део по део глатка која обухвата $z=0$.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{(1+z)^n}{z^{k+1}}\,dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{(1+z)^n}{z}\left(1+\frac{1}{z}\right)^n dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{(1+z)^{2n}}{z^{n+1}}\,dz = \binom{2n}{n}$$

4) $$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{3}\right]} \binom{n}{3k+1} = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R} \frac{(1+z)^n}{z^{3k+2}} =$$

$R>1$ да бисмо имали равномерну конвергенцију

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R} \frac{(1+z)^n}{z^2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z^3}\right)^k dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R} \frac{(1+z)^n}{z^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z^3}}\,dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=R} \frac{z(z+1)^n}{z^3-1}\,dz = \operatorname*{Res}_{z=1}\frac{z(z+1)^n}{z^3-1} + \operatorname*{Res}_{z=\varepsilon}\frac{z(z+1)^n}{z^3-1} + \operatorname*{Res}_{z=\varepsilon^2}\frac{z(1+z)}{z^3-}$$

$1, \varepsilon, \varepsilon^2$, $\varepsilon = e^{2\pi i/3}$ нуле z^3-1 — прости полови подинтегралне [illegible] функције

$$= \frac{2^n}{3} + \frac{\varepsilon(1+\varepsilon)^n}{3\varepsilon^2} + \frac{\varepsilon^2(1+\varepsilon^2)^n}{3\varepsilon^4} =$$

$$= \frac{2^n}{3} + \frac{\varepsilon^2(1+\varepsilon)^n}{3} + \frac{\varepsilon(1+\varepsilon^2)^n}{3}$$ даље применити Моаврову формулу.

Битно за комбинаторне суме! ▲

5) $f(z)$ је аналитичка у $\mathbb{C}$ сем у коначно много изолованих сингуларних тачака $\underbrace{z_1, z_2, \dots, z_m}_{(z_1, z_2, \dots, z_m \notin \mathbb{Z})}$ и $f(z) = O\left(\frac{1}{z^2}\right)$, $z \to \infty$.

Наћи $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} f(n) \to ?$

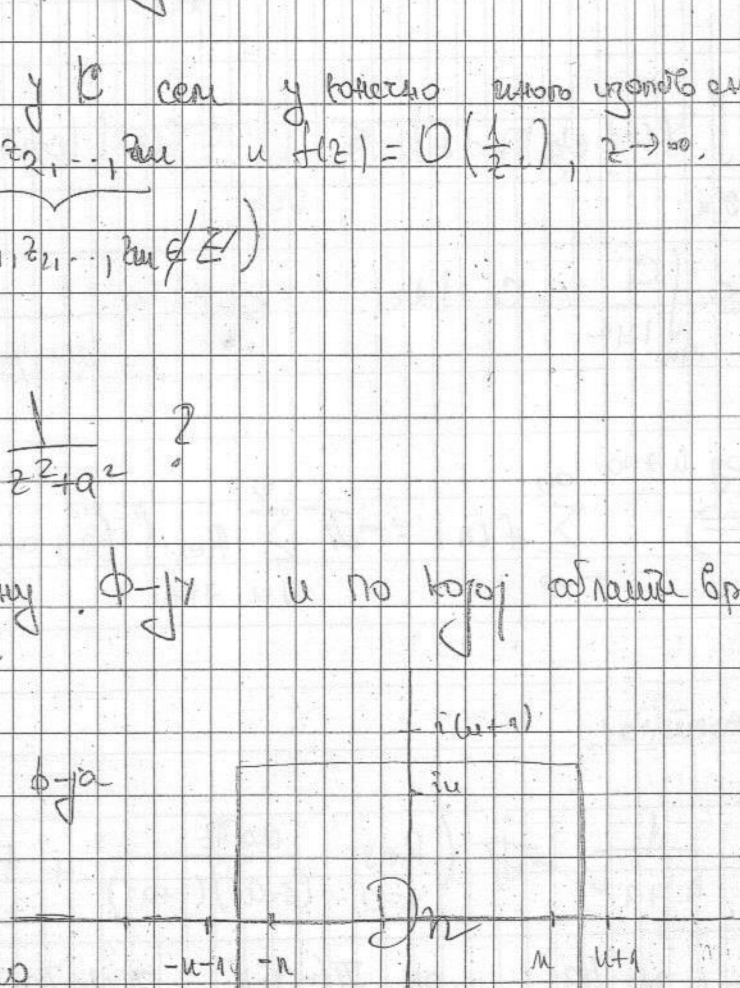
// конкретно случај $f(z) = \frac{1}{z^2+a^2}$?

