## Криволинијски и површински интеграли

У претходном смо видели како се дефиниција интеграла проширује на мерљиве скупове у $\mathbb{R}^m$. Даље, да интеграл по таквом скупу није нула, неопходно нам је да сам тај мерљив скуп буде пуне раванске мере, што се углавном сводило да садржи неку целу куглу у $\mathbb{R}^m$. Наредни типови интеграла којима се бавимо су интеграли по криволинијским објектима, односно по кривама и површима у $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$. Како су за разумне случајеве ово углавном скупови мере нула у одговарајућим просторима, раније дефиниција вишеструког интеграла нам не даје нешто паметно у овом случају. ОДатле нам треба нешто другачији приступ, мада саме идеје за дефиницију остају исте.

**Криволинијски интеграл прве $I$ врсте**

Овај тип интеграла мање више директно прати идеју за уопштавање коју смо раније користили. Наиме ако имамо функцију дефинисану на некој кривој, поделимо криву на мање делове, на њима изаберимо истакнуте тачке, узмемо вредност функције у тој тачки и помножимо га са одговарајућом дужином тог дела криве. Како смо раније рачунали шта је дужина лука криве у претходном резоновању немамо непознате појмове. Прецизирајмо одатле тај појам.

Нека је дата крива $\gamma$ у простору $\mathbb{R}^3$. Претпоставимо да је крива параметризована са $\gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t), \chi(t))$, где је $t \in [\alpha, \beta]$. Нека је даље $f\colon \gamma \to \mathbb{R}$ ограничена функција. Уочимо поделу $P$ интервала $[\alpha, \beta]$ са

$$\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta$$

и нека је $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$. Претходним тачкама одговарају тачке на кривој $\gamma$ које означавамо са $A_i = (\varphi(t_i), \psi(t_i), \chi(t_i))$ и $c_i = (\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i), \chi(\tau_i))$. По конструкцији имамо да су тачке $c_i$ садржену у делу лука криве од тачке $A_{i-1}$ до $A_i$. Означимо даље са $\Delta l_i$ дужину лука криве од тачке $A_{i-1}$ до тачке $A_i$, те формирајмо интегралну суму

$$\sigma(f, \tau, P) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta l_i.$$

Уколико постоји број $I$, за који важи да за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta$, такво да је $|I - \sigma(f, \tau, P)|$ за све поделе $P$ за које је $\max \Delta l_i < \delta$ и све изборе тачака $\tau$, њега називамо криволинијским интегралом прве врсте функције $f$ по кривој $\gamma$. Уобичајено, користимо и ознаку

$$I = \lim_{\max \Delta l_i \to 0} \sigma(f, \tau, P).$$

За број $I$ користимо углавном ознаку $\int_\gamma f(x, y, z)dl$. Такође користи се и ознака $\in_{AB} f(x, y, z)dl$ где су $A$ и $B$ почетна и крајња тачка криве $\gamma$, прецизније $A = (\varphi(\alpha), \psi(\alpha), \chi(\alpha))$ и $B = (\varphi(\beta), \psi(\beta), \chi(\beta))$, наравно уколико је јасно по којој кривој $\gamma$ вршимо интеграцију.

Да би дефиниција имала смисла, неопходно нам је да дужина лука криве $\gamma$ има смисла. Како смо претходно рачунали за део по део глатке криве, убудуће претпостављамо да је то случај.

Основна својства криволинијског интеграла прве врсте су иста као код ранијих типова

**Став** Нека је $\gamma$ лук криве од тачке $A$ до тачке $B$, $f, g\colon \gamma \to \mathbb{R}$ функције такве да интеграли $\int_\gamma f(x, y, z)dl$ и $\int_\gamma g(x, y, z)dl$ постоје. Тада важи:

1. $\int_\gamma \alpha f(x, y, z) + \beta g(x, y, z)dl = \alpha \int_\gamma f(x, y, z)dl + \beta \int_\gamma g(x, y, z)dl$.
2. $\int_{AB} f(x, y, z)dl = \int_{AC} f(x, y, z)dl + \int_{CB} f(x, y, z)dl$, за сваку тачку $C$ која се налази на луку криве $\gamma$.
3. Уколико је $f(x, y, z) \leqslant g(x, y, z)$, тада је и $\int_\gamma f(x, y, z)dl \leqslant \int_\gamma g(x, y, z)dl$.
4. $|\int_\gamma f(x, y, z)dl| \leqslant \int_\gamma |f(x, y, z)|dl$.

