датум: 27.2.2012.

- Варијациони рачун - (1. питање)

<u>мотивација</u> 1° φ диференцијабилна на (a,b) у $x_0 \in (a,b)$ φ има локалну екстремну вредност $\Rightarrow \varphi'(x_0) = 0$. (Фермаова теорема)

$\varphi: (a,b) \to \mathbb{R}$ мора да постоји бордер

2° $\varphi: \Omega \to \mathbb{R}$ $\quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^k$

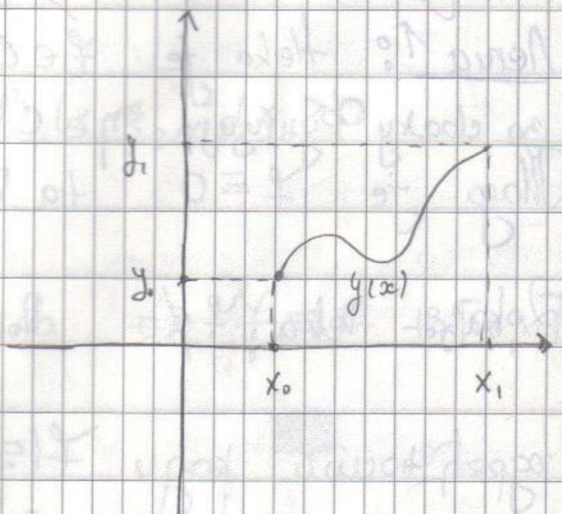
$x_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_k^0)$ $\quad \varphi$ у $x = x_0$ има локални минимум (максимум) и φ диференцијабилна на Ω.

$$\Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x_0) = 0 \qquad i = 1, 2, \dots, k$$

<u>Пример</u>

$$C^1[x_0, x_1] \ni y \longmapsto \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

$y(x_0) = y_0$
$y(x_1) = y_1$



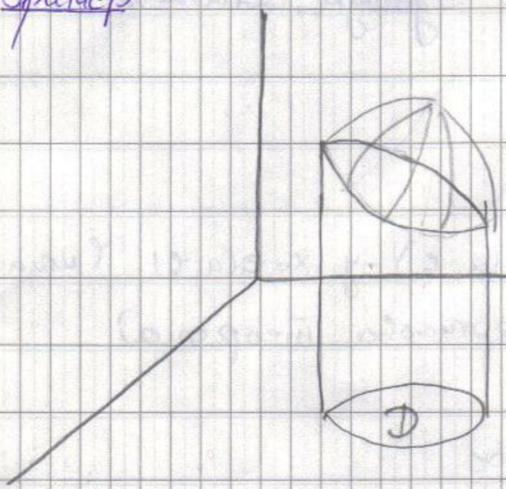
Да ли има екстремну вредност?

Да, знамо да постоји најмања вредност дужине лука!

Геометрија: права има најмању дужину!

а то ћемо показати и преко варијационих принципа

Пример



$z = f(x, y)$

$f \longmapsto \iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$

→ зачетак варијационог рачуна

Пример: проблем из механике: тело се креће под дејством силе земљине теже

по којој криви да се креће тело?

мин. време

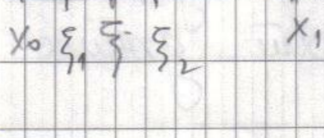
брахистохрона

Помоћне леме:

реална функција

Лема 1: Нека је $f \in C[x_0, x_1]$ и $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,\eta(x)\,dx = 0$ за сваку функцију $\eta \in C^1[x_0, x_1]$, $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$. Тада је $f \equiv 0$ на $[x_0, x_1]$.

Доказ: Нека, $f \not\equiv 0$. Постоји $\xi : f(\xi) \neq 0$



одређености ради $f(\xi) > 0$

$\exists\, \xi_1, \xi_2$ тако да је $f(x) > 0$ на (ξ_1, ξ_2)

(ξ може да буде и x_0 и x_1 - свакако постоји интервал)

$$\eta(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & \text{ван } (\xi_1, \xi_2) \\ (x-\xi_1)^2 (x-\xi_2)^2 & \text{на } [\xi_1, \xi_2] \end{cases}$$

η има непрекидан извод у $x = \xi_1$

$$\lim_{x\to\xi_1^+} \frac{\eta(x)-\eta(\xi_1)}{x-\xi_1} = \lim_{x\to\xi_1^+} \frac{\eta(x)}{x-\xi_1} = \lim_{x\to\xi_1^+} (x-\xi_1)(x-\xi_2)^2 = 0$$

$$\lim_{x\to\xi_1^-} \frac{\eta(x)-\eta(\xi_1)}{x-\xi_1} = 0 \quad \text{(на сличан начин)}$$

$\exists\ \eta'(\xi_1) = 0 \qquad \lim_{x\to\xi_1} \eta'(x) = 0 \Rightarrow \underline{\eta' \in C}$

$\Rightarrow \eta \in C^1[x_0, x_1]$

$$0 = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\eta(x)\,dx = \int_{\xi_1}^{\xi_2} f(x)(x-\xi_1)^2 (x-\xi_2)^2\,dx > 0$$

↯ $\Rightarrow$ претпоставка је нетачна $\Rightarrow f \equiv 0$ на $[x_0, x_1]$ ■

Лема 2: (може се проширити на више димензија)

реалне ф-је

$D \subset \mathbb{R}^2$ $\quad f \in C(D)$ $\quad$ и $\quad \iint\limits_D f(x,y)\,\eta(x,y)\,dx\,dy = 0$

за сваку функцију $\eta \in C(D)$ и $\dfrac{\partial \eta}{\partial x}, \dfrac{\partial \eta}{\partial y} \in C(\bar{D})$

и $\eta\big|_{\partial D} = 0$ тада је $f \equiv 0$ на D.

Доказ: Претпоставимо супротно, нека постоји тачка $(x_0, y_0) \in D$ $\quad f(x_0,y_0) \neq 0$ $\quad$ ($f(x_0,y_0) > 0$ - одређености ради)

$\Rightarrow \quad \exists\, K_\rho = \{(x,y) : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < \rho^2\} \subset D$.

због непрекидности $\quad \boxed{f(x,y) > 0 \text{ на } K_\rho}$

Треба да изаберемо ф-ју η

$$\eta(x,y) = \begin{cases} 0 & (x,y) \in D \setminus K_\rho \\ \left(-\rho^2 + (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2\right)^2 & : (x,y) \in \bar{K_\rho} \end{cases}$$

ф-ја η задовољава наведене услове леме

$$0 = \iint\limits_D f(x,y)\,\eta(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < \rho^2} f(x,y)\left((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 - \rho^2\right)^2 dx\,dy > 0$$

Можемо проширити да ф-је буду класе C^k ... доказ што само довољно велики степен!

Дефиниција: Нека је X неки скуп. Свака ф-ја $\Phi^* : X \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ назива се функционал.

или реалн.

$[x_0, x_1]$ $\qquad F : [x_0, x_1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

има све непрекидне изводе до другог реда закључно

$X = \{ y \in C^1[x_0, x_1] : y(x_0) = y_0,\ y(x_1) = y_1 \}$ y_0, y_1 унапред дате

$J: X \to \mathbb{R}$ Да ли постоји екстремна вредност?

$Jy = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, dx$ — питање егзистенције овог проблема

→ ако се претпостави да нешто постоји а није доказано да постоји

* N стрерон(?) Перонов парадокс

$N \neq 1$ $\quad N^2 > N \quad N = 1$ *

Дефиниција: Функционал J у тачки $y_0 \in X$ има локални екстрем ако за неко $\varepsilon > 0$ $J(y) \leq J(y_0)$ (максимум)

$J(y) \geq J(y_0)$ (минимум)

за свако $y \in X$ са особином да је $\max\limits_{[x_0, x_1]} |y(x) - y_0(x)| < \varepsilon$ → близост нултог реда

(негде се додаје $\max\limits_{[x_0, x_1]} |y'(x) - y_0'(x)| < \varepsilon$) → близост првог реда

$J(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, dx$ и нека је у тачки $y \in X$ екстремна вредност.

$y \in X$ $\quad y \in C^1[x_0, x_1]$ $\quad$ састављено ф-ју

$y(x_0) = y_0$ $\quad y + \varepsilon\eta \in X$ $\quad \varepsilon$ довољно мали реалан број

$y(x_1) = y_1$

$(*)\ \left(\eta \in C^1[x_0, x_1],\ \eta(x_0) = \eta(x_1) = 0 \right.$ $\quad J(y + \varepsilon\eta) = \varphi(\varepsilon)$

$J(y+\varepsilon\eta) \geq J(y)$ за ε довољно мало
$(\leq J(y))$

→ мин.

↘ макс.

$|\varepsilon| \max_{[x_0,x_1]} |\eta|$ довољно мала

$\varphi(\varepsilon) \geq \varphi(0)$
$(\leq \varphi(0))$

ако има извод онда по Фермаовој теореми

своде се на реалну ф-ју

$$\varphi'(0) = 0$$

морамо наћи φ'

показаћемо касније да са изводом

$$\varphi(\varepsilon) = J(y+\varepsilon\eta) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y+\varepsilon\eta, y'+\varepsilon\eta')\,dx$$

$$\varphi'(\varepsilon) = \int_{x_0}^{x_1} \left[F_y(x, y+\varepsilon\eta, y'+\varepsilon\eta')\cdot\eta + F_{y'}(x, y+\varepsilon\eta, y'+\varepsilon\eta')\eta'\right] dx$$

доказ како парцијални извод улази под интеграл

$$0 = \varphi'(0) = \int_{x_0}^{x_1} \left[F_y(x,y,y')\cdot\eta + F_{y'}(x,y,y')\,\eta'\right] dx$$

и то мора да буде тачно за свако одабрано η! (*)

$$\int_{x_0}^{x_1} F_y\,\eta\,dx + \int_{x_0}^{x_1} F_{y'}\,d\eta = 0$$

да ли ово постоји → претпостављамо

$$\int_{x_0}^{x_1} F_y\,\eta\,dx + F_{y'}\cdot\eta\Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x} \frac{d}{dx}F_{y'}\cdot\eta\,dx = 0$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}\right)\eta(x)\,dx = 0 \quad \text{за (*) по } \eta$$

$\underbrace{\hspace{6cm}}$

Применимо лему 1 $\Rightarrow$

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

ф-ју F унапред знамо $\Rightarrow$ добијамо диференцијалну једначину

Ојлер – Лагранж – добијамо екстремалу – криву!

$F(x, y, y')$

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

пример:

$F(x,y,y') = \sqrt{1+y'^2}$ $\quad F_y = 0$

$$-\frac{d}{dx}\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{1+y'^2}}\cdot \cancel{2}y' = -\frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = 0$$

$$\frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = 0 \Rightarrow \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = C_1' \Rightarrow y' = C_1$$

$$y = C_1 x + C_2$$

може да се покаже

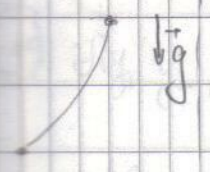
$F_{y'y'} \neq 0$

конкретна права – користимо до одређено због почетне услове

Пример: Проблем брахистохроне

сведе се на: $\displaystyle\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}\,dx$ потребна је минимизирати

$$f(x,y,y') = \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}$$



$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$$

- вертикална раван
- најмање време у путу

$$\frac{\partial}{\partial y}\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} - \frac{d}{dx}\frac{\partial}{\partial y'}\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} = 0$$

$$\frac{C_1}{y} - 1 = y'^2 \Rightarrow y = \frac{C_1}{1+y'^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} - \frac{y'^2}{\sqrt{y}\,(1+y'^2)}\right) = 0$$

$$y' = \sqrt{\frac{C_1 - y}{y}} \qquad \frac{dy}{dx} = p$$

$$dy = p\,dx$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} - \frac{y'^2}{\sqrt{y}\,(1+y'^2)} = \sqrt{C_1}$$

~~нађ~~ звимо смену

$$\Rightarrow y'^2 = \frac{C_1 - y}{y}$$

ову нашу криву изразићемо у параметарском облику

$$y = \frac{C_1}{2}(1 - \cos u)$$

сведемо или решимо параметарски

$$y'^2 = \frac{C_1 - \frac{C_1}{2} + \frac{C_1}{2}\cos u}{\frac{C_1}{2}(1-\cos u)}$$

$$y'^2 = \frac{2\cos^2\frac{u}{2}}{2\sin^2\frac{u}{2}} \qquad y' = \frac{\cos\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}$$

$$dy = \frac{C_1}{2}\sin u\,du \qquad dx = \frac{\frac{C_1}{2}\cdot 2\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}\,du \cdot \sin\frac{u}{2}}{\cos\frac{u}{2}}$$

$$dx = C_1 \sin^2\frac{u}{2}\,du$$

$$dx = \frac{C_1}{2}(1-\cos u)\,du$$

$$x = \frac{C_1(u - \sin u)}{2} + C_2$$

$$x(u) = \frac{C_1}{2}(u - \sin u) + C_2 \qquad y(u) = \frac{C_1}{2}(1 - \cos u)$$

→ ово је циклоида

Датум: 29.2.2012.