Шта изабрати за помоћну ф-ју и по којој области вршити интеграцију.

| $f(z)\,\mathrm{ctg}\,\pi z$ — полазна ф-ја

$\exists c_0 < \infty$
$|\mathrm{ctg}\,\pi z| \le c_0$
$\forall z \in \partial D_n$
$\forall n \in \mathbb{N}$

равномерно
непрекидно
непосредно
и
проверено



применимо Кошијеву теорему о резидуумима на помоћну ф-ју:

$$\int_{\partial D_n} f(z)\,\mathrm{ctg}\,\pi z\,dz = 2\pi i\left(\sum_{\nu=1}^{m} \operatorname*{Res}_{z=z_\nu} f(z)\,\mathrm{ctg}\,\pi z + \sum_{k=-n}^{n} \operatorname*{Res}_{z=k} \frac{f(z)\cos\pi z}{\sin\pi z}\right) =$$

$$= 2\pi i\left(\sum_{\nu=1}^{m}\operatorname*{Res}_{z=z_\nu} f(z)\,\mathrm{ctg}\,\pi z + \sum_{k=-n}^{n}\frac{f(k)(-1)^k}{\pi(-1)^k}\right) =$$

$$= 2\pi i\left(\sum_{\nu=1}^{m}\operatorname*{Res}_{z=z_\nu} f(z)\,\mathrm{ctg}\,\pi z + \frac{1}{\pi}\sum_{k=-n}^{n} f(k)\right)$$

$f(z)=O\left(\frac{1}{z^2}\right)$ $\qquad |f(z)| \le \frac{C_1}{|z|^2}$ за $|z|\ge R_0$

$$\left|\int_{\partial D_n} f(z)\,\mathrm{ctg}\,\pi z\,dz\right| \le \int_{\partial D_n}|f(z)|\,|\mathrm{ctg}\,\pi z|\,|dz| \le$$

$$\le \int_{\partial D_n}\frac{C_1}{|z|^2}\cdot C_0\,|dz| \le C_1C_0\,\frac{1}{(n+1/2)^2}\cdot 4(2n+1) \xrightarrow[\text{кад } n\to\infty]{} 0$$

кад $n\to\infty$

$$\Rightarrow \sum_{-\infty}^{\infty} f(n) = -\pi\sum_{\nu=1}^{m} \operatorname*{Res}_{z=z_\nu} f(z)\,\mathrm{ctg}\,\pi z$$

// $2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+a^2} = +\frac{2\pi}{a}\,\mathrm{ctgh}\,a\pi - \frac{1}{a^2}$ //

конкретно

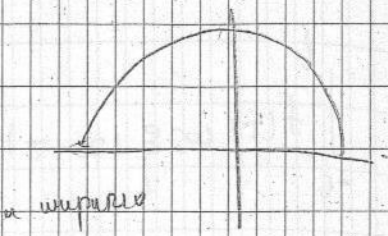
$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{n^2+a^2} = -\pi\left(\operatorname*{Res}_{z=ai}\frac{\mathrm{ctg}\,\pi z}{(z-ai)(z+ai)} + \operatorname*{Res}_{z=-ai}\frac{\mathrm{ctg}\,\pi z}{(z-ai)(z+ai)}\right) =$$

$$= -\pi\left(\frac{\mathrm{ctg}\,\pi ai}{2ai} + \frac{\mathrm{ctg}\,\pi(-ai)}{-2ai}\right) = -\frac{\pi\,\mathrm{ctg}\,\pi ai}{ai} = \frac{-\pi}{ai}\,\frac{\cos\pi ai}{\sin\pi ai} =$$

$$= \frac{2\pi}{a}\,\frac{\mathrm{ch}\,a\pi}{\mathrm{sh}\,a\pi}$$

$$\int R(x)\cos x\,dx \qquad \sin x\,dx$$

$$\int R(z)\,e^{iz}\,dz$$



датум: 7. 5. 2012.