Претходно се доказује као и код обичних интеграла. 1. је последица аналогног својства сума и лимеса, 2. се добија додавањем нових тачака у поделу, 3. опет следи из аналогног својства за интегралне суме, док 4. следи из 3. и неједнакости $-|f(x, y, z)| \leqslant f(x, y, z) \leqslant |f(x, y, z)|$.

Из својства 3. аналогно следи теорема о средњој вредности.

**Став** Ако је функција $f$ непрекидна на луку криве $\gamma$, тада постоји тачка $c$ на луку криве $\gamma$ таква да је

$$\int_\gamma f(x, y, z)dl = f(c)l(\gamma),$$

где је $l(\gamma)$ дужина лука криве $\gamma$.

Нека је $m \leqslant f(x, y, z) \leqslant M$, где су $m$ и $M$ минимум и максимум од $f$. Из претходног својства 3. је тада

$$m \int_\gamma dl \leqslant \int_\gamma f(x, y, z)dl \leqslant M \int_\gamma dl.$$

Приметимо да је по конструкцији интегралне суме за криволинијски интеграл прве врсте $\int_\gamma dl = l(\gamma)$. Одатле је $\int_\gamma f(x, y, z)dl = \mu l(\gamma)$ за неки број $\mu$ између $m$ и $M$. Како је лук криве повезан скуп (непрекидна је слика интервала $[\alpha, \beta]$) а $f$ је непрекидна функција, то постоји тачка $c$ на луку криве за коју је $\mu = f(c)$.

Што се израчунавања криволинијског интеграла прве врсте тиче имамо

**Теорема** У ранијој нотацији, претпоставимо да је крива $\gamma$ дата глатком параметризацијом (дакле да су функције $\varphi, \psi, \chi$ глатке) и нека је функција $f$ непрекидна. Тада је

$$\int_\gamma f(x,y,z)dl = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\sqrt{\varphi^2(t) + \psi^2(t) + \chi^2(t)}dt.$$

Доказ погледати у књизи. Сама формула није неочекивана јер је у овом случају дужина лука криве дата са $\int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi^2(t) + \psi^2(t) + \chi^2(t)}dt$, одакле се део лука из интегралне суме рачуна са $\int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{\varphi^2(t) + \psi^2(t) + \chi^2(t)}dt$.
Напоменимо да теорема важи и ако је $\gamma$ део по део глатка крива, а $f$ део по део непрекидна функција.
Поменимо за крај да криволинијски интеграл прве врсте не зависи од оријентације криве $\gamma$, тј. не зависи да ли се крећемо од тачке $A$ ка тачки $B$, или обрнуто од тачке $B$ ка тачки $A$. Ово својство нисмо раније помињали, јер на интервалу имамо природну оријентацију да идемо од мање тачке ка већој, што код произвољне криве немамо унапред задато, већ зависи од начина како је параметризујемо.
**Став** Ако постоји $\int_{AB} f(x,y,z)dl$, тада је

$$\int_{BA} f(x,y,z)dl = \int_{AB} f(x,y,z)dl.$$

Доказ се своди на то да је у интегралној суми дужина дела лука криве од тачке $A_{i-1}$ до $A_i$ једнака дужини лука криве у обрнутом редоследу.
**Криволинијски интеграл друге $(II)$ врсте**
Посматрајмо сада нешто другачију ситуацију у односу на раније. Нека је опет $\gamma$ крива у $\mathbb{R}^3$ и нека су задате функције $P, Q, R$ на луку криве $\gamma$. Идеја је да проинтегралимо сваку од функција $P, Q, R$ дуж координатних оса. Наиме, нека је опет $(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))$, за $t \in [\alpha, \beta]$ параметризација криве $\gamma$ и нека је $T$ подела интервала $[\alpha, \beta]$ дата са

$$\alpha = t_0 < \ldots < t_n = \beta,$$

те уочимо тачке $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$. Формираћемо даље интегралне суме које индукује дата подела дуж сваке осе. Означимо пре тога са $\Delta x_i = \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})$ и аналогно $\Delta y_i = \psi(t_i) - \psi(t_{i-1}), \Delta z_i = \chi(t_i) - \chi(t_{i-1})$ и као и раније са $\Delta l_i$ дужину дела лука криве. Нека је

$$\sigma_1(P, \tau, T) = \sum_{i=1}^n P(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i), \chi(\tau_i))\Delta x_i$$
$$\sigma_2(P, \tau, T) = \sum_{i=1}^n Q(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i), \chi(\tau_i))\Delta y_i$$
$$\sigma_3(P, \tau, T) = \sum_{i=1}^n R(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i), \chi(\tau_i))\Delta z_i.$$