(18) $J(y)=\int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')\,dx \qquad y\in C^1[x_0,x_1]$

$y(x_0)=y_0$

$y(x_1)=y_1$

$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0$ једначина Ојлер-Лагранжа

$F_y-F_{y'x}-F_{y'y}\frac{dy}{dx}-F_{y'y'}\frac{dy'}{dx}=0$

$F_y-F_{y'x}-F_{y'y}\cdot y'-F_{y'y'}\cdot y''=0$ } једначина Ојлер Лагранжа написана у отвореном облику

Пример $J(y)=\int_{x_0}^{x_1}(x^2+xy+xy'^2+yy')\,dx$

$F(x,y,y')=x^2+xy+xy'^2+yy'$

$F_y=x+y'$

$F_{y'}=2y'x+y$

$F_{y'x}=2y'$

$F_{y'y}=1$

$F_{y'y'}=2x$

$x+\cancel{y'}-2y'-\cancel{y'}-y''\cdot 2x=0$

$\boxed{x-2y'-2x\cdot y''=0}$ не мора да буде линеарна у општем случају

(19) $J(y_1,y_2,\dots,y_n)=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y_1,y_1',y_2,y_2',\dots,y_n,y_n')\,dx$

захтевамо да је $y_i(x_0)=y_i^{(0)} \quad i=1,2,\dots,n$

$y_i(x_1)=y_i^{(1)}$

$y_i\in C^1[x_0,x_1]$

уочимо $\forall$ ф-ју $\eta_i \in C^1[x_0, x_1]$ $\quad \eta_i(x_0) = \eta_i(x_1) = 0$

и посматрамо довољно мали број ε тако да је

$$\varphi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1+\varepsilon_1\eta_1, y_1'+\varepsilon_1\eta_1', \dots, y_n+\varepsilon_n\eta_n, y_n'+\varepsilon_n\eta_n')\,dx$$

екстремна вредност би била у $\varphi(0,0,\dots,0)$ а по Фермаовој теореми

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_i} = 0 \quad \text{у тачки } (0,0,\dots,0)$$

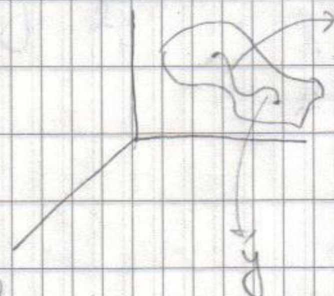
Налажењем парцијалних извода добијамо:

$$\begin{cases} F_{y_1} - \dfrac{d}{dx} F_{y_1'} = 0 \\ \vdots \\ F_{y_n} - \dfrac{d}{dx} F_{y_n'} = 0 \end{cases}$$

што следи из чињенице да је $\dfrac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_i}(0,0,\dots,0) = 0$

добијамо систем

као пример:
користи се за рачунање
геодезијских линија



најкраће путање

геодезијска линија

у простору криву параметризујемо са 3 променљиве

Резултат и примене је систем чијим решавањем добијамо једначине координата геодезијских линија.

3° $\quad J(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', \dots, y^{(n)})\,dx$ $\quad y \in C^n[x_0, x_1]$

$$(*) \begin{cases} y(x_0) = a_0 & y(x_1) = b_0 \\ y'(x_0) = a_1 & y'(x_1) = b_1 \\ \vdots & \\ y^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1} & y^{(n-1)}(x_1) = b_{n-1} \end{cases}$$

$a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$ унапред задати

Уочимо функцију $\eta \in C^n[x_0, x_1]$

$$\eta^{(k)}(x_0) = \eta^{(k)}(x_1) = 0 \qquad \forall k = 0, 1, \dots, n-1$$

Нека функционал J достиже екстремну вредност у некој функцији $y \in \mathcal{F}(*)$.

Уочимо скаларну ф-ју $\varphi(\varepsilon) = J(y + \varepsilon\eta)$

φ достиже екстремну вредност за $\varepsilon = 0$ па је по Фермаовој теореми $\varphi'(0) = 0$. (претпостављамо да је F довољно глатка – колико год до непрекидна)

$$\varphi(\varepsilon) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y + \varepsilon\eta, y' + \varepsilon\eta', \dots, y^{(n)} + \varepsilon\eta^{(n)})\, dx$$

$$\varphi'(0) = \int_{x_0}^{x_1} (F_y \cdot \eta + F_{y'}\eta' + \dots + F_{y^{(n)}}\eta^{(n)})\, dx$$

$$\int_{x_0}^{x_1} F_{y^{(k)}} \eta^{(k)} dx = \qquad 1 \le k \le n$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} F_{y^{(k)}}\, d\eta^{(k-1)} = \underbrace{F_{y^{(k)}} \eta^{(k-1)} \Big|_{x_0}^{x_1}}_{=0} - \int_{x_0}^{x_1} \eta^{(k-1)} \frac{d}{dx} F_{y^{(k)}} dx =$$

укратко за η!

$$= (-1)\int_{x_0}^{x_1} \eta^{(k-1)} \frac{d}{dx} F_{y^{(k)}} dx = \dots (-1)^k \int_{x_0}^{x_1} \eta(x) \frac{d^k}{dx^k} F_{y^{(k)}} dx$$

$$\varphi'(0) \Rightarrow \int_{x_0}^{x_1} F_y \eta\, dx + \sum_{k=1}^{n} \int_{x_0}^{x_1} F_{y^{(k)}} \eta^{(k)} dx = 0$$

$$\int_{x_0}^{x_1} F_y \eta\, dx + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \int_{x_0}^{x_1} \eta(x) \frac{d^k}{dx^k} F_{y^{(k)}} dx = 0$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \eta(x)\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{d^k}{dx^k} F_{y^{(k)}}\right)dx = 0 \qquad \forall \eta: \eta \in C^n[x_0, x_1]$$

$$\eta^{(k)}(x_0)=\eta^{(k)}(x_1)=0, \quad k=0,1,\dots,n-1$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{d^k}{dx^k} F_{y^{(k)}} = 0}_{\text{једначина Ојлер-Лагранжа}}$$

Резон остаје исти и са више једначина више извода

Пример: Показати следећу неједнакост:

$$\int_0^{\pi} y^2\,dx \le \int_0^{\pi} y'^2\,dx \qquad y \in C^1[0,\pi], \quad y(0)=y(\pi)=0$$

→ неједнакост Виртингера

Можемо да разматрамо овакав функционал

$$J(y)=\int_0^{\pi}(y'^2-y^2)\,dx \qquad F(x,y,y')=y'^2-y^2$$

Било би добро наћи минимум

Решимо ј-ну Ојлер-Лагранжа

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$$

$$-2y - \frac{d}{dx}2y' = 0$$

$$y''+y=0$$

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

$$0 = y(0) = C_2$$

$$\boxed{y = C_1 \sin x}$$

→ ова ф-ја је екстремала

$$J(C_1 \sin x) = \int_0^{\pi} C_1^2(\cos^2 x - \sin^2 x)\,dx = C_1^2 \int_0^{\pi} \cos 2x\,dx = C_1^2 \frac{\sin 2x}{2}\Big|_0^{\pi} = 0$$

Коши - Лагранж

$$y(x)-y(0)=\int_0^x y'dt \qquad |y'|\le M \text{ на } [0,\pi]$$

$$|y(x)|\le\int_0^x |y'|\,dt\le Mx \implies y(x)=O(x),\ x\to0^+$$

$$|y(x)|\le\int_x^\pi |y'|\,dt\le M(\pi-x) \qquad y(x)=O(\pi-x),\ x\to\pi^-$$

$$\int_0^\pi (y^2\,ctg\,x)'dx=\int_0^\pi\left(\frac{y^2\cos x}{\sin x}\right)'dx=\lim_{\substack{\varepsilon_1\to0^+\\ \varepsilon_2\to\pi^-}}\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2}\left(\frac{y^2\cos x}{\sin x}\right)'dx=$$

$$=\lim_{\substack{\varepsilon_1\to0^+\\ \varepsilon_2\to\pi^-}}\frac{y^2\cos x}{\sin x}\Bigg|_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2}=\lim_{\varepsilon_2\to\pi^-}\underbrace{\frac{y^2(\varepsilon_2)\cos\varepsilon_2}{\sin\varepsilon_2}}_{\downarrow\,0}-\lim_{\varepsilon_1\to0^+}\underbrace{\frac{y^2(\varepsilon_1)\cos\varepsilon_1}{\sin\varepsilon_1}}_{\downarrow\,0}$$

$$\Rightarrow\int_0^\pi (y^2\,ctg\,x)'dx=0$$

$$\boxed{\int_0^\pi (y'^2-y^2)\,dx\overset{?}{=}\int_0^\pi (y'-ctg\,x\,y)^2\,dx}\ (\ast) \quad \text{докажемо једнакост}$$

$$\int_0^\pi(\cancel{y'^2}-y^2-\cancel{y'^2}-ctg^2x\,y^2+2yy'ctg\,x)\,dx=\int_0^\pi\left(2yy'ctg\,x-y^2\left(1+\frac{\cos^2x}{\sin^2x}\right)\right)dx$$

$$=\int_0^\pi\left(2yy'ctg\,x-y^2\frac{1}{\sin^2x}\right)dx=\int_0^\pi (y^2\,ctg\,x)'dx=0$$

$$(\ast)\Rightarrow\int_0^\pi (y'^2-y^2)\,dx\ge0$$

сад је јасно! што је и требало доказати.

нађемо тачно када је $=0$

$$y'-y\,ctg\,x=0$$

$$(\ln y)'=(\ln\sin x)'\Rightarrow y=C_1\sin x$$

$y \in C^1[0,\pi] \quad y(0) = y(\pi) = 0 \Rightarrow \int_0^\pi y^2 dx \le \int_0^\pi y'^2 dx$, радимо са реалним функцијама

Операција диференцирања није ограничена!

квари својства функције

Виртингер–Лебедевљева формула $\quad y = \int_0^x y' dt \quad |y|^2 \le \int_0^x 1\, dt \int_0^x |y'|^2 dt \le x \int_0^\pi |y'|^2 dt$

$$T_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikx} \quad a_{-n} \ne 0 \text{ или } a_n \ne 0 \quad \int_0^\pi |y|^2 dx \le \frac{\pi^2}{2} \int_0^\pi |y'|^2 dt$$

тригонометријски полиноми степена n

$$+\infty > p > 0 \quad \left(\int_{-\pi}^{\pi} |T_n'|^p dx \right)^{1/p} \le n \left(\int_{-\pi}^{\pi} |T_n|^p dx \right)^{1/p}$$

$$\max_{\mathbb{R}} |T_n'| \le n \max_{\mathbb{R}} |T_n|$$

неједнакост Бернштајна

Пример:

$$J(y) = \int_{-1}^{1} x^2 y'^2 dx \quad y \in C^1[-1,1] \quad y(-1) = -1 \quad y(1) = 1$$

$$\mathcal{Y} = \{ y : y \in C^1[-1,1],\ y(-1) = -1,\ y(1) = 1 \}$$

$J(y) \ge 0$

хоћемо да покажемо да је 0 инфимум $\quad 0 = \inf_{y \in \mathcal{Y}} J(y)$

$a > 0$

Одаберемо функцију $\quad y_a(x) = \dfrac{\operatorname{arctg} \frac{x}{a}}{\operatorname{arctg} \frac{1}{a}}$

$$J(y_a) = \frac{a^2}{\operatorname{arctg}^2 \frac{1}{a}} \int_{-1}^{1} \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)^2} < \frac{a^2}{\operatorname{arctg}^2 \frac{1}{a}} \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2+a^2} =$$

$$= \frac{2a}{\operatorname{arctg} \frac{1}{a}} \xrightarrow[a \to 0+]{} 0$$

Нема такве ф-је у фамилији $\mathcal{Y}$ што да њиме минимум!