Фуријеова трансформација

- није формално увођење више мотивација

f апсолутно интеграбилна на $\mathbb{R}$ и претпоставимо да се сваком интервалу $(-l, l)$ важе претпоставке за развој f-је у Фуријеов ред.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(\tau)\cos\frac{n\pi\tau}{l}\,d\tau \qquad \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(\tau)\,d\tau$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(\tau)\sin\frac{n\pi\tau}{l}\,d\tau \qquad \left|\frac{a_0}{2}\right| = \left|\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(\tau)\,d\tau\right| \le$$

$$\le \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}|f(\tau)|\,d\tau \le \frac{1}{2l}\int_{-\infty}^{\infty}|f(\tau)|\,d\tau \to 0 \text{ кад } l\to\infty$$

$$f(x) = \lim_{l\to\infty}\sum_{1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l} = \lim_{l\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(\tau)\cos\frac{n\pi(x-\tau)}{l}\,d\tau \quad (*)$$

уведемо смену $\xi_n = \frac{n\pi}{l}$ $\quad \Delta\xi_n = \xi_{n+1} - \xi_n = \frac{\pi}{l}$

$$(*)\quad \lim_{l\to\infty}\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\Delta\xi_n\int_{-l}^{l} f(\tau)\cos\xi_n(x-\tau)\,d\tau$$

$$\int_{-l}^{l} f(\tau)\cos\xi(x-\tau)\,d\tau \approx \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cos\xi(x-\tau)\,d\tau$$

смешено граничну једнакост

$$f(x)=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\Delta\xi_n\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cos\xi_n(x-\tau)\,d\tau=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}d\xi\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cos\xi(x-\tau)\,d\tau$$

(за довољно лепе ф-је:)

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}d\xi\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cos\xi(x-\tau)\,d\tau=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}d\xi\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)(\cos\xi\tau\cos\xi x+\sin\xi\tau\sin\xi x)\,d\tau$$

Уведемо помоћне ф-је:

$$a(\xi)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cos\xi\tau\,d\tau \qquad b(\xi)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\sin\xi\tau\,d\tau$$

$$f(x)=\int_0^{\infty}(a(\xi)\cos\xi x+b(\xi)\sin\xi x)\,d\xi$$ непрекидни аналог Фуријеовог реда

развој ф-је у Фуријеов интеграл

Теорема: Ако је функција f апсолутно интеграбилна ф-ја и заједно са својим изводом има коначно много прекида прве врсте на сваком интервалу $[a,b]$ тада:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}d\xi\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cos\xi(x-\tau)\,d\tau=\begin{cases} f(x), & x \text{ тачка непрекидности} \\ \dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2} & x \text{ прекид прве врсте}\end{cases}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cos\xi(x-\tau)\,d\tau = f(x) \quad x \text{ - тачка непрекидности}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{f(\tau)\sin\xi(x-\tau)\,d\tau}_{\text{непарна ф-ја}} = 0 \Big/ \frac{i}{2\pi} \quad \text{и додамо првом интегралу}$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\,e^{i\xi(x-\tau)}\,d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x}\,d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\,e^{-i\xi\tau}\,d\tau$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x}\,d\xi\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\,e^{-i\xi\tau}\,d\tau$$

Дефиниција: Ако је f апсолутно интеграбилна ф-ја тада се израз $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\,e^{-i\xi\tau}\,d\tau$ назива Фуријеовом трансформацијом ф-је f и означава са $\hat{f}$ или $\mathcal{F}(f)$ а израз $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\,e^{i\xi\tau}\,d\tau$ се назива инверзна Фуријеова трансформација и означава се са $\check{f}$ или $\mathcal{F}^{-1}(f)$.

Неодично важно -важи једнакост Парсевала

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} a_n\cos nx + b_n\sin nx$$

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f|^2\,dx$$

Извод ← област

$f: D \to \mathbb{C}$ $z\in D$, $h\in \mathbb{C}$, $z+h\in D$ уколико постоји коначан

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(z+h)-f(z)}{h}$ назива се изводом функције f у тачки z и

означава се са $f'(z)$.