Уколико постоје лимеси ових интегралних сума када $\max \Delta l_i \to 0$, називамо их криволинијским интегралом друге врсте функција $P, Q, R$ по кривој $\gamma$. Дате лимесе респективно означавамо са

$$\int_\gamma P(x,y,z)dx \qquad \int_\gamma Q(x,y,z)dy \qquad \int_\gamma R(x,y,z)dz,$$

а најчешће се користи ознака

$$\int_\gamma P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz.$$

Такође, слично као и раније користимо и ознаку $\int_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$, где је $A = (\varphi(\alpha), \psi(\alpha), \chi(\alpha))$ и $B = (\varphi(\beta), \psi(\beta), \chi(\beta))$. Једноставности записа ради, често се изостављају аргументи функција $P, Q$ и $R$.
Може се показати да криволинијски интеграл друге врсте постоји уколико је крива $\gamma$ део по део глатка, а функције $P, Q$ и $R$ су непрекидне на кривој. Надаље претпостављамо да је то случај.
Претходна дефиниција интерпретира разне физичке појмове, о чему се неки детаљи могу видети у књизи.
Наведимо даље основна својства овог типа интеграла.
**Став** Нека је $\gamma = AB$ крива, $P_1$ и $P_2$ функције дефинисане на луку криве, такве да интеграли $\int_\gamma P_1 dx$ и $\int_\gamma P_2 dx$ постоје. Тада важи:
1. $\int_\gamma \alpha P_1(x,y,z) + \beta P_2(x,y,z)dx = \alpha \int_\gamma P_1(x,y,z)dx + \beta \int_\gamma P_2(x,y,z)dx$.
2. $\int_{AB} P(x,y,z)dx = \int_{AC} P(x,y,z)dx + \int_{CB} P(x,y,z)dx$, где је $C$ тачка криве $\gamma$.

Доказ је потпуно аналоган ранијим. Наиме, како својство 1. важи за интегралне суме, а и лимес пролази кроз збир и множење скаларом, следи да аналогно важи за криволинијски интеграл друге врсте. Својство 2. се добија опет евентуалним додавањем тачке $C$ у поделу.
За разлику од ранијих типова интеграла, криволинијски интеграл друге врсте нема својство монотоности. Разлика је у томе што је у интегралној суми до сада био израз облика $f(c)\mu(A)$ где је $\mu$ била мера (било Жорданова, било дужина лука криве) која је увек ненегативан број. Са друге стране, разлика $\Delta x_i$ не мора да буде ненегативна. Штавише, зависи од смера кретања којим се крећемо дуж криве. Прецизније

важи
**Став** Ако постоји $\int_{AB} Pdx$, тада је

$$\int_{BA} P(x,y,z)dx = -\int_{AB} P(x,y,z)dx.$$

Доказ је директан, јер се окреће знак у разлици $\Delta x_i$ у интегралној суми. Дакле, да би криволинијски интеграл друге врсте био једнозначно одређен неопходно је да задамо и оријентацију криве, тј. смер којим се крећемо дуж те криве.
Што се израчунавања тиче имамо формулу.
**Став** Нека је $\gamma$ глатка крива и $P$ непрекидна функција дефинисана на њеном луку. У ранијој нотацији имамо да је

$$\int_\gamma P(x,y,z)dx = \int_\alpha^\beta P(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\cdot\varphi'(t)dt.$$

Доказ погледати у књизи. Аналогна формула важи за $\int_\gamma Qdy$ и $\int_\gamma Rdz$. Сама формула је врло у складу са нотацијом интеграла, јер је синтаксно добијамо заменом $x=\varphi(t), y=\psi(t)$ и $z=\chi(t)$, прецизније

$$\int_\gamma P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz = \int_\alpha^\beta P(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))d\varphi(t)+Q(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))d\psi(t)+R(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))d\chi(t)$$

$$= \int_\alpha^\beta P(\ldots)\varphi'(t)+Q(\ldots)\psi'(t)+R(\ldots)\chi'(t)dt.$$