Лежандр-Јакоби критеријум

– Довољан услов – тј. довољно знати

Посматрамо само функционеле типа $J(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx$

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$ једначина Ојлер–Лагранжа

$y \in C^1[x_0, x_1]$

$y(x_0) = y_0$

$y(x_1) = y_1$

добијамо екстремалу $\bar{y}$

$$P = F_{yy}\Big|_{y=\bar{y}} \qquad Q = F_{yy'}\Big|_{y=\bar{y}} \qquad R = F_{y'y'}\Big|_{y=\bar{y}}$$

дефинишемо функцију

$$S(x) = P(x) - \frac{d}{dx} Q(x)$$

Придружимо диференцијалну једначину:

$$\frac{d}{dx}(Ru') - Su = 0 \qquad u(x_0) = 0,\quad u'(x_0) = 1$$

$(\angle) \to$ Лежандров услов

Став: Ако је $F_{y'y'} > 0$ на екстремали $y = \bar{y}$ и $u(x) \neq 0$ на $(x_0, x_1]$ тада та екстремала $y = \bar{y}$ даје функционелу J минимум. (максимум) Јакобијев услов

Пример: $J(y) = \int_0^{\pi/4} (y'^2 - 4y^2 - 8y)\,dx$ $\quad C^1[0, \pi/4]$

$y(0) = -1,\ y(\frac{\pi}{4}) = 0$

$P = -8$

$Q = 0$ $\qquad S = -8 \qquad \frac{d}{dx}(2u') + 8u = 0 \qquad u(0) = 0$

$R = 2$ $\qquad u'(0) = 1$

$$u'' + 4u = 0$$

$$u(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$$

$\Rightarrow C_1 = 0$ $\qquad u(x) = C_2 \sin 2x \qquad u'(0) = 2C_2 = 1$

$u(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$ а не аутирпа на $(0, \pi/4)$

$F_{y'y'} = 2 > 0$

$\rightarrow J(y)$ има у екстремали тачку минимума

Ојлер-Лагранж:

$-8y - 8 - \frac{d}{dx}2y' = 0$ — подсетити се Гринове формуле

$4y + 4 + y'' = 0$

$y'' + 4y = -4$

$y_H = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$

$y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x - 1$

$y_P = -1$.

$x = 0: C_1 - 1 = -1 \Rightarrow C_1 = 0$

$x = \frac{\pi}{4}: \quad C_2 - 1 = 0 \Rightarrow C_2 = 1$

$\bar{y} = \sin 2x - 1$ — једначина екстремале

$$J(\bar{y}) = \int_0^{\pi/4} (4\cos^2 2x - 4\sin^2 2x - 4 + \cancel{8\sin 2x} - \cancel{8\sin 2x} + 8)\,dx =$$

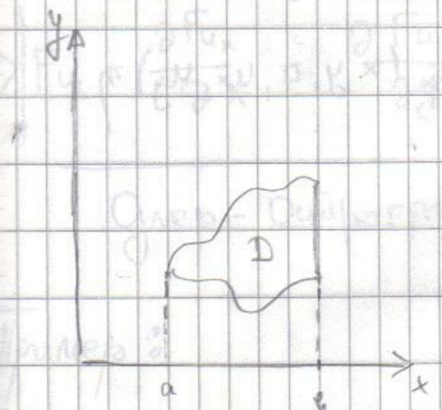
$$= \int_0^{\pi/4} (4\cos 4x + 4)\,dx = \sin 4x \Big|_0^{\pi/4} + 4x\Big|_0^{\pi/4} = \pi$$

могли смо да добијемо доказ да уредимо

$$\int_0^{\pi} (y'^2 - 4y^2 - 8y)\,dx \geq \pi \qquad \forall y \in C^1[0, \pi/4], \quad y(0) = -1, \quad y(\pi/4) = 0$$

18

Домаћи: Гринова формула



$D \subset \mathbb{R}^2$

$P(x,y),\ Q(x,y) \in C(\bar{D})$

$\frac{\partial P}{\partial y},\ \frac{\partial Q}{\partial x} \in C(\bar{D})$

$$\oint_{C^+} P\,dx + Q\,dy = \iint_{\bar{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

зависи од оријентације криве

Случај функција више променљивих датум: 5. 3. 2012.

$D \subset \mathbb{R}^2$ ∂D део по део глатка

фамилија ф-ја $\mathcal{Y} = \{u :$ u има непрекидне парцијалне изводе до другог реда закључно и u узима на граници неку конкретну вредност u_0 унапред задату $\}$

$J : \mathcal{Y} \to \mathbb{R}$

$J(u) = \iint_D F(x,y,u,u_x,u_y)\,dx\,dy$ F - унапред задата

Проблем: Наћи ф-ју $u \in \mathcal{Y}$ (ако постоји) која функционалу J даје екстремну вредност. η непрекидна и има непрекидне парцијалне изводе на D и $\eta|_{\partial D} = 0$.

Претпоставимо да функционал J достиже екстремну вредност за ф-ји $u \in \mathcal{Y}$.

$\varphi(\varepsilon) = J(u + \varepsilon\eta)$

$\varphi(\varepsilon) \le \varphi(0)$ у некој околини тачке $\varepsilon = 0$

$(\ge \varphi(0))$ Фермаова теорема $\varphi'(0) = 0$

$$\varphi(\varepsilon) = J(u+\varepsilon\eta) = \iint_D F(x,y,u+\varepsilon\eta, u_x + \varepsilon\eta_x, u_y + \varepsilon\eta_y)\,dx\,dy$$

$$\varphi'(\varepsilon) = \iint_D \big[F_u(x,y,u+\varepsilon\eta, u_x+\varepsilon\eta_x, u_y+\varepsilon\eta_y)\cdot\eta + F_{u_x}(x,y,u+\varepsilon\eta, u_x+\varepsilon\eta_x, u_y+\varepsilon\eta_y)\,\eta_x + F_{u_y}(x,y,u+\varepsilon\eta, u_x+\varepsilon\eta_x, u_y+\varepsilon\eta_y)\,\eta_y\big]\,dx\,dy$$

одга се у тачки 0 уфрости

$$0 = \varphi'(0) = \iint_D [F_u(x,y,u,u_x,u_y)\cdot\eta + F_{u_x}(x,y,u,u_x,u_y)\eta_x$$
$$+ F_{u_y}(x,y,u,u_x,u_y)\eta_y]\,dx\,dy$$

$$\iint_D (F_u\eta + F_{u_x}\cdot\eta_x + F_{u_y}\eta_y)\,dx\,dy = 0$$

$$F_{u_x}\eta_x + F_{u_y}\eta_y = \frac{\partial}{\partial x}(\eta\cdot F_{u_x}) - \eta\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x} + \frac{\partial}{\partial y}(\eta F_{u_y}) - \eta\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}$$

$$\iint_D F_u\eta\,dx\,dy + \iint_D\left(\frac{\partial}{\partial x}(\eta F_{u_x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\eta F_{u_y})\right)dx\,dy -$$

$$-\iint_D \eta\left(\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x} + \frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}\right)dx\,dy = 0$$

$$\iint_D \eta\left(F_u - \frac{\partial F_{u_x}}{\partial x} - \frac{\partial F_{u_y}}{\partial y}\right)dx\,dy + \iint_D\left(\frac{\partial}{\partial x}\underbrace{(\eta F_{u_x})}_{Q} - \frac{\partial}{\partial y}\underbrace{(\eta F_{u_y})}_{P}\right)dx\,dy$$

$$= \iint_D \eta\left(F_u - \frac{\partial F_{u_x}}{\partial x} - \frac{\partial F_{u_y}}{\partial y}\right)dx\,dy + \underbrace{\int_{\partial D} -\eta F_{u_y}\,dx + \eta F_{u_x}\,dy}_{\overset{\shortparallel}{0}} = 0$$

$$\eta\Big|_{\partial D} = 0$$

$$\iint_D \eta\left(F_u - \frac{\partial F_{u_x}}{\partial x} - \frac{\partial F_{u_y}}{\partial y}\right)dx\,dy = 0$$

То важи $\forall \eta$ са задатим условима па по леми 2 ! $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{F_u - \frac{\partial F_{u_x}}{\partial x} - \frac{\partial F_{u_y}}{\partial y} = 0}$$ (парцијална једначина Ојлер - Лагранжа)

Ојлер - Остроградски

Пример:

$$J(u) = \iint_D \underbrace{(u_x^2 + u_y^2)}_{\text{квадрат интензитета градијента}} \, dx\,dy$$

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = u_x^2 + u_y^2$$

$$0 - \frac{\partial}{\partial x}(2u_x) - \frac{\partial}{\partial y}(2u_y) = 0$$

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$\Delta u = 0$$

оператор Лапласа

хармонијска ф-ја

$$u\Big|_{\partial D} = u_0$$

интересантне особине

- поседује све изводе свих редова
- ако знамо вредност на граници → знамо све особине унутра

Ако учествује ф-ја од 3 променљиве

$$J(u) = \iiint_D F(x,y,z,u,u_x,u_y,u_z)\,dx\,dy\,dz \qquad D \subset \mathbb{R}^3$$

Применом формуле Гауса-Остроградског добијамо:

$$F_u - \frac{\partial}{\partial x}F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y}F_{u_y} - \frac{\partial}{\partial z}F_{u_z} = 0$$

$$J(u) = \iint_D F(x,y,u,u_x,u_y,u_{xx},u_{xy},u_{yy},\dots)\,dx\,dy$$

$$F_u - \left(\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x} + \frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}\right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}F_{u_{xx}} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}F_{u_{xy}} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}F_{u_{yy}}\right)$$

$$- \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}u_{xxx} + \dots\right)$$ само процедура усложњавања

-диференцирање у нормираним просторима-

- Несвојствени интеграл - (2. питање)

Дефиниција $f:[a,b] \to \mathbb{R}$

$x_1 \quad x_2 \quad x_{n-1}$

$a = x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_{n-1} < x_n = b$

Број I се назива Римановим интегралом функције f на интервалу $[a,b]$ ако $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ такав да за сваку поделу P са особином $\lambda(P) < \delta$ важи $|\sigma(f,P,\xi) - I| < \varepsilon$.

$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$

$\xi\ (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\sigma(f,P,\xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$\lambda(P) = \max_{1 \le i \le n}(x_i - x_{i-1})$$

код Римановог интеграла : интервал коначан и ф-ја ограничена!
Може да се прошири!

2 ситуације
- А) интервал интеграције није ограничен
- Б) интервал интеграције је ограничен али ф-ја која се интеграли није на њему ограничена

А) $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ — први случај (интервал интеграције није ограничен)

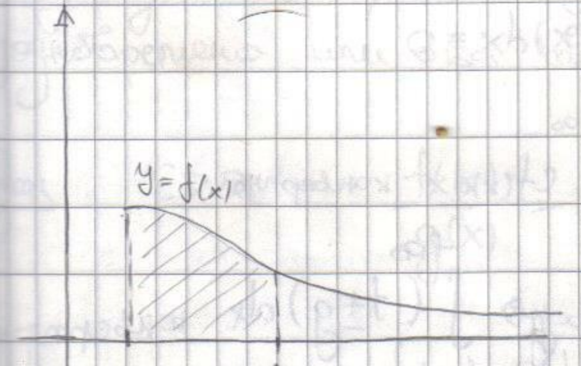
- f је интеграбилна на свом коначном интервалу $[a, A]$, $A > a$

Нека је $F(A) = \int_a^A f(x)\,dx$

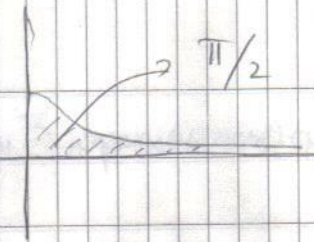
Дефиниција $\lim_{A \to +\infty} F(A)$ (коначан или бесконачан) називамо несвојственим интегралом ф-је f по интервалу $[a, +\infty)$ и симболички записујемо $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

За несвојствени интеграл се каже да је конвергентан ако је $\lim_{A \to +\infty} F(A) \in \mathbb{R}$.