$\dfrac{f(z+h)-f(z)}{h} = f'(z) + \alpha(z,h)$ при чему $\alpha(z,h)\to 0$ када $h\to 0$

$f(z+h) - f(z) = \underbrace{h f'(z)}_{\text{главни линеарни део}} + \underbrace{h\alpha(z,h)}_{\text{остатак}}$ $\qquad \dfrac{h\cdot\alpha(z,h)}{|h|} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$

Ф-ја је диференцијабилна у тачки ако и само ако у тој тачки има коначан извод.

Дефиниција: За функцију f кажемо да је аналитичка у тачки $z\in D$ ако је диференцијабилна у некој околини те тачке.

За функцију $f: D\to \mathbb{C}$ кажемо да је аналитичка у области D ако је аналитичка у свакој тачки те области. (диференцијабилна у свакој тачки те области)

* сва правила диференцирања остају иста

круто понашање

Пример: $f(x) = \sum\limits_{1}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$ $\quad 0<b<1$

реална анализа

a непаран природан број

$ab > 1 + 3\pi/2$

$f(z) = \operatorname{Re} z$

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(z+h)-f(z)}{h} = \lim\limits_{s\to 0}\dfrac{f(z+s)-f(z)}{s} = \lim\limits_{s\to 0}\dfrac{\operatorname{Re}(x+iy+s)-\operatorname{Re}(x+iy)}{s} =$

дуж реалне осе

$h = s+it$

$h = s$

$= \lim\limits_{s\to 0}\dfrac{x+s-x}{s} = 1$

Теорема: Ако је $\hat{f}$ Фуријеова трансформација функције f тада је $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}|^2 dx$. (важи за све функције које су са квадратом интеграбилне, а нешто шире важи за све ф-је из Лебеговог простора интеграбилности)

* Хајзенбергове релације неодређености

S класа $C^\infty(\mathbb{R})$ таквих да је $\sup_{x\in\mathbb{R}} (1+|x|)^m |\varphi^{(k)}(x)| < \infty$ $\forall m \geq 0$ $\forall k \geq 0$

* фамилија ф-ја S је густа са ф-јама које су са квадратом интеграбилне $\quad // \; e^{-x^2}$

$S \to$ простор Шварца

$\mathcal{F}: S \xrightarrow[на]{1-1} S$

поједностављење: $\int_{\mathbb{R}} |\varphi|^2 dx = \underline{1}$

$\varphi \in S(\mathbb{R})$ $\int_{-\infty}^{+\infty} |x\varphi(x) + \alpha\varphi'(x)|^2 dx =$ $\alpha \in \mathbb{R}$

$= \int_{\mathbb{R}} (x\varphi + \alpha\varphi')(x\bar{\varphi} + \alpha\bar{\varphi}')dx = \int_{\mathbb{R}} x^2|\varphi|^2 dx + \alpha^2 \int_{\mathbb{R}} |\varphi'|^2 dx$

$+ \alpha \int_{\mathbb{R}} x(\varphi'\bar{\varphi} + \varphi\bar{\varphi}')dx = \int_{\mathbb{R}} x^2|\varphi|^2 dx + \alpha^2 \int_{\mathbb{R}} |\varphi'|^2 dx$

$+ \alpha \int_{\mathbb{R}} x\, d(\varphi\bar{\varphi}) = \int_{\mathbb{R}} x^2|\varphi|^2 dx + \alpha^2 \int_{\mathbb{R}} |\varphi'|^2 dx +$

примјенимо парцијалну интеграцију

$+ \alpha\left(x|\varphi|^2\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi|^2 dx\right) =$

0 због услова

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2|\varphi|^2 dx + \alpha^2 \int_{\mathbb{R}} |\varphi'|^2 dx - \alpha \;=$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x}\hat{\varphi}(\xi)\, d\xi$$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} i\xi\, \hat{\varphi}(\xi) e^{i\xi x}\, d\xi \underset{\text{Парсевал}}{\Longrightarrow} \int_{\mathbb{R}} |\varphi'|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi$$

$$= \alpha^2 \int_{\mathbb{R}} x^2 |\hat{\varphi}|^2 dx - \alpha + \int_{\mathbb{R}} x^2 |\varphi|^2 dx$$