Приметимо даље да претходна формула се може једноставније записати у векторком облику. Уколико означимо са $v(t)=(P(\varphi(t),\psi(t),\chi(t)),Q(\ldots),R(\ldots))$, а са $r(t)=(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))$ вектор криве $\gamma$, тада криволинијски интеграл друге врсте записујемо са

$$\int_\gamma v\circ dr = \int_\alpha^\beta v(t)\circ r'(t)dt,$$

где је са $\circ$ означен уобичајени скаларни производ два вектора. Такође, имамо да је и

$$\int_\gamma f dl = \int_\alpha^\beta f(t)\|r'(t)\|_2 dt,$$

за криволинијски интеграл прве врсте.
**Гринова формула**
Важна веза између криволинијског интеграла по граници неке области и двоструког интеграла по тој области изражена је наредном Гриновом Формулом. Пре саме формулације треба нам један појам.
Уочимо просту (криву без самопресека) затворену (почетна и крајња тачка су исте) криву $\gamma$ у $\mathbb{R}^2$. Другачије речено, овква крива има параметризацију дату са $r(t)=(\varphi(t),\psi(t))$, за $t\in[\alpha,\beta]$ и функција $r\colon[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^2$ је $1-1$ на отвореном интервалу $(\alpha,\beta)$ и $r(\alpha)=r(\beta)$. Оваква крива ограничава неку област $D$ (оваква крива заправо дели раван на две области једну ограничену, која је дакле $D$ и једну неограничену. Ово је мање више јасно простим цртањем слике, али сам доказ је компликован и излази ван овог курса).
Ако крива $\gamma$ може да се представи као део графика две функције $f(x)$ и $g(x)$ за $x\in[a,b]$ уз евентуалне делове правих $x=a$ и $x=b$ област $D$ називамо елементарном облашћу у односу на $x-$ осу. Другачије речено, елементарна област у односу на $x-$осу је област

$$D=\{(x,y)|x\in[a,b], f(x)\leqslant y\leqslant g(x)\},$$

уз претпоставку да је $f(x)<g(x)$ за све $x\in(a,b)$. Крива која је ограничава се дакле састоји редом од дела графика $(x,f(x))$ за $x\in[a,b]$, даље од дела праве $(b,y)$, где је $f(b)\leqslant y\leqslant g(b)$, затим даље од дела графика $(x,g(x))$ где је $x\in[a,b]$ и на крају од дела праве $x=a$ између $f(a)$ и $g(a)$.
Аналогно, област називамо елементарном у односу на $y-$осу ако се представља као део између два графика функција $x=f(y)$ и $x=g(y)$. На крају, за област кажемо да је елементарна, уколико је елементарна у односу на обе осе. Примера ради, круг је елементарна област.
**Теорема** Нека је $D$ област ограничена део по део глатком кривом $\gamma$ и која се може записати као унија елементарних област. Нека су функције $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрекидне заједно са својим парцијалним изводима $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ на скупу $\overline{D}$. Тада важи једнакост

$$\int_\gamma P(x,y)dx+Q(x,y)dy = \iint_D \Big(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\Big)dxdy,$$

где се оријентација на кривој $\gamma$ бира тако да кретањем дуж криве $\gamma$ област $D$ остаје са леве стране.
Доказ погледати у књизи. Идејно, прво се изводи за елементарну област, где се своди на примену Фубинијеве Теореме. За уопштавање на област која је унија елементарних, поделимо област $D$ на елементарне и на сваку од њих применимо претходну формулу. Поделом области $D$ се унутар те области добијају нове криве, међутим како се кроз сваку пролази два пута у супротним смеровима, добија се да ти интеграли не утичу на коначни резултат. Погледати скицу у књизи, или већ неком другом извору.
Претходна формула се назива Гринова формула. Напоменимо још да граница области $D$ не мора бити

једна крива, услов је да је област $D$ унија елементарних области. Примера ради, тачна је за области попут прстена $\{(x,y)|a^2 \leqslant x^2+y^2 < b^2\}$ за коју се једноставно може видети да је унија елементарних области.

**Независност интеграције од путање**

Криволинијски интеграл друге врсте $\int_\gamma Pdx+Qdy+Rdz$ наравно зависи од криве по којој се интеграција врши. Међутим, у неким случајевима зависи само од почетне и крајње тачке криве. Прецизирајмо тај случај

**Теорема** Нека је у области $V \subset \mathbb{R}^3$ дато непрекидно векторско поље

$$v(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)).$$

Тада су следећа тврђења еквивалентна:
1. Постоји функција $u\colon V \to \mathbb{R}$ са непрекидним парцијалним изводима, таква да је $\operatorname{grad} u = v$.
2. Криволинијски интеграл $\int_\gamma Pdx+Qdy+Rdz$ не зависи од криве $\gamma$ у области $V$ већ само од почетне и крајње тачке $A$ и $B$. Вредност интеграла је тада $u(B)-u(A)$.
3. Интеграл $\int_C Pdx+Qdy+Rdz$ по свакој затвореној кривој $C$ у области $V$ једнак је нули.

Доказ погледати у књизи.