Геометријска интерпретација :



Пример



$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ гранична вредност пос-ди и коначна је

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A\to+\infty} \int_0^A \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A\to+\infty} \operatorname{arctg} A = \frac{\pi}{2}$$

$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ аналогно се дефинише $\left(= \lim_{A\to-\infty} \int_A^a f(x)\,dx\right)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{A'\to-\infty \\ A''\to+\infty}} \int_{A'}^{A''} f(x)\,dx \qquad \int_{A'}^{A''} f\,dx = \underbrace{\int_{A'}^{a} f\,dx + \int_{a}^{A''} f\,dx}_{\text{прво два типа}}$$

не зависи од избора a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f\,dx = \int_{-\infty}^{a} f\,dx + \int_{a}^{+\infty} f\,dx$$

Особине: $f: [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ ово топишено

1° Ако $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ конвергира $\Rightarrow \int_A^{+\infty} f(x)\,dx$ конвергира $\forall A > a$

2° Ако $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ конвергира $\Rightarrow \lim_{A\to+\infty} \int_A^{+\infty} f(x)\,dx = 0$

3° Ако $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ конвергира, $c\in\mathbb{R} \Rightarrow \int_a^{+\infty} cf(x)\,dx$ конвергира

4° Ако $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ конвергирају $\Rightarrow \int_a^{+\infty} (f\pm g)\,dx$ конвергира

Несвојствени интеграли ненегативне функције (нулчести случај)

$f: [a,+\infty) \to [0,+\infty)$

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A\to+\infty} \underbrace{\int_a^A f(x)\,dx}_{F(A)\,\to\,\text{не опада}} \qquad \lim_{A\to+\infty} F(A) \in \mathbb{R}$$

$$\Updownarrow$$

$$\exists L < +\infty : F(A) \leq L \quad \forall x \geq a$$

имамо за ненегативне ф-је.

Поредбени критеријум: Нека су $f, g: [a,+\infty) \to [0,+\infty)$ ненегативне функције и нека је $f(x) \leq g(x)$ на $[a,+\infty)$. Ако интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ конвергира $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ конвергира. Ако $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ дивергира $\Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ дивергира.

Доказ: $\int_a^A f\,dx \leq \int_a^A g\,dx < L$ - ограничено

исти резон као за редове! ∎

Последица: $f, g: [a,+\infty) \to (0,+\infty)$

и нека је $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k \qquad 0 < k < +\infty$

Тада су интеграли $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ еквиконвергентни. једновремено или оба конвергирају или оба дивергирају.

Доказ $\varepsilon > 0 \qquad \frac{f(x)}{g(x)} - k < \varepsilon$ за $x \geq x_0 > a$

$$f(x) < (k+\varepsilon)\,g(x) \quad \text{за } x \geq x_0$$

. $[a, x_0]$ - коначан интервал - имамо Риманов интеграл ∎

Пример: $a>0$ $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda}$

$$\int_a^A x^{-\lambda} dx = \frac{A^{1-\lambda} - a^{1-\lambda}}{1-\lambda}$$

$$\downarrow$$

$\lambda<1$ – дивергира $\quad \frac{a^{1-\lambda}}{\lambda-1}$ за $\lambda>1$

$$\lambda=1 \quad \int_a^A \frac{dx}{x} = \ln A - \ln a \to +\infty$$

дивергира

$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda} \to$ конвергира акко $\lambda>1$.

$f: [a,+\infty) \to [0,+\infty)$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^\lambda}} = k \quad (0<k<+\infty)$

тада $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ конвергира $\Leftrightarrow \lambda>1$.

$= \frac{1}{\lambda-1}$

Општа ситуација:

$f: [a,+\infty) \to \mathbb{R}$

$\int_a^{+\infty} f(x)dx \quad F(A) = \int_a^A f(x)dx$

општи критериум

Став (Коши): Интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ конвергира ако и само ако за свако $\varepsilon>0$ постоји $A_0 = A_0(\varepsilon)$ такво да за свако $A''>A'>$ важи $|F(A'')-F(A')|<\varepsilon$.

Директно из дефиниције

$$\left(A'' > A' > A_0 \Rightarrow \left| \int_{A'}^{A''} f(x)\,dx \right| < \varepsilon \right)$$ потпуна парпепа!

Задатак: $\lim_{x\to 1^-} \sqrt{1-x} \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2} = \lim_{x\to 1^-} \sqrt{1-x} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{n^2 \ln x}$

$1 ?$

$$\left(\int_1^{+\infty} x^{t^2}\,dt \right)$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

одличан пример: смена $x = e^{-h^2}$ $\boxed{h\to 0^+}$!

$e^{-h^2} = 1 - h^2$

$x \to 1^-$ кад $h \to 0^+$

датум: 7. 3. 2012.

Дефиниција: За функцију $f: [a,+\infty)$ кажемо да је апсолутно интеграбилна када $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ конвергира.

Став: Ако је ф-ја f апсолутно интеграбилна на $[a,+\infty)$ тада $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ конвергира.

Доказ: $a < A' < A''$

$$\left| \int_{A'}^{A''} f(x)\,dx \right| \le \int_{A'}^{A''} |f|\,dx < \varepsilon \quad \text{ако је } A'' > A' > A_0 = A_0(\varepsilon)$$

(због апсолутне конвергенције) по Кошијевом критеријуму ■

Теорема (Абел): $f, g: [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ да не би било прекида „горих" од прве врсте

1° f је интеграбилна на сваком $[a, A]$ и $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ конвергира

2° $g(x)$ је монотона и ограничена $(|g(x)| \le L \ \forall x \ge a)$

$\Rightarrow \int_a^{\infty} f(x)g(x)\,dx$ конвергира.

Може имати прекиде само прве врсте!!!

Доказ: $A'' > A' > a$

$\int_{A'}^{A''} f \cdot g\, dx$ – да ли тонтелно учини произволно малим

теорема о средњој вредности

$= g(A') \int_{A'}^{\xi} f(x)\,dx + g(A'') \int_{\xi}^{A''} f(x)\,dx$

$A' \le \xi \le A''$

$\left| \int_{A'}^{A''} fg\,dx \right| \le |g(A')| \left| \int_{A'}^{\xi} f\,dx \right| + |g(A'')| \left| \int_{\xi}^{A''} f\,dx \right| \le$

$\le L \left| \int_{A'}^{\xi} f\,dx \right| + L \left| \int_{\xi}^{A''} f\,dx \right| \le$

// како је $\int_a^{+\infty} f\,dx$ конвергентан $\Rightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists A_0 = A_0(\varepsilon))(\forall A', A'')$

$(A'', A' \ge A_0 \Rightarrow \left| \int_{A'}^{A''} f\,dx \right| < \varepsilon/2L)$ //

$\le L \frac{\varepsilon}{2L} + L \frac{\varepsilon}{2L} = \varepsilon.$

Испуњен је Кошијев критеријум конвергенције

$\Rightarrow$ конвергира ∎

$$|a+b| \leq |a| + |b| \quad !$$

Теорема (Дирихле): 1° Нека је f интеграбилна на сваком $[a, A]$ и постоји $L<\infty$: $\left|\int_a^A f\,dx\right| \leq L \quad \forall A \geq a$.

2° g монотоно конвергира ка 0 када $x \to +\infty$.

$$\Rightarrow \int_a^{+\infty} f \cdot g\,dx \text{ конвергира.}$$

Доказ: $\left|\int_{A'}^{A''} fg\,dx\right| \leq |g(A')| \left|\int_{A'}^{\xi} f\,dx\right| + |g(A'')| \left|\int_{\xi}^{A''} f\,dx\right|$

$$\int_{A'}^{\xi} f\,dx = \int_a^{\xi} f\,dx - \int_a^{A'} f\,dx$$

$$\left|\int_{A'}^{\xi} f\,dx\right| = \left|\int_a^{\xi} f\,dx - \int_a^{A'} f\,dx\right| \leq \left|\int_a^{\xi} f\,dx\right| + \left|\int_a^{A'} f\,dx\right| \leq 2L$$

$$\Rightarrow \left|\int_{A'}^{\xi} f\,dx\right| \leq 2L \quad \forall \xi \geq A' \geq a$$

сл-но $\left|\int_{\xi}^{A''} f\,dx\right| \leq 2L \quad \forall A'' \geq \xi \geq a$

Како $g(x) \to 0$ кад $x \to +\infty$

то је $|g(x)| < \dfrac{\varepsilon}{4L}$ за $x \geq x_0$

одаберемо $A'' > A' \geq x_0$

$$\left|\int_{A'}^{A''} fg\,dx\right| \leq \frac{\varepsilon}{4L} \cdot 2L + \frac{\varepsilon}{4L} \cdot 2L = \varepsilon \quad \blacksquare$$

Кошијев општи кр-еријум

Пример: $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ – Дирихлеов интеграл

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

$f(x) = \sin x$

$g(x) = \frac{1}{x}$

$$\int_0^A f\,dx = \int_0^A \sin x\,dx = -\cos x \Big|_0^A = 1 - \cos A$$

$$\left|\int_0^A f\,dx\right| \le 2 \text{ - ограничен}$$

$g(x) \rightrightarrows 0$

$\Rightarrow$ по Дирихлеовом критеријуму конвергира

Пример: $\int_0^{\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx$

$$\int_0^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx$$

уведемо смену

$x = (k-1)\pi + t$

$t \in (0,\pi)$

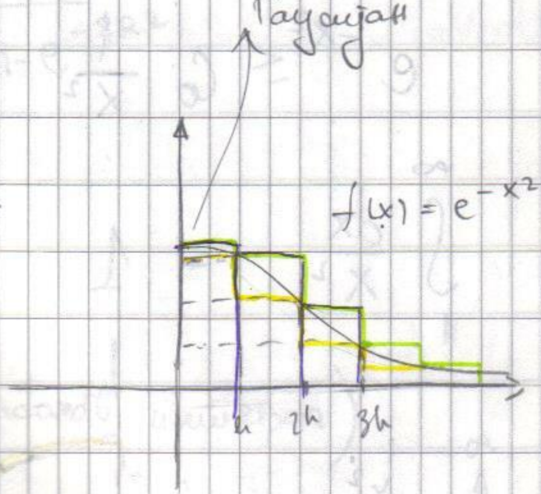
$$\sum_{k=1}^{n} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t+(k-1)\pi}\,dt > \sum_{k=2}^{n} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t+(k-1)\pi}\,dt$$

$$> \sum_{k=2}^{n} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{k\pi}\,dt =$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\pi} \int_0^{\pi} \sin t\,dt = \sum_{k=2}^{n} \frac{2}{\pi}\frac{1}{k} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \sim \frac{2}{\pi}\ln n$$

$$\int_0^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

Пример: $\lim\limits_{x\to1^-}\sqrt{1-x}\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x^{n^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$



$x = e^{-h^2}$ $\quad h>0$

$A = \lim\limits_{h\to0^+}\sqrt{1-e^{h^2}}\sum\limits_{1}^{\infty} e^{-(nh)^2}$

$1-e^{-h^2}\sim h^2$

$\lim\limits_{h\to0^+} h\cdot\sum\limits_{n=1}^{+\infty} e^{-(nh)^2}$ $\qquad e^{-h^2}\cdot h + e^{-(2h)^2}\cdot h + \dots < \int_0^\infty e^{-x^2}dx$

$1\cdot h + e^{-h^2}\cdot h + e^{-(2h)^2}\cdot h + \dots > \int_0^\infty e^{-x^2}dx$ $\qquad \boxed{h\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-(nh)^2} < \int_0^\infty e^{-x^2}dx}$ (*) по жутом

$h\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-(nh)^2} > \int_0^\infty e^{-x^2}dx - h$ (**) по зеленом

$\int_0^\infty e^{-x^2}dx - h < h\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-(nh)^2} < \int_0^\infty e^{-x^2}dx$ $\qquad \boxed{\forall h>0}$