израз од кога што тражимо је ненегативан:

$$\alpha^2 \int_{\mathbb{R}} x^2 |\hat{\varphi}|^2 dx - \alpha + \int_{\mathbb{R}} x^2 |\varphi|^2 dx \geq 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$D \leq 0$$

$$1 - 4 \int_{\mathbb{R}} x^2 |\hat{\varphi}|^2 dx \int_{\mathbb{R}} x^2 |\varphi|^2 dx \leq 0$$

харпмонијени принцип:

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 |\varphi|^2 dx \int_{\mathbb{R}} x^2 |\hat{\varphi}|^2 dx \geq \frac{1}{4}$$

Особине Фуријеове трансформације:

1° f апсолутно интеграбилна $\Rightarrow \mathcal{F}(f)(x) \xrightarrow[|x| \to +\infty]{} 0$

2° f, g апсолутно интеграбилне, $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \Rightarrow \mathcal{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{F}(f) + \beta \mathcal{F}(g)$

3° f апсолутно интеграбилна $\Rightarrow \mathcal{F}(f(x-h)) = e^{-i\xi h}\mathcal{F}(f)$

4° $\mathcal{F}(f^{(k)}) = (i\xi)^k \mathcal{F}(f)$

5° $\mathcal{F}(x^k f(x)) = i^k \frac{d^k}{d\xi^k}\mathcal{F}(f)(\xi)$

6° f_1, f_2 апсолутно интеграбилне $(f_1 * f_2)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(y) f_2(x-y)\,dy$
конволуција функција f_1 и f_2
$(f_1 * f_2 = f_2 * f_1 \qquad (\alpha f_1 + \beta f_2) * g = \alpha f_1 * g + \beta f_2 * g)$
$\mathcal{F}(f_1 * f_2) = \sqrt{2\pi}\,\mathcal{F}(f_1)\cdot\mathcal{F}(f_2)$

Доказ:
1° $\mathcal{F}(f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} f(\xi)\,d\xi$

$\int_{\mathbb{R}} |f|\,dx < \infty \qquad T_0 : \int_{|x|\geq T_0} |f(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} f(\xi)\,d\xi\right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\underbrace{\left|\int_{-T_0}^{T_0} e^{-ix\xi} f\,d\xi\right|}_{\to 0 \text{ по Римановој леми}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{|\xi|\geq T_0} |f|\,d\xi$$

оцена

$< \frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{\varepsilon}{2}$ за $|x| \geq x_0$

$< \varepsilon$

2° тривијално : интеграл збира је збир интеграла пошто су конвергентни

3° $\mathcal{F}(f(x-h)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(\xi-h)\,d\xi \qquad \xi - h = y$ смена

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix(y+h)} f(y)\,dy = e^{-ixh}\mathcal{F}(f)(x)$

4° доказује се парцијалном интеграцијом

Покажимо за $k=1$ тако се преноси за $k \geq 2$

$$\mathcal{F}(f') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} f' \, d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Big(\underbrace{e^{-ix\xi} f(\xi) \Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{0} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)(-ix) e^{-ix\xi} d\xi \Big)$$

$$\mathcal{F}(f')(x) = (ix) \, \mathcal{F}(f)(x)$$

// убацвало пи оловка ;)

$$\mathcal{F}(f^{(k)})(x) = (ix)^k \mathcal{F}(f)(x)$$

$$5° \quad \mathcal{F}(f)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi\tau} f(\tau) \, d\tau$$

диференцирамо по ξ

$$(\mathcal{F}(f))'(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (-i\tau) e^{-i\xi\tau} f(\tau) \, d\tau$$

$\vdots$

$$(\mathcal{F}(f))^{(k)}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (-i\tau)^k e^{-i\xi\tau} f(\tau) \, d\tau = \mathcal{F}((-i\tau)^k f(\tau))$$

$$i^k \frac{d^k}{d\xi^k} \mathcal{F}(f)(\xi) = \mathcal{F}(\tau^k f(\tau))$$

$$6° \quad f_1 * f_2 (x) = \int_{\mathbb{R}} f_1(y) f_2(x-y) \, dy$$

$$\mathcal{F}(f_1 * f_2)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} (f_1 * f_2)(x) \, dx =$$