Претходна Теорема, мада даје потпун одговор када интеграл не зависи од путање условом 1, није згодна за примене. Наиме, треба проверити услов да ли постоји функција $u$, таква да је $\frac{\partial u}{\partial x}=P$, $\frac{\partial u}{\partial y}=Q$ и $\frac{\partial u}{\partial z}=R$, што је компликовано. Заправо за разлику од једнодимензионалног случаја, где је решење аналогног проблема било само $\int f(x)dx$, у овом случају таква функција не мора да постоји.

У ствари, како од раније знамо да мешовити изводи не зависе од редоследа диференцирања, ако је функција иоле глатка, да би таква функција $u$ постојала, неопходно је да мешовити изводи буду исти. Прецизније имали би

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

уколико би постојала таква функција $u$ која је иоле глатка. Слично, једначењем осталих мешовитих других извода, се изводи да је неопходно да важи $\frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}$ и $\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}$, за постојање функције $u$ за коју је $\operatorname{grad} u = v$. Међутим, претходни услови нису довољни. Архипример овог случаја (који је у равни) је

$$P(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}, \qquad Q(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2},$$

Посматран на области $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$. Директним рачуном имамо да је $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$. Са друге стране, уколико би постојала функција $u$ таква да је $\frac{\partial u}{\partial x}=P$ и $\frac{\partial u}{\partial y}=Q$, по претходној теореми би интеграл $\int_C Pdx+Qdy$ по свакој затвореној кривој $C$ био једнак нули. За $C$ изаберимо јединичну кружницу $C=\{(x,y)|x^2+y^2=1\}$, коју можемо да параметризујемо са $x=\cos t, y=\sin t$ за $t\in[0,2\pi]$. Коришћењем формуле за израчунавање криволинијског интеграла друге врсте имамо да је

$$\int_C \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{\cos t\cos t - \sin t(-\cos t)}{\cos^2 t+\sin^2 t}dt = \int_0^{2\pi} 1dt = 2\pi,$$

што није нула. Дакле, таква функција не постоји у наведеној области.

Ипак, под додатним претпоставкама за област $V$ (у ранијој нотацији) поменути неопходан услов за једнакост одређених парцијалних извода је и довољан. Ово је згодна ситуација јер је тај услов само рачунски, тј. директно је проверив за дате функције $P, Q$ и $R$. Тиме долазимо до појма просте повезаности.

За подскуп $A \subset \mathbb{R}$ кажемо да је просто повезан уколико се свака затворена, део по део глатка крива $\gamma$ у $A$ може непрекидно скупити у тачку $M_0 \in \gamma$. Прецизираћемо мало овај појам, мада саму дефиницију ћемо користити за неке случајеве а више видети примере за које ово не важи. Дакле, нека је дата затворена део по део глатка крива $\gamma\colon[0,1]\to A$ и нека је још $\gamma(0)=\gamma(1)=M_0$. Ако постоји непрекидно пресликавање $F\colon[0,1]\times[0,1]\to A$, такво да је

$$\begin{aligned} &F(0,s)=F(1,s)=M_0, && s\in[0,1]\\ &F(t,0)=\gamma(t) && t\in[0,1]\\ &F(t,1)=M_0 && t\in[0,1], \end{aligned}$$

онда кажемо да се крива $\gamma$ може скупити у тачку $M_0$. Идеја је дакле, да на нивоу $s=0$ имамо криву $\gamma$, коју постепено по параметру $s$ деформишемо до тачке $M_0$, односно када је $s=1$, крива коју добијамо је само наведена тачка $M_0$. Први услов, је да док деформишемо криву путем $F$ до тачке, саму тачку $M_0$ не померамо. Дакле, имамо фамилију кривих $\gamma_s(t)=F(t,s)$, која од $s=0$, од дате криве долази непрекидно до тачке $M_0$ за $s=1$.

У саме примере се нећемо много удубљивати. Прво, раван $\mathbb{R}^2$ и простор $\mathbb{R}^3$ су просто повезани. Заправо, над њима не само сваку криву, већ и цео простор можемо скупити у сваку тачку (једноставности ради узимамо нулу) са