$\downarrow$ када $h\to0^+$

$\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ $\qquad$ лема о два полицајца

$$\boxed{\lim\limits_{h\to0^+} h\sum\limits_{1}^{+\infty} e^{-(nh)^2} = \int_0^\infty e^{-x^2}dx}$$

$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \int_0^1 e^{-x^2}dx + \int_1^\infty e^{-x^2}dx$ $\qquad \frac{e^{-x^2}}{\frac{1}{x^2}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \Rightarrow$

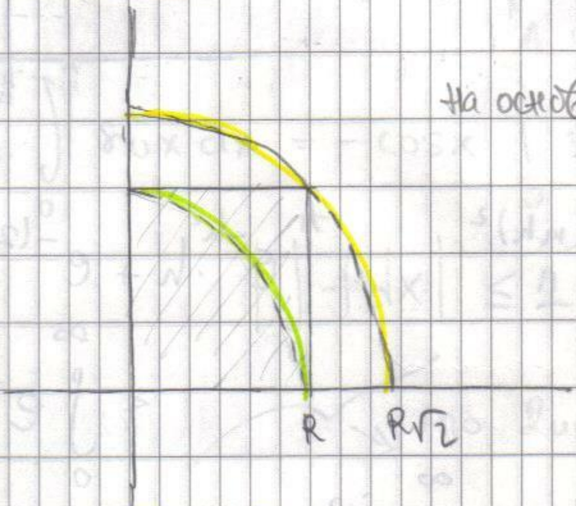
$\Rightarrow \exists\, C_0 < +\infty$

$$e^{-x^2} \le C_0 \frac{1}{x^2} \qquad \forall x \ge 1$$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = 1 \quad \text{конвергира} \quad \Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-x^2}dx \ \text{конвергира}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx$$

На основу поредбеног критеријума закључимо да конвергира



уведемо поларну смену да решимо!

$$\iint\limits_{\substack{x,y>0\\ x^2+y^2<R^2}} e^{-x^2-y^2}dxdy < \underbrace{\int_0^R\int_0^R e^{-x^2-y^2}dxdy}_{\|} < \iint\limits_{\substack{x,y>0\\ x^2+y^2<2R^2}} e^{-x^2-y^2}dxdy$$

$$\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-R^2}\right) < \left(\int_0^R e^{-x^2}dx\right)^2 < \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-2R^2}\right)$$

поларне смене $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$

$$\iint\limits_{\substack{x,y>0\\ x^2+y^2<a^2}} e^{-x^2-y^2}dxdy = \qquad dxdy = rdrd\varphi \ \text{(Јакобијан)} \qquad 0<r<a$$

$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^a e^{-r^2}rdrd\varphi = \frac{\pi}{2}\int_0^a re^{-r^2}dr =$$

$$= -\frac{\pi}{4}\int_0^a -2re^{-r^2}dr = -\frac{\pi}{4}e^{-r^2}\Big|_0^a = \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-a^2}\right)$$

коренујемо неједнакости

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{1-e^{-R^2}} < \int_0^R e^{-x^2}dx < \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{1-e^{-2R^2}}$$

$\boxed{R\to+\infty}$ $$\frac{\sqrt{\pi}}{2} < \int_0^{\infty} e^{-x^2}dx \le \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

пустимо лимес

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (\text{Ојлер – Пуасонов интеграл})$$

други случај

Случај коначног интервала кад подинтегрална ф-ја није ограничена

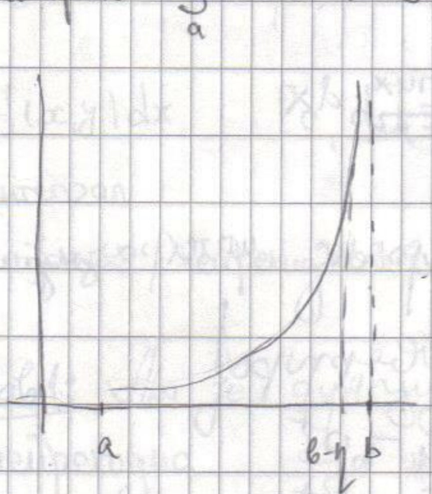
$[a,b]$ f ограничена на сваком $[a, b-\eta]$ $\eta>0$ $\left(\lim\limits_{x\to b-} f(x) = +\infty(-\infty)\right)$

Тачка b је сингуларна тачка.

Дефиниција: Ако постоји $\lim\limits_{\eta\to 0^+}\int_a^{b-\eta} f\,dx$ коначан или бесконачан

онда се назива несвојственим интегралом функције f по интервалу $[a, b]$ и означава $\int_a^b f\,dx$.

Ако је та гранична вредност коначна каже се да несвојствени интеграл $\int_a^b f\,dx$ конвергира

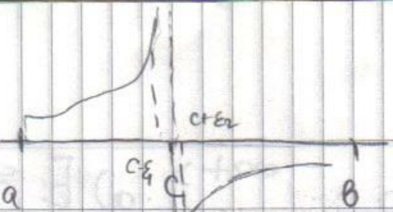


Пример: $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\eta\to 0^+}\int_0^{1-\eta}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \lim_{\eta\to 0^+} \arcsin x \Big|_0^{1-\eta} = \lim_{\eta\to 0^+} \arcsin(1-\eta) =$$

$$= \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$

Несвојствени интеграл је конвергентан.



$a < c < b$

и нека је c f интеграбилна на

сваком од интервала $[a, c-\varepsilon_1]$ и $[c+\varepsilon_2, b]$

$\forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$

$(c-\varepsilon_1 > a,\ c+\varepsilon_2 < b)$

$$\int_a^b f\,dx = \lim_{\substack{\varepsilon_1\to 0^+\\ \varepsilon_2\to 0^+}} \left(\int_a^{c-\varepsilon_1} f\,dx + \int_{c+\varepsilon_2}^b f\,dx\right) = \text{ако конвергира интеграл}$$

независно један од другог!

$$\boxed{\lim_{\varepsilon\to 0^+}} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f\,dx + \int_{c+\varepsilon}^b f\,dx\right) = \underbrace{v.p.\int_a^b f\,dx}_{\text{главна вредност интеграла}}$$

ако узмемо заједно да иде у 0!

може да се деси да v.p. постоји а да несвојствени не постоји

Пример $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\sin x}{x^2}\,dx$

$-1 \quad 0 \quad +1$

$$\int_{-1}^{-\varepsilon_1} \frac{\sin x}{x^2}\,dx + \int_{\varepsilon_2}^{1} \frac{\sin x}{x^2}\,dx$$

непарна ф-ја!

$$\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{\sin x}{x^2}\,dx + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{\sin x}{x^2}\,dx = 0$$

помоћу парцијалне интеграције не конвергира!

кад $\varepsilon_1 \to 0^+$, $\varepsilon_2 \to 0^+$

$$v.p.\int_{-1}^{1} \frac{\sin x}{x^2}\,dx = 0$$

ако постоји као несвојствен онда је једнак својој главној вредности

Теорема Коши: Нека је на интервалу $[a,b]$ тачка $x=b$ једина сингуларна тачка ф-је f. Тада интеграл $\int_a^b f\,dx$ конвергира акко

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall \eta_1,\eta_2>0)\left(\eta_1,\eta_2<\delta \Rightarrow \left|\int_{b-\eta_1}^{b-\eta_2} f\,dx\right| < \varepsilon\right)$$

Доказ: $F(\eta)=\int_a^{b-\eta} f\,dx$

$$\left|\int_{b-\eta_1}^{b-\eta_2} f\,dx\right| = |F(\eta_1)-F(\eta_2)| < \varepsilon$$

Само применимо Кошијев услов за постојање границе ∎

Последица: $\int_a^b |f|\,dx$ конвергира $\Rightarrow \int_a^b f\,dx$ конвергира.

Правила парцијалне интеграције, смене променљивих се преносе, јер смо ми интеграле свели на Риманове. (само пуштамо lim)

- Интеграли који зависе од параметра -

(има у књизи) (3. питање)

Нека је дат правоугаоник $\Pi=\{(x,y): a\le x\le b,\ c\le y\le d\}$, $f:\Pi\to\mathbb{R}$. Претпоставимо да за свако $y\in[c,d]$ постоји

$$\int_a^b f(x,y)\,dx \qquad [c,d]\ni y \longmapsto \int_a^b f(x,y)\,dx = I(y)$$ - параметарски интеграл

Питања непрекидности и диференцијабилности.

Став 1: Ако је функција $f\in C(\Pi)$ тада је $I(y)=\int_a^b f(x,y)\,dx$ непрекидна ф-ја на $[c,d]$.

Доказ: $y_0\in[c,d]$

$$\lim_{y\to y_0} I(y) = I(y_0) \ ?$$ питамо се да ли ово важи

$$I(y) - I(y_0) = \int_a^b (f(x,y) - f(x,y_0))\, dx$$

$$|I(y) - I(y_0)| \le \int_a^b |f(x,y) - f(x,y_0)|\, dx$$

<u>Теорема Кантор</u>: $f \in C(\Pi) \Rightarrow f$ је равномерно непрекидна на $\Pi \Leftrightarrow (\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \Pi)$ $\left(d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) < \delta \Rightarrow |f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| < \frac{\varepsilon}{b-a}\right)$.

$(x_1,y_1) \to (x,y)$ $\quad (x_2,y_2) \to (x,y_0)$

морамо се позвати на теорему Кантора (равномерна непрекидност на компактном скупу)

$$d((x,y),(x,y_0)) = \sqrt{(x-x)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$$

тачке са исте вертикале

$$|y-y_0| < \delta$$

Ако је $|y-y_0| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - f(x,y_0)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ $\quad \forall x \in [a,b]$

$$|I(y) - I(y_0)| < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\, dx = \varepsilon$$

чим је $|y-y_0| < \delta \Rightarrow \lim_{y\to y_0} I(y) = I(y_0)$

$\Rightarrow I(y)$ је непрекидна на $[c,d]$ ■

датум: 12.3.2012

$\Pi = \{(x,y) : a \le x \le b, \quad c \le y \le d\}$

$f \in C(\Pi)$

$[c,d] \ni y \longmapsto \int_a^b f(x,y)\,dx = I y$

$T: \quad I \in C[c,d]$

какви се то услови могу наметнути на f да $I(y)$ буде диференцијабилна?

Теорема: $f \in C(\Pi)$ и постоји $\frac{\partial f}{\partial y}$ на Π и $\frac{\partial f}{\partial y} \in C(\Pi)$ тада је функција I диференцијабилна на $[c,d]$ и $I'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}\,dx$.

Доказ: $I(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$

$$\frac{I(y+\Delta y) - I(y)}{\Delta y} = \int_a^b \frac{f(x,y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}\,dx \;=$$

извод по деф. кад и пустим $\Delta y \to 0$

Према теореми Лагранжа: $\frac{f(x,y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y+\theta\Delta y)$, $0 < \theta < 1$

$$\frac{f(x,y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y+\theta\Delta y) \qquad 0<\theta<1$$

$$= \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y+\Delta y\cdot\theta)\,dx$$

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{I(y+\Delta y) - I(y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y+\theta\Delta y)\,dx =$$

(на основу претходне теореме) $\frac{\partial f}{\partial y} \in C(\Pi)$

$$= \int_a^b \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y+\theta\Delta y)\,dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}\,dx$$

$$I'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}\,dx$$

$$I(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx$$ како нати вредности извода?

$$\frac{d}{dx}\int_c^x f(t)\,dt = f(x)$$

$$\frac{d}{dx}\int_x^c f(t)\,dt = -f(x)$$

$$I = I(y, a(y), b(y))$$

$$I'(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial f}{\partial y}\,dx + \frac{\partial I}{\partial a}\frac{da}{dy} + \frac{\partial I}{\partial b}\frac{db}{dy} =$$

$$= \int_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial f}{\partial y}\,dx - f(a(y), y)\cdot a'(y) + f(b(y), y)\cdot b'(y)$$

$$\Big[\frac{d}{dy}\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx = \int_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial f}{\partial y}\,dx + f(b(y), y)\cdot b'(y) - f(a(y), y)\cdot a'(y)\Big]$$

Битна формула!