Фуријеова трансформација у тачки ξ

64

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} dx \int_{\mathbb{R}} f_1(y) f_2(x-y) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f_1(y) dy \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f_2(x-y) dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f_1(y) dy \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi(y+t)} f_2(t) dt \quad x-y=t \text{ смена} \quad =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f_1(y) e^{-i\xi y} dy \; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi t} f_2(t) dt \; \sqrt{2\pi} =$$

$$= \mathcal{F}(f_1) \cdot \mathcal{F}(f_2) \sqrt{2\pi}$$

* f апсолутно интеграбилна на $\mathbb{R}^3$

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-ix\circ y} f(y) dy$$

$x = (x_1, x_2, x_3)$ $\quad y = (y_1, y_2, y_3)$ $\quad x \cdot y = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i$

$dy = dy_1 dy_2 dy_3$

све што смо доказали важи и за просторе димензије n

Пример: Фуријеова трансформација Гаусове ф-је

$f(x) = e^{-\alpha x^2}$ $\quad \alpha > 0$

$$\mathcal{F}(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} e^{-\alpha\xi^2} d\xi \overset{\text{због парности}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha\xi^2} \cos x\xi \, d\xi =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\alpha\xi^2} \cos x\xi \, d\xi$$

Посматрамо добијени интеграл као параметарски по x

$$J(x) = \int_0^\infty e^{-\alpha\xi^2} \cos \xi x \, d\xi$$

$$J'(x) = \int_0^\infty e^{-\alpha\xi^2} (-\xi) \sin \xi x \, d\xi = \int_0^\infty \sin \xi x \, d\left(\frac{e^{-\alpha\xi^2}}{2\alpha}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\alpha} \left(\sin \xi x \, e^{-\alpha x^2} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^\infty e^{-\alpha\xi^2} x \cos \xi x \, d\xi \right)$$

$$\Rightarrow J'(x) = \frac{1}{2\alpha} \cdot (-x) J(x)$$

$$\Rightarrow (\ln J)' = -\frac{x}{2\alpha} \qquad J(0) = \int_0^\infty e^{-\alpha\xi^2} d\xi =$$

$$\ln J = -\frac{x^2}{4\alpha} + C' \qquad \xi\sqrt{\alpha} = \omega \qquad = \int_0^\infty e^{-\omega^2} \frac{d\omega}{\sqrt{\alpha}} =$$

$$J(x) = k \, e^{-x^2/4\alpha} \qquad = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}}$$

$$J(0) = k$$

$$J(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \, e^{-x^2/4\alpha}$$

Враћамо назад

$$\mathcal{F}(f) = \frac{\cancel{2}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \, e^{-\frac{x^2}{4\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} e^{-x^2/4\alpha}$$

- све пролази ако ф-ја рапидно опада и глатка је сад узмемо дуж имагинарне осе

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=\lim_{t\to 0}\frac{Re(x+iy+it)-Re(x+iy)}{it}=\lim_{t\to 0}\frac{x-x}{it}=0$$

јако строги захтеви

Манифеста на реалнu и имагинарни део комплексне функције

Нека је $f: D\to \mathbb{C}$

и нека $\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ постоји и нека је $f(z)$, $z=x+iy$

$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ $\qquad$ $h=s+it$ – општи случај

битно!

$$f'(z)=\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$$

1° $h=s$

$$\lim_{s\to 0}\frac{f(z+s)-f(z)}{s}=f'(z)$$

$$=\lim_{s\to 0}\frac{f(x+s+iy)-f(x+iy)}{s}=$$

$$\lim_{s\to 0}\frac{u(x+s,y)-u(x,y)+iv(x+s,y)-iv(x,y)}{s}=$$

$$\lim_{s\to 0}\left(\frac{u(x+s,y)-u(x,y)}{s}+i\frac{v(x+s,y)-v(x,y)}{s}\right)$$

мора да постоји $\qquad$ мора да постоји

$$=u_x(x,y)+iv_x(x,y)$$

$$u_x=\frac{\partial u}{\partial x}\qquad v_x=\frac{\partial v}{\partial x}$$

2° $h=it$

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x+iy+it)-f(x+iy)}{it}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{u(x,y+t)-u(x,y)+i(v(x,y+t)-v(x,y))}{it}$$

$$=\lim_{t\to 0}(-i)\left(\frac{u(x,y+t)-u(x,y)}{t}+i\frac{v(x,y+t)-v(x,y)}{t}\right)$$

$$=(-i)\left(u_y(x,y)+iv_y(x,y)\right)$$

$$=v_y(x,y)-iu_y(x,y)$$

$$v_y=\frac{\partial v}{\partial y}\qquad u_y=\frac{\partial u}{\partial y}$$

једначине Коши – Римана

$$\boxed{\begin{aligned}u_x&=v_y\\ v_x&=-u_y\end{aligned}}$$

у тачки (x,y)

$$\Rightarrow\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}\qquad -\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}$$