$$F(x,s) = x(1-s).$$

Заиста, за $s=0$ свака тачка је фиксирана, док је за $s=1$ слика претходног пресликавања само нула. У претходном примеру, $x$ је вектор, док је множење уобичајено множење скаларом.
Важан пример простора који није просто повезан је $A=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Ово нећемо доказивати, а интуитивно проблем прави било која затворена крива која обиђе нулу (одакле је и дошао раније наведени пример). Ако такву криву кренемо непрекидно да деформишемо она ћ увек обилазити нулу (интуитивно, морала би да се прекине да би је провукли око нуле), а кроз њу не можемо да прођемо јер морамо да останемо у скупу $A$. Заправо, већина примера са којима ћемо се срести је оваквог облика, односно равни којој фали коначно много тачака. Неформално речено, у равни проста повезаност мери колико имамо рупа.
Са друге стране, скуп $\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$ јесте просто повезан, тј. изласком из равни $O_{xy}$ немамо више проблем са заобилажењем једне тачке. Да би постигли исто у као у равни, из $\mathbb{R}^3$ неопходно је нпр. избацити целу праву.
Од још неких примера, површина сфере јесте просто повезана, док површина торуса није, јер слично као код равни без тачке, не можемо да скупимо у тачки кружницу која иде дуж целог обима торуса.
Важна теорема која употпуњује питање о независности интеграције је
**Теорема** Нека је $V\subset\mathbb{R}^3$ просто повезана област на којој је задата функција $v\colon V\to\mathbb{R}^3$ са $v(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$, која има непрекидне парцијалне изводе. Потребан и довољан услов да интеграл $\int_\gamma Pdx+Qdy+Rdz$ не зависи од криве $\gamma\subset V$ већ само од почетне и крајње тачке, јесте да су испуњене једнакости

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\qquad \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y},\qquad \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}.$$

Доказ по жељи погледати у књизи.
Уместо доказа посматрајмо аналгону ситуацију у равни, где је једини релевантан услов $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$. По ранијој теореми, довољно је показати да је интеграл по свакој затвореној кривој $C$ једнак нули. Ако додатно претпоставимо да је крива $C$ граница неке области $D$ тада по Гриновој формули имамо

$$\int_C Pdx+Qdy=\iint_D\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}dxdy=0,$$

по наведеном услову. Наравно, важно за Гринову формулу је да су парцијални изводи непрекидни на затворењу $\overline{D}$, односно, да област $D$ осим граничних тачака које су свакако на кривој $C$ нема још неке граничне тачке, које су можда и ван области $V$. Ако се опет вратимо на пример равни без тачке, јединична кружница је у њој граница скупа $\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\}\setminus\{(0,0)\}$, међутим проблем прави опет $(0,0)$, или ти јединична кружница у том скупу није граница компактног скупа. Може се показати да у просто повезаној области ово не може да се деси, тј. да ће увек постојати адекватна област $D$ чија је граница крива $C$.
**Површински интеграл прве врсте**
Пренесимо сада идеје везане за криве које смо раније имали на случај површи у $\mathbb{R}^3$ (у овом делу, за површ подразумевао дводимензионална површ у ранијој нотацији). Сама релаизације нема суштински нешто ново, али је технички компликованија јер радимо са више променљивих. Пре свега, треба два појма која смо за криве имали раније да пренесемо на површи. Ради се о површини површи, а касније за интеграл друге врсте о оријентацији површи.
Сетимо се да смо раније дефинисали површ у $\mathbb{R}^3$ као скуп $S=\{(x,y,z)|F(x,y,z)=0\}$, где је $F\colon V\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ функција за коју важи $\nabla F\neq 0$. Како је то по Теореми о имплицитној функцији еквивалентно томе да свака тачка има околину на којој је скуп $S$ график функције, која је исте глаткости као и $F$, пођимо од овог случаја. Нека је дакле површ $S$ задата са $(x,y,f(x,y))$, где је $(x,y)\in D\subset\mathbb{R}^2$ област и нека још функција $f$ глатка. Уочимо поделу $P$ скупа $D$ на мерљиве скупове $D_i$ где је $i=1,\dots,n$ и уочимо тачке $(a_i,b_i)\in D_i$. У тачкама $(a_i,b_i,f(a_i,b_i))$ конструишимо тангентну раван на површ $S$, а са $S_i$ означимо пројекцију скупа $D_i$ на наведену тангентну раван. Израчунајмо даље меру скупа $S_i$. Пре тога нађимо вектор нормале на тангентну раван у тачки $(a_i,b_i)$. Посматрајмо прво криву на површи дату са $\gamma(t)=(a_i+t,b_i,f(a_i+t,b_i))$. Како је $D$ отворен скуп, за $t$ довољно мало је претходна крива дефинисана и свакако је на површи $S$. Дакле, њен тангентни вектор, за $t=0$, припада тангентном простору на $S$ у тачки $(a_i,b_i)$. Диференцирањем добијамо да је $\gamma'(0)=(1,0,\frac{\partial f}{\partial x}(a_i,b_i)$. Слично, посматрајући криву $(a_i,b_i+t,f(a_i,b_i+t))$ имамо да је вектор $(0,1,\frac{\partial f}{\partial y}(a_i,b_i))$ такође тангентни у наведеној тачки. Њихов векторски производ који износи $(-\frac{\partial f}{\partial x}(a_i,b_i),-\frac{\partial f}{\partial y}(a_i,b_i),1)$ је вектор нормале $n(a_i,b_i)$ на тангентну раван. Даље, косинус угла $\gamma_i$ који заклапа та раван са равни $O_{xy}$ износи