Пример: Да ли може да се употреби за рачунање неких компликованих интеграла

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx$$ Уведемо параметар на следећи начин

$$I(y) = \int_0^{\alpha} \frac{\ln(1+\alpha x)}{1+x^2}\,dx$$

$\underline{\alpha = 1}$ – наша ситуација

$$\alpha \geq 0 \qquad I'(\alpha) = \int_0^{\alpha} \frac{x}{(1+\alpha x)(1+x^2)}\,dx + \frac{\ln(1+\alpha^2)}{1+\alpha^2}$$

$$I'(\alpha) = \ ?$$

$$\frac{x}{(1+\alpha x)(1+x^2)} = \frac{A}{1+\alpha x} + \frac{Bx+C}{1+x^2}$$ разбијање на прости резломке

$$A(1+x^2) + (Bx+C)(1+\alpha x) = x$$

$$\underline{A} + Ax^2 + Bx + \alpha Bx^2 + \underline{C} + \alpha Cx = x$$

$$A + C = 0 \qquad C = -A$$
$$A + \alpha B = 0 \qquad A + \alpha B = 0 \;/\alpha$$
$$B + \alpha C = 1 \qquad B - \alpha A = 1$$

$$B(1+\alpha^2) = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{1+\alpha^2}$$

$$A = -\frac{\alpha}{1+\alpha^2}$$

$$C = \frac{\alpha}{1+\alpha^2}$$

$$\int_0^\alpha \frac{-\alpha\, dx}{(1+\alpha^2)(1+\alpha x)} + \int_0^\alpha \frac{1}{1+\alpha^2}\left(\frac{x+\alpha}{1+x^2}\right)dx + \frac{\ln(1+\alpha^2)}{1+\alpha^2} =$$

$$= -\frac{1}{1+\alpha^2}\ln(1+\alpha x)\Big|_0^\alpha + \frac{1}{2(1+\alpha^2)}\ln(1+x^2)\Big|_0^\alpha + \frac{\alpha}{1+\alpha^2}\operatorname{arctg} x\Big|_0^\alpha + \frac{\ln(1+\alpha^2)}{1+\alpha^2} =$$

$$= \cancel{-\frac{1}{1+\alpha^2}\ln(1+\alpha^2)} + \frac{1}{2(1+\alpha^2)}\ln(1+\alpha^2) + \frac{\alpha}{1+\alpha^2}\operatorname{arctg}\alpha$$

$$\cancel{+\frac{\ln(1+\alpha^2)}{1+\alpha^2}} = \frac{1}{2(1+\alpha^2)}\ln(1+\alpha^2) + \frac{\alpha}{1+\alpha^2}\operatorname{arctg}\alpha$$

$$I'(\alpha) = \frac{1}{2(1+\alpha^2)}\ln(1+\alpha^2) + \frac{\alpha}{1+\alpha^2}\operatorname{arctg}\alpha =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\ln(1+\alpha^2)}{1+\alpha^2} + \frac{2\alpha}{1+\alpha^2}\operatorname{arctg}\alpha\right) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg}\alpha \cdot \ln(1+\alpha^2)\right)'$$

$$I'(\alpha) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg}\alpha \cdot \ln(1+\alpha^2)\right)'$$

$$I(\alpha) = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\alpha \cdot \ln(1+\alpha^2) + C$$

$$I(0) = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$\int_0^{\alpha} \frac{\ln(1+\alpha x)}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\alpha \cdot \ln(1+\alpha^2), \quad \alpha \geq 0$$

$$\underline{\underline{\alpha = 1}} \quad \frac{1}{2}\operatorname{arctg}1 \cdot \ln 2 = \boxed{\frac{\pi}{8}\ln 2}$$

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{8}\ln 2$$ (има неке користи од параметарских интеграла)

Пример: $-1 < a < 1$

$$I(a) = \int_0^{\pi/2} \ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\,\frac{dx}{\cos x}$$

$\ln(1 \pm a\cos x)$ – па де историчито редове има много посла

Треба наћи извод!

у десном крају дефинише као да је невођен $\int_0^{\pi/2} \cos^4 x\,dx$

$$\lim_{x \to \pi/2 - 0} \ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\,\frac{1}{\cos x} = \lim_{t \to 0^+} \ln\frac{1+at}{1-at}\cdot\frac{1}{t} =$$

смена $\cos x = t$

$$= \lim_{t\to 0^+} \left(\frac{\ln(1+at)}{at} a - \frac{\ln(1-at)}{-at}(-a) \right) = 2a$$ – тачно да додефинишемо

$$f(x,a) = \begin{cases} \ln \dfrac{1+a\cos x}{1-a\cos x} \cdot \dfrac{1}{\cos x}, & 0 \le x < \pi/2 \\ 2a, & x = \pi/2 \end{cases}$$

$$f \in C\left([0, \pi/2] \times [-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]\right) \quad 0<\varepsilon<1$$

$$I(a) = \int_0^{\pi/2} f(x,a)\,dx$$

Да ли има непрекидан извод по a?

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{1}{\cos x}\left(\frac{1}{1+a\cos x}\cos x - \frac{1}{1-a\cos x}(-\cos x) \right)$$

$$= \frac{1}{\cos x}\left(\frac{\cos x}{1+a\cos x} + \frac{\cos x}{1-a\cos x} \right) =$$

$$= \frac{1}{1+a\cos x} + \frac{1}{1-a\cos x} =$$

$$= \frac{1-a\cos x + 1 + a\cos x}{1-a^2\cos^2 x} = \boxed{\frac{2}{1-a^2\cos^2 x}}$$

$$I'(a) = \int_0^{\pi/2} \frac{2\,dx}{1-a^2\cos^2 x}$$

$$\operatorname{tg} x = t \qquad \frac{\sin x}{\cos x} = t$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{2\,dt}{(1+t^2)\left(1 - a^2\frac{1}{1+t^2}\right)} = \int_0^{+\infty} \frac{2\,dt}{1+t^2-a^2} = 2\int \frac{dt}{1-a^2+t^2}$$

љо је непрекидна

$$dt = \frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$t^2\cos^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

$$\cos^2 x\,(1+t^2) = 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$$

смена

$$2\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1-a^2+t^2} \qquad t=\sqrt{1-a^2}\cdot y$$

$$2\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{1-a^2}\,dy}{(1-a^2)(1+y^2)}=\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}\cdot 2\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}$$

$$I'(a)=\frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}$$

$$I(a)=\pi\arcsin a + C$$

$$I(0)=0 \Rightarrow C=0$$

$$\Rightarrow \boxed{I(a)=\pi\arcsin a}$$

Анализирали смо непрекидност и диференцијабилност ф-је

$I(y)=\int_a^b f(x,y)\,dx \qquad y\in[c,d]$

интеграбилност:

Теорема: Ако је $f\in C(\Pi) \Rightarrow I\in C[c,d]$ $\quad \int_c^d I(y)\,dy=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)\,dx=$

$=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy \;\left(=\iint_\Pi f(x,y)\,dx\,dy\right).$ ∎ аналогон Фубинијеве теореме

добијамо је у промени редоследа интеграције.

пример:

$I(y)=\int_a^b y^x\,dx \qquad 0<a<b$

$$I(y)=\frac{y^x}{\ln y}\Big|_a^b=\frac{y^b-y^a}{\ln y}$$

$$\int_0^1 I(y)\,dy=$$

$$=\int_0^1\frac{y^b-y^a}{\ln y}\,dy$$

$$\int_0^1 dy \int_a^b y^x\,dx = \int_a^b dx \int_0^1 y^x\,dy = \int_a^b dx \left(\frac{y^{x+1}}{x+1} \Big|_0^1 \right) =$$

$$= \int_a^b \frac{dx}{x+1} = \ln \frac{b+1}{a+1}.$$

3 теореме: о непрекидности, постојању извода и интеграбилност

Несвојствени параметарски интеграли (као функционални редова)

(питање 4.)

мора се дефинисати појам равномерне конвергенције

Означимо са $\Pi_\infty = \{(x,y) : x \geq a,\ c \leq y \leq d\}$ „правоугаоник" на коме сада радимо

$f : \Pi_\infty \to \mathbb{R}$

претпоставка: $\forall y \in [c,d]$ $\int_a^\infty f(x,y)\,dx$ конвергира

$$[c,d] \ni y \longmapsto I(y) = \int_a^\infty f(x,y)\,dx$$

1° кад је I непрекидна на $[c,d]$

2° кад је I диференцијабилна на $[c,d]$ и колики је њен извод

3° кад је I интеграбилна на $[c,d]$

• ово није најопштија ситуација, мада су све ситуације аналогне

равномерне конвергенције

Дефиниција: За несвојствени параметарски интеграл $I(y) = \int^\infty f(x,y)\,dx$ се каже да равномерно конвергира по $y \in [c,d]$ ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји $A = A(\varepsilon)$ такво да за свако $B \geq A$ и $\forall y \in [c,d]$ важи $\left| \int_B^{+\infty} f(x,y)\,dx \right| < \varepsilon$

($\sum f_n(x)$ $[c,d]$
$\forall \varepsilon > 0$ постоји $n_0 = n_0(\varepsilon)$ тако да за свако $n \geq n_0$
конв. $\forall x \in [c,d]$ $\forall x \in [c,d]$ $\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right| < \varepsilon$)

Теорема

(Кошијев критеријум за равномерну конвергенцију)

$\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ конвергира равномерно по $y\in[c,d]$ акко

$\forall \varepsilon>0$ постоји $A_0=A_0(\varepsilon)$ такво да за свако $B>A\geq A_0$ и свако $y\in[c,d]$ важи $\left|\int_A^B f(x,y)\,dx\right|<\varepsilon$. ■

// еквивалентно са дефиницијом // раздвојимо на $\int_A^{+\infty} + \int_B^{+\infty}$

Теорема (Вајерштрас): Ако је $f:\Pi_\infty\to\mathbb{R}$ таква да постоји функција g са особином $|f(x,y)|\le g(x)$ $\forall x\ge a$ $\forall y\in[c,d]$ и таква да интеграл $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ конвергира тада $\int_a^{\infty} f(x,y)\,dx$ конвергира равномерно по $y\in[c,d]$.

Доказ: директно из Коши

$$\left|\int_A^B f(x,y)\,dx\right| \le \int_A^B |f|\,dx \le \int_A^B g\,dx < \varepsilon \quad \forall B\ge A\ge A_0$$

обична „нумеричка"

на основу КК $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$

Кошијевог критеријума

еквивалентно са разбијањем ■

датум: 14. 3. 2012. године

доказ – тачнијно конвергенције довода за функционалне редове

$$\Pi_\infty = \{(x,y) : x \geq a, \ c \leq y \leq d\}$$

$f : \Pi_\infty \to \mathbb{R}$

дајемо само тврђења

погледати доказе из математике 3!!!

Т1: Нека је $f \in C(\Pi_\infty)$ и $\int_a^\infty f(x,y)dx$ конвергира униформно по $y \in [c,d]$. Тада је $I(y) = \int_a^\infty f(x,y)dx$ непрекидна функција на $[c,d]$.

Т2: Нека је $f \in C(\Pi_\infty)$ и $\int_a^\infty f(x,y)dx$ конвергира униформно по $y \in [c,d]$ тада је $\int_c^d I(y)dy = \int_c^d dy \int_a^\infty f(x,y)dx = \int_a^\infty dx \int_c^d f(x,y)dy$.

Т3: Нека је $f, \frac{\partial f}{\partial y} \in C(\Pi_\infty)$ и нека $\int_a^\infty f(x,y)dx$ конвергира $\forall y \in [c,d]$ и $\int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y} dx$ конвергира равномерно по $y \in [c,d]$. Тада је $I(y)$ диференцијабилна функција на $[c,d]$ и важи $I'(y) = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y} dx$.