услови Коши-Римана $u_x = v_y$ $\quad -u_y = v_x$

Ако је ф-ја аналитичка у области D онда у свакој тачки области важи $u_x = v_y$ и $v_x = -u_y$.

Поставља се питање да ли важи обрнуто $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$?

Не у општем случају, али се може појачати

Став: Ако су функције <u>u и v диференцијабилне</u> у тачки (x,y) и у тој тачки важе једначине Коши-Римана ($u_x=v_y$ и $v_x=-u_y$) тада је функција $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ у тачки $z=x+iy$ диференцијабилна $f'(z)=u_x(x,y)+iv_x(x,y)$.

Доказ:

$h=s+it$ $\qquad u(x+s,y+t)-u(x,y)=u_x\cdot s+u_y\cdot t+\alpha\cdot|h|$

$|h|=\sqrt{s^2+t^2}$ где $\alpha\to 0$ када $(s,t)\to(0,0)$ (или $h\to 0$)

$v(x+s,y+t)-v(x,y)=v_x\cdot s+v_y\cdot t+\beta\cdot|h|$ $\quad /\cdot i$

$\beta\to 0$ $\quad (s,t)\to(0,0)$ $\quad (h\to 0)$

$$u(x+s,y+t)+iv(x+s,y+t)-u(x,y)-iv(x,y)=u_x s+u_y t+\alpha|h|+iv_x s+iv_y t+i\beta|h|$$

$$f(z+h)-f(z)=u_x\cdot s+\underbrace{u_y\cdot t}_{-v_x\cdot t}+iv_x s+\underbrace{iv_y t}_{iu_x t}+(\alpha+i\beta)|h|$$

$$f(z+h)-f(z)=u_x\cdot s+it\cdot u_x+iv_x\cdot s-v_x t+(\alpha+i\beta)|h|=$$
$$=u_x\cdot(s+it)+iv_x(s+it)+(\alpha+i\beta)|h|=$$
$$=(u_x+iv_x)(s+it)+(\alpha+i\beta)|h|=(u_x+iv_x)h+(\alpha+i\beta)|h|$$

$$f(z+h)-f(z)=(u_x+iv_x)h+(\alpha+i\beta)|h|$$

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h}\xrightarrow[h\to 0]{}u_x+iv_x=f'(z)$$

датум: 26.3.2012.

$z = x + iy$

$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

Ако су u, v диференцијабилне у (x,y) и задовољене су једначине Коши Римана $u_x = v_y$, $v_x = -u_y$ тада је f диференцијабилна у $z = x+iy$

Пример $f(z) = z\cdot\bar{z} = |z|^2 = x^2+y^2 = u(x,y) + iv(x,y)$

$u(x,y) = x^2+y^2$

$v(x,y) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} 2x = 0 \\ 0 = -2y \end{array}\right\} \Rightarrow x = 0 \ \wedge \ y = 0 \qquad z = 0$$

диференцијабилна у $z = 0$

није аналитичка у $z=0$ и ни у једној другој тачки комплексне равни!

$\boxed{\text{Елементарне функције:}}$ како се дефинишу елементарне ф-је у комплексној равни

1° Степена функција, полиноми

$f(z) = z^n \qquad n = 0,1,2\dots$

$$\lim_{h\to 0}\frac{(z+h)^n - z^n}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}h^{n-k} - z^k}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k} z^k h^{n-k-1}\right) =$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(nz^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2}\binom{n}{k} z^k h^{n-k-1}\right) = nz^{n-1}$$

диференцијабилна у свакој тачки комплексне равни а самим тим и аналитичка што важи и за полином

2° Експоненцијална функција

$z = x + iy$

$$e^z \overset{def.}{=} e^x(\cos y + i\sin y)$$

проверимо да ли је аналитичка и у којим тачкама