$$\cos\gamma_i=\frac{(-\frac{\partial f}{\partial x}(a_i,b_i),-\frac{\partial f}{\partial y}(a_i,b_i),1)\circ(0,0,1)}{\|(-\frac{\partial f}{\partial x}(a_i,b_i),-\frac{\partial f}{\partial y}(a_i,b_i),1)\|\|(0,0,1)\|}=\frac{1}{\sqrt{(\frac{\partial f}{\partial x}(a_i,b_i))^2+(\frac{\partial f}{\partial y}(a_i,b_i))^2+1}},$$

где је са $\circ$ означен уобичајени скаларни производ у $\mathbb{R}^3$. Одавде се може показати да је $\mu S_i=\mu D_i\cdot\frac{1}{\cos\gamma_i}$. Заиста, ако заротирамо и истранслирамо тангентну раван, тако да јој је пресечна права са равни $O_{xy}$ нпр $x-$оса, и посматрамо наведену пројекцију, која је линеарно пресликавање, дуж $x-$осе не мењамо ништа, док дуж $y-$осе продужавамо вектор за фактор $\frac{1}{\cos\gamma_i}$, одакле видимо да се мере квадара мењају за наведени фактор, а одатле и свих мерљивих скупова.

Најзад, површину површи дефинишемо са

$$\mu S = \lim_{\lambda(P)\to 0}\sum_{i=1}^{n}\mu S_i = \lim_{\lambda(P)\to 0}\sum_{i=1}^{n}\mu D_i\sqrt{(\frac{\partial f}{\partial x}(a_i,b_i))^2+(\frac{\partial f}{\partial y}(a_i,b_i))^2+1} = \iint_D\sqrt{(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y))^2+(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y))^2+1dxdy},$$

јер су наведени парцијални изводи непрекидни, одакле следи интеграбилност наведене функције. Приметимо да је под интегралон норма вектора нормале $n(x,y)$ при овој параметризацији површи $S$.
Заправо ова формула остаје на снази при произвољној параметризацији. Нека је површ сада дата произвољном параметризацијом

$$r(u,v) = (\varphi(u,v), \psi(u,v), \chi(u,v)), \qquad (u,v)\in D\subset\mathbb{R}^2,$$

где су функције $\varphi,\psi$ и $\chi$ глатке. При овакво задавању, како је $D$ област, аналогно се види да су вектори $\frac{\partial r}{\partial u}$ и $\frac{\partial r}{\partial v}$ тангентни на површ, одакле је вектор нормале

$$n(u,v) = \frac{\partial r}{\partial u}\times\frac{\partial r}{\partial v} = \begin{pmatrix} i & j & k\\ \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\chi}{\partial u}\\ \frac{\partial\varphi}{\partial v} & \frac{\partial\psi}{\partial v} & \frac{\partial\chi}{\partial v}\end{pmatrix} = \Big(\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\chi}{\partial v}-\frac{\partial\chi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}, \frac{\partial\chi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}-\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\chi}{\partial v}, \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}-\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\Big).$$

Како желимо да претходне једначине задају површ која има тангентни простор, претпостављаћемо увек да је $n(x,y)\neq 0$. Означимо једноставности ради $x=\varphi(u,v), y=\psi(u,v)$ и $z=\chi(u,v)$ и приметимо даље да су координате вектора нормале заправо редом Јакобијани пресликавања $\frac{D(y,z)}{D(u,v)}, \frac{D(z,x)}{D(u,v)}$ и $\frac{D(x,y)}{D(u,v)}$. Како барем један од њих није једнак нули (јер вектор нормале није једнак нули), нпр $\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\neq 0$ по Теореми о инверзној функцији у околини $U$ те тачке, координате $(u,v)$ можемо изразити преко $(x,y)$. Уводећи ту смену, добијамо на тој околини да је површ $S$ опет график функције $z=f(x,y)$ и по ономе што знамо од раније је

$$\mu S = \int_V\sqrt{1+p^2+q^2}dxdy,$$

где је $p=\frac{\partial z}{\partial x}$ и $q=\frac{\partial z}{\partial y}$. Израчунајмо сада те парцијалне изводе. Како је $z=z(x,y)=z(x(u,v),y(u,v))$, по правилу за извод сложене функције, имамо да је