Пример: $I(y) = \int_0^\infty \underbrace{e^{-xy} \frac{\sin x}{x}}_{f(x,y)} dx, \ y \geq 0$ није израчунљив преко елементарних ф-ја

$y = 0$ он конвергира $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

$y > 0$ $\left| e^{-xy} \frac{\sin x}{x} \right| \leq e^{-xy} \left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq e^{-xy}$

$$\int_0^\infty e^{-xy} dx = \frac{1}{y} \text{ конвергира}$$

$y \geq c > 0$ $\left| e^{-xy} \frac{\sin x}{x} \right| \leq e^{-cx}$ Т3 $\int_0^\infty e^{-cx} dx = \frac{1}{c}$

$\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| = \left| e^{-xy} \sin x \right| \leq e^{-xy} \leq e^{-cx}$ По теореми Вајерштраса

$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial y} dx$ рав. кв. $\Rightarrow \int_0^\infty e^{-xy} \frac{\sin x}{x} dx$ је диф. ф-ја на $(0, +\infty)$

$$J'(y) = -\int_0^\infty e^{-xy}\sin x\,dx = -\mathrm{Im}\int_0^\infty e^{-xy+ix}\,dx = -\mathrm{Im}\int_0^\infty e^{-x(y-i)}\,dx =$$

$$= -\mathrm{Im}\,\frac{1}{y-i} = -\mathrm{Im}\,\frac{y+i}{1+y^2} = \boxed{-\frac{1}{1+y^2}} \qquad \int_0^\infty e^{-ax}\,dx = \frac{1}{a}$$

$$J(y) = -\operatorname{arctg} y + C$$

Закључак:

$$J(y) = \int_0^\infty e^{-yx}\frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} y$$

$\forall y > 0$

Треба открити C

$$J(y) = \int_0^\infty e^{-yx}\frac{\sin x}{x}\,dx$$

$$|J(y)| \le \int_0^\infty e^{-yx}\,dy = \frac{1}{y} \xrightarrow[y\to+\infty]{} 0$$

$$\lim_{y\to+\infty} J(y) = -\lim_{y\to+\infty}\operatorname{arctg} y + C$$

$$0 = -\frac{\pi}{2} + C \Rightarrow \boxed{C = \frac{\pi}{2}}$$

Мало општије тврђење:

Лема: Нека је $a \ge 0$, f непрекидна на $[a,+\infty)$, $\int_a^\infty f(x)\,dx$ конвергира, тада $\int_a^\infty e^{-xy}f(x)\,dx$ конвергира равномерно на $[a,+\infty)$ и даље ф-ја $[0,+\infty) \ni y \longmapsto \int_a^\infty e^{-xy}f(x)\,dx$ је непрекидна.

Доказ: $\int_\alpha^\beta e^{-xy}f(x)\,dx$ треба испитати

монотона, непрекидна

$\beta > \alpha$

Применимо теорему о средњој вредности:

$$\int_\alpha^\beta e^{-xy}f(x)\,dx = \left| e^{-\alpha y}\int_\alpha^\xi f(x)\,dx + e^{-\beta y}\int_\xi^\beta f(x)\,dx \right| \quad \alpha \le \xi < \beta$$

$f(x,y) = e^{-xy} f(x)$ је непрекидна ф-ја

применa теореме о средњој вредности

узмемо $\left|\int_\alpha^\beta e^{-xy} f(x)dx\right| = \left|e^{-\alpha y}\int_\alpha^\xi f(x)dx + e^{-\beta y}\int_\xi^\beta f(x)dx\right| \le$

$\le e^{-\alpha y}\left|\int_\alpha^\xi f dx\right| + e^{-\beta y}\left|\int_\xi^\beta f dx\right| \le \left|\int_\alpha^\xi f dx\right| + \left|\int_\xi^\beta f dx\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$\forall y \ge 0$ КВ равномерно

$\overset{T1}{\Rightarrow} \int_a^\infty e^{-xy} f(x)dx$ је непрекидна ф-ја. ∎

$e^{-\alpha y} \le 1 \quad e^{-\beta y} \le 1$

$y \ge 0$

$\alpha, \beta > 0$

$$* \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

$J(y)$ је непрекидна ф-ја на $[0,+\infty)$

$\lim_{y\to 0^+} J(y) = J(0) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ $\qquad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \lim_{y\to 0^+} J(y) = \lim_{y\to 0^+}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} y\right) = \frac{\pi}{2}$ *

Пример: $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^n}$ могло би да се уради из[р]ичем рекурентне формуле

$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+\lambda)^n}$, $\lambda > 0$ $(\lambda \ge \lambda_0 > 0)$ – узели смо параметар

$J(\lambda) = \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+\lambda}$ да ли смемо да диференцирамо

$\frac{1}{x^2+\lambda} \le \frac{1}{x^2+\lambda_0}$ $\qquad \int_0^\infty \frac{1}{x^2+\lambda_0}dx < \infty$ $\qquad$ можемо

$x = \sqrt{\lambda}\, t$

$J' = \int_0^\infty \frac{-1}{(x^2+\lambda)^2}dx$ $\qquad \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+\lambda} = \int_0^\infty \frac{\sqrt{\lambda}\,dt}{\lambda(t^2+1)} =$

$J^{(n-1)} = \int_0^\infty \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x^2+\lambda)^n}dx$ $\qquad = \lambda^{-1/2}\frac{\pi}{2}$

$(-1)^{n-1}(n-1)!\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+\lambda)^n} = \frac{\pi}{2}\left(\lambda^{-1/2}\right)^{(n-1)}\Big|_{\lambda=1}$ средимо и крај!

Пример:

Идеја рачунања Ојлер-Поасоновог интеграла

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{dx}{(1+\frac{x^2}{n})^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n^n \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+n)^n}$$

!2 Важна параметарска интеграла : Ојлерови интеграли БЕТА и ГАМА функција и њихова својства (важно)

питање 5.

* Гама функција

добро дружење

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$$

када конвергира два несвојствена

$$\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt + \int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$$

посматрамо дефинисаности односно област конвергенције

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{t^{x-1}e^{-t}}{t^{x-1}} = 1$$

$$\int_0^1 t^{x-1}dt = \frac{t^x}{x}\Big|_0^1$$ биће конвергентан за $x>0$

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{t^{x-1}e^{-t}}{e^{-t/2}} = 0 \Rightarrow$$

$$\exists M<\infty : t^{x-1}e^{-t} \le Me^{-t/2} \qquad t\ge 1$$

$$\int_1^\infty Me^{-t/2}dt < +\infty$$ конвергира за $\forall x$

1) $\Gamma(x)$ дефинисана је $\forall x>0$

$\int_0^\infty t^{x-1} \ln t \, e^{-t} \, dt$ конвергира равномерно $\forall x \geq c > 0$

2) $\Gamma(x)$ је бесконачно диференцијабилна на $(0,+\infty)$

$$\Gamma'(x) = \int_0^\infty t^{x-1} \ln t \, e^{-t} dt$$

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^\infty t^{x-1} (\ln t)^n e^{-t} dt$$

3) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \qquad x>0$

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t} dt = \int_0^\infty t^x d(-e^{-t}) = \underbrace{\cancel{t^x(-e^{-t})}\Big|_0^\infty}_{0} - \int_0^\infty -e^{-t} x t^{x-1} dt = x\Gamma(x)$$

$n = 0, 1, 2$

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = n(n-1)\cdots 2\cdot 1\ \Gamma(1) = n!$$

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1$$

$\Gamma(n+1) = n!$ — гама ф-ја продужава појам факторијела

Стирлингова формула: $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}, \ n \to \infty$

Може да се покаже да важи:

4) $\Gamma(x+1) \sim \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{2\pi x} \quad \overbrace{(\qquad\qquad)}^{\text{асимптотски}}$

$x \to +\infty$

Ред са негативним степенима

5.) $x \longmapsto \ln\Gamma(x)$ је конвексна

треба проверити шта је десно са другим изводом

$$\left(\ln\Gamma(x)\right)'' = \left(\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}\right)' = \frac{\Gamma''(x)\Gamma(x) - \Gamma'^2(x)}{\Gamma^2(x)}$$

да ли је тачно : $\Gamma''(x)\Gamma(x) - \Gamma'^2(x) \geq 0$ на $(0,+\infty)$

$$\Gamma'(x) = \int_0^\infty t^{x-1} \ln t \, e^{-t} dt$$

$$\Gamma'^2(x) = \left(\int_0^\infty t^{x-1} \ln t \, e^{-t} dt\right)^2 = \left(\int_0^\infty t^{\frac{x-1}{2}} e^{-t/2} \cdot t^{\frac{x-1}{2}} e^{-t/2} \ln t \, dt\right)^2$$

$$\leq \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} \ln^2 t \, dt = \Gamma(x) \cdot \Gamma''(x)$$

што је тачно

// $\left(\int fg\right)^2 \leq \int f^2 dx \int g^2 dx$ неједнакост Кошија //

6.) $0 < a < 1$ $\quad \Gamma(a)\Gamma(1-a) = \dfrac{\pi}{\sin a\pi}$ важни код ј дели страна дефинисани само за цео број!

Пример: $E = \prod_{k=1}^{n-1} \Gamma\left(\frac{k}{n}\right) =$

$$E^2 = \prod_{k=1}^{n-1} \Gamma\left(\frac{k}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{k}{n}\right) = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{\pi}{\sin \pi\left(\frac{k}{n}\right)} = \frac{\pi^{n-1}}{\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n}}$$

$z^n - 1 = 0$

$\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ $\quad 1, \; e^{\frac{2\pi i k}{n}}, \; k = 0, 1, \ldots, n-1$ примена Моаврове формуле

$$z^n - 1 = (z-1)\prod_{1}^{n-1}\left(z - e^{2\pi i\frac{k}{n}}\right)$$

$$\frac{z^n - 1}{z-1} = \prod_{1}^{n-1}\left(z - e^{\frac{2\pi i k}{n}}\right)$$

$$1 + z + \dots + z^{n-1} = \prod^{n-1}\left(z - e^{\frac{2\pi i k}{n}}\right)$$

$$n = \prod^{n-1}\left(1 - e^{2\pi i k/n}\right)$$

$$n = \prod_{1}^{n-1}\left|1 - e^{2\pi i k/n}\right|$$

$*$ $1 - e^{\frac{2\pi i k}{n}} =$

$$= 1 - \cos\frac{2\pi k}{n} - i\sin\frac{2\pi k}{n} =$$

$$= 2\sin^2\frac{\pi k}{n} - i\,2\sin\frac{k\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n} =$$

$$= 2\sin\frac{\pi k}{n}\left(\sin\frac{\pi k}{n} - i\cos\frac{k\pi}{n}\right)$$

узимајући $*$ $\left|1 - e^{2\pi i k/n}\right| = 2\sin\frac{\pi k}{n}$ $*$

$$n = \prod_{1}^{n-1} 2\sin\frac{\pi k}{n}$$

производ sin ...

$$\frac{n}{2^{n-1}} = \prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}$$

$$E^2 = \frac{\pi^{n-1}\cdot 2^{n-1}}{n} \Rightarrow E = \sqrt{\frac{(\pi 2)^{n-1}}{n}}$$

задатак: $\prod_{k=0}^{n-1}\sin\left(x + \frac{k\pi}{n}\right) = \frac{\sin nx}{2^{n-1}}$ // уопштење

$n = 2$

$$\sin x \cdot \cos x = \frac{\sin 2x}{2}$$

како доказати

$$z^n - e^{in\varphi} = 0 \quad \text{полином}$$

$$a = \tfrac{1}{2} \quad \Gamma^2\left(\tfrac{1}{2}\right) = \pi \qquad \int_0^{+\infty} t^{-1/2} e^{-t}\,dt = \sqrt{\pi} \qquad // \int_0^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \qquad \text{смена } t = x^2 \quad \int_0^{+\infty} x^{-1} e^{-x^2}\, 2x\,dx = \sqrt{\pi}$$

7) Лежандрова дупликациона формула

$$\Gamma(x)\,\Gamma(x+1/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}}\,\Gamma(2x),\ x>0$$

мало сложенија са n - Гаусова формула

датум: 19.3.2012

Бета функција

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt = \int_0^{1/2} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt + \underbrace{\int_{1/2}^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt}$$

$\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t^{x-1}(1-t)^{y-1}}{t^{x-1}} = 1$ по поредбеном критеријуму овај

интеграл је еквиконвергентан са $\int_0^{1/2} t^{x-1}\,dt = \frac{t^x}{x}\Big|_0^{1/2}$

конвергира за $x>0$

аналогно конвергира за $y>0$

1° $B(x,y)$ $x>0,\ y>0$ дефинисаност

смена $t=1-s$, $s\in(1,0)$

2°

$$B(x,y) = \int_1^0 (1-s)^{x-1}\cdot(1-(1-s))^{y-1}(-ds) = \int_0^1 s^{y-1}(1-s)^{x-1}\,ds = B(y,x)$$

Бета функција је симетрична.

3° $B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$ смена: $t=\frac{u}{1+u}$, $u\in(0,+\infty)$

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{u}{1+u}\right)^{x-1}\left(1-\frac{u}{1+u}\right)^{y-1}\frac{du}{(1+u)^2} = \int_0^{+\infty}\frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\,du$$

* 4° $B(x,y) = \dfrac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$

успостављање везе између $\Gamma(x)$ и $B(x,y)$

биће нам неопходно

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \cdot \int_0^\infty s^{y-1} e^{-s} ds = , \quad s = t\cdot u$$

$$= \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \int_0^\infty t^{y-1} u^{y-1} e^{-t\cdot u}\, t\, du = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \int_0^\infty t^{y} u^{y-1} e^{-tu} du =$$

$$= \int_0^\infty t^{x+y-1} e^{-t} dt \int_0^\infty u^{y-1} e^{-t\cdot u} du = \int_0^\infty u^{y-1} du \int_0^\infty t^{x+y-1} e^{-t(1+u)} dt =$$

// каков год да имамо поновљени интеграл - а подинтегрална функција ненегативна ми по Фубинијевој теореми можемо да заменимо редослед интеграција!

$$\left[t(1+u) = s \Rightarrow t = \frac{s}{1+u} \right] \underset{\text{смена}}{} = \int_0^\infty u^{y-1} du \int_0^\infty \left(\frac{s}{1+u}\right)^{x+y-1} e^{-s} \frac{ds}{1+u} =$$

$$= \int_0^\infty \frac{u^{y-1}}{(1+u)^{x+y}} du \int_0^\infty s^{x+y-1} e^{-s} ds = B(y,x)\,\Gamma(x+y) =$$

на основу 3°

$$= B(x,y)\,\Gamma(x+y)$$

на основу 2° (симетричност)

5° $$\Gamma(a)\Gamma(1-a) \overset{\text{на основу } 4^\circ}{=} B(a,1-a)\,\Gamma(a+1-a) \overset{0!=1}{=} B(a,1-a) = \int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{1+t} dt$$

$0<a<1$ на основу 3°

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{1+t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}\, dx}{1+e^x}$$

смена $t = e^x \quad dt = e^x dx$

$x \in (-\infty, +\infty)$

доказаћемо касније техником.

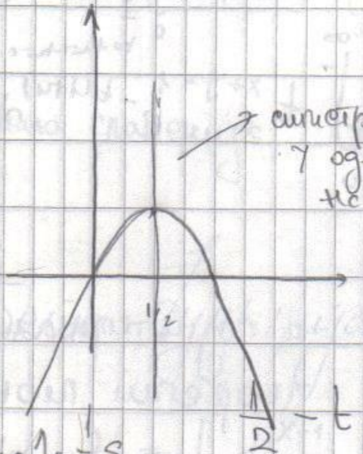
$$0<a<1 \quad \Gamma(a)\Gamma(1-a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx \left(= \frac{\pi}{\sin a\pi} \right)$$

формула допуњавања

$\alpha > 0$

6° $B(\alpha,\alpha) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\alpha-1}\,dt = \int_0^1 (t-t^2)^{\alpha-1}\,dt =$

парабола



симетрична у односу на $t = 1/2$

$= 2\int_0^{1/2} (t-t^2)^{\alpha-1}\,dt =$

$= 2\int_0^{1/2} \left(\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - t\right)^2\right)^{\alpha-1} dt =$

смена 1: $\frac{1}{2}s =$

$= \cancel{2}\int_1^0 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}s^2\right)^{\alpha-1}(-ds)\cdot\frac{1}{\cancel{2}} =$

$= \int_0^1 \left(\frac{1}{4}\right)^{\alpha-1}(1-s^2)^{\alpha-1}\,ds = \int_0^1 \frac{1}{4^{\alpha-1}}(1-x)^{\alpha-1}\frac{dx}{2\sqrt{x}} =$

смена 2: $s = \sqrt{x}$

$ds = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$

$= \frac{1}{2^{2\alpha-1}}\int_0^1 x^{1/2-1}(1-x)^{\alpha-1}\,dx =$

$= \frac{1}{2^{2\alpha-1}}B\left(\frac{1}{2},\alpha\right) = \frac{1}{2^{2\alpha-1}}\frac{\Gamma(1/2)\cdot\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})} =$

особините 4

$= \frac{1}{2^{2\alpha-1}}\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+1/2)}$

$\frac{\Gamma^{2}(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)} = \frac{1}{2^{2\alpha-1}}\frac{\sqrt{\pi}\,\cancel{\Gamma(\alpha)}}{\Gamma(\alpha+1/2)}$

$B(\alpha,\alpha) = \frac{\Gamma^2(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)}$

$\Rightarrow \Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+1/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2\alpha-1}}\Gamma(2\alpha),\ \alpha>0$

Лежандрова дупликациона формула

$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ сводиле на Ојлер - Поасонов интеграл

$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$

$\Gamma(n+1/2)$ - израчунљиво у целом облику

Задаци:

1. $\int_0^1 x^3\sqrt{1-x^3}\,dx$

2. $\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n}$

3. $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n}$

4. $\int_0^{\pi/2} (tg\,x)^a\,dx$ — само рачун тази!!!

5. $\int_0^\infty \frac{x^{-1/2}\ln^2 x\,dx}{1+x}$

Свак и сведе на неки познати

решења: 1. $\int_0^1 x\sqrt[3]{1-x^3}\,dx = \int_0^1 x(1-x^3)^{1/3}dx =$ $\quad x^3 = t$, $x = t^{1/3}$, $dx = \frac{1}{3}t^{-2/3}dt$

$= \int_0^1 \frac{1}{3} t^{1/3}(1-t)^{1/3} t^{-2/3} dt =$

$= \int_0^1 \frac{1}{3} t^{2/3-1}(1-t)^{4/3-1}\,dt = \frac{1}{3}B\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right) = \frac{1}{3}\frac{\Gamma(\frac{2}{3})\Gamma(\frac{1}{3}+1)}{\Gamma(2)} =$

$= \frac{1}{3^2}\frac{\Gamma(\frac{2}{3})\Gamma(\frac{1}{3})}{1!} = \frac{1}{9}\frac{\pi}{\sin\pi/3} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{27}$ $\quad \left(\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

2. $\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n}$ $\quad n > 1/2$ $\quad x^2 = t$, $x = \sqrt{t}$, $dx = \frac{1}{2\sqrt{t}}dt$

$= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{t^{-1/2}\,dt}{(1+t)^n} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{t^{1/2-1}}{(1+t)^n}dt = \frac{1}{2}B\left(\frac{1}{2}, n-\frac{1}{2}\right) =$

$= \frac{1}{2}\frac{\Gamma(1/2)\,\Gamma(n-1/2)}{\Gamma(n)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma(n-1/2)}{\Gamma(n)}$ $\quad \Gamma(n-1/2) \to$ можемо израчунати, $\quad \Gamma(n) \to (n-1)!$

3. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n} = \int_0^\infty \frac{1}{n}\,\frac{t^{1/n-1}}{1+t}\,dt = \frac{1}{n}\,\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{n}}$, $n>1$ – да би интеграл конвергирао

$x = t^{1/n}$

$dx = \frac{1}{n}\, t^{1/n-1}\,dt$

4. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\mathrm{tg}\,x)^\alpha\,dx = \int_0^\infty \frac{t^\alpha\,dt}{1+t^2} =$

$\mathrm{tg}\,x = t$ $\quad$ $2-\alpha > 1$ на ∞ да конвергира

$x = \mathrm{arctg}\,t$ $\quad$ $\alpha < 1$

да би у околини 0 конвергирао

$\alpha > -1$ $\quad$ $\boxed{-1 < \alpha < 1}$

смена: $t = \sqrt{x}$

$\displaystyle = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha/2}\cdot \frac{1}{2}\, x^{-1/2}\,dx}{1+x} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{x^{\frac{\alpha+1}{2}-1}}{1+x}\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{\sin\pi\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}$

показати оправданост овог корака

5. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} = \frac{\pi}{\sin\alpha\pi}$ $\quad$ $0<\alpha<1$

$\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}\ln^2 x}{1+x}\,dx = \frac{d^2}{d\alpha^2}\,\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}$

// да оправдан је Γ и B рав. кв. на свом интервалу конвергенције

$\displaystyle\int_0^\infty x^{-1/2}\,\frac{\ln^2 x\,dx}{1+x} = \left(\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}\right)''\Bigg|_{\alpha=1/2}$

Комплексна анализа

питање 6.

до сада смо имали рад са реалним бројевима и њиховим n-торкама и реалним пресликавањима

- имали релацију поретка ! (немамо поредак!)

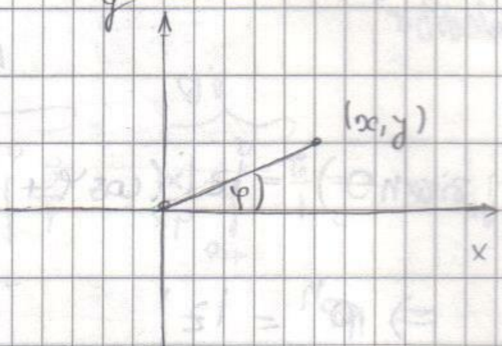
Алгебарски облик $z = x + iy$ $x, y \in \mathbb{R}$, $i^2 = -1$

$z_1 = x_1 + iy_1$ $\quad z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$

$z_2 = x_2 + iy_2$ $\quad z_1 z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$

$x = \operatorname{Re} z$

$y = \operatorname{Im} z$



$z = x + iy \Leftrightarrow (x, y)$

комплексна раван

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ - модуо комплексног броја

$x = |z| \cos \varphi$

$y = |z| \sin \varphi$

$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ - тригонометријски облик

$0 \leq \varphi < 2\pi$ $\quad \varphi = \arg z$ $\quad \operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

$z = |z| \cdot (\cos \operatorname{Arg} z + i \sin \operatorname{Arg} z)$

два комплексна броја у тригонометријском облику

$z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$

$z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \right)$$

$z_\nu = r_\nu(\cos\varphi_\nu + i\sin\varphi_\nu) \qquad \nu = 1,2,\dots,n$

$$z_1 \cdots z_n = (r_1 \cdots r_n)\left(\cos\left(\sum_{\nu=1}^{n} \varphi_\nu\right) + i\sin\left(\sum_{1}^{n} \varphi_\nu\right)\right)$$

ако је $r_1 = r_2 = \dots = r_n = 1$

$\varphi_1 = \varphi_2 = \dots = \varphi_n = \varphi$

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi \quad n\in\mathbb{N}$$ формула Муавра

ако имамо $z\neq 0$ n-ти корен

било који $w\in\mathbb{C}$ који има особину $w^n = z$ зовемо n-ти корен комплексног броја z

$z = |z|\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi) \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi$

$w = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$

$w^n = z \qquad \rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$|z_1 z_2| = |z_1||z_2| \qquad \Rightarrow \rho^n = |z|$

$$[\exists!\ \rho = |z|^{1/n}]$$

$\Rightarrow \cos n\theta + i\sin n\theta = \cos\varphi + i\sin\varphi$

$$\left.\begin{array}{l}\cos n\theta - \cos\varphi = 0\\ \sin n\theta - \sin\varphi = 0\end{array}\right\} \Rightarrow n\theta = \varphi + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n},\ k\in\mathbb{Z}$$

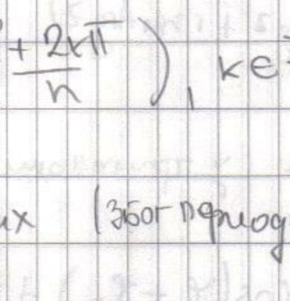
$$w = |z|^{1/n}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right),\ k\in\mathbb{Z}$$

има само n различитих (због периодичности)

нужно у изградњи анализе: конвергенција

$\mathbb{C} \quad z_1, z_2 \qquad d(z_1,z_2) = |z_1 - z_2|$ Еуклидска метрика

$z_1 = x_1 + iy_1 \qquad d(z_1,z_2) = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$



$\leftarrow K(a,\rho)$

$z_2 = x_2 + iy_2 \qquad K(a,\rho) = \{z : |z-a| < \rho\}$