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$
$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Ако претходно посматрамо као систем где су непознате $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, применом Крамеровог правила, како је прво детерминанта система $\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\neq 0$, имамо да је

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\frac{D(x,y)}{D(u,v)}}\det\begin{pmatrix}\frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix} = -\frac{1}{\frac{D(x,y)}{D(u,v)}}\frac{D(y,z)}{D(u,v)}.$$

Аналогно се добија да је $q=-\frac{1}{\frac{D(x,y)}{D(u,v)}}\frac{D(z,x)}{D(u,v)}$. Најзад, враћајући се на формулу $\mu S=\iint_D\sqrt{1+p^2+q^2}dxdy$, увођењем смене $x=\varphi(u,v), y=\psi(u,v)$, по Теореми о смени промењливе у интегралу имамо да је

$$\int_V\sqrt{1+p^2+q^2}dxdy = \iint_D\sqrt{1+\Big(-\frac{1}{\frac{D(x,y)}{D(u,v)}}\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\Big)^2+\Big(-\frac{1}{\frac{D(x,y)}{D(u,v)}}\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\Big)^2}\Big|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\Big|dudv$$
$$= \iint_D\sqrt{\Big(\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\Big)^2+\Big(\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\Big)^2+\Big(\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\Big)^2}dudv = \iint_D\big\|n(u,v)\big\|dudv.$$

Приметимо само да смо формално претходну смену могли да урадимо само на околини из инверзне функције. Међутим како свака тачка има такву околину, а посједњи добијени израз не зависи од тог међукорака, уколико за сваку тачку поновимо поступак и све пресаберемо добијамо да фомула важи на целом $D$.
Знајући претходно, директно уводимо површински интеграл прве врсте.
Нека је дата глатка површ $S$ у $\mathbb{R}^3$ параметарски једначином

$$r(u,v) = (\varphi(u,v), \psi(u,v), \chi(u,v)), \qquad (u,v)\in D,$$

где је $D\subset\mathbb{R}^2$ мерљива затворена област, $\varphi,\psi,\chi$ су глатке функције на $D$ и нека је $f\colon S\to\mathbb{R}$ непрекидна функција.
Уочимо поделу $P=\{D_i|i=1,\dots,n\}$, која индукује поделу $P'=\{S_i|i=1,\dots,n\}$ на површи $S$. Уочимо тачке $c_i\in S_i$ и формирајмо интегралну суму

$$\sum_{i=1}^{n}f(c_i)\mu S_i.$$

Уколико постоји коначан лимес када $\delta S_i \to 0$ ($\delta S_i = \sup\{d(x,y)|x,y \in S_i\}$ је дијаметар скупа) назива се површински интеграл прве врсте функције $f$ по површи $S$ и означава се са

$$\iint_S f(x,y,z)dS$$

Може се показати да под наведеним претпоставкама наведени интеграл постоји.
Својства су потпуно аналогна својствима криволинијског интеграла прве врсте
**Став** Нека је $S \subset \mathbb{R}^3$ глатка површ и $f,g\colon S \to \mathbb{R}$ непрекидне функције. Тада важи
1. $\iint_S \alpha f(x,y,z) + \beta g(x,y,z)dS = \alpha \iint_S f(x,y,z)dS + \beta \iint_S g(x,y,z)dS$.
2. $\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_{S_1} f(x,y,z)dS + \iint_{S_2} f(x,y,z)dS$, уколико је $S = S_1 \cup S_2$ где су $S_1$ и $S_2$ глатке површи које немају заједничке унутрашње тачке.
3. Уколико је $f(x,y,z) \leqslant g(x,y,z)$ за све $(x,y,z) \in S$ тада је $\iint_S f(x,y,z)dS \leqslant \iint_S g(x,y,z)dS$.
4. Постоји тачка $(x_0,y_0,z_0) \in S$, таква да је $\iint_S f(x,y,z)dS = f(x_0,y_0,z_0)\mu S$.
Доказ свих својстава је суштински исти као раније. Својство монотоности 3. имамо аналогно криволинијском интегралу прве врсте, јер у прављењу интегралне суме, вредности функције множимо са ненегативним бројем $\mu S_i$.
Израчунавање се своди на рачунање двоструког интеграла
**Теорема** Нека је, у ранијој норацији, површ $S$ задата параметарски и нека је $f\colon S \to \mathbb{R}$ непрекидна функција. Тада важи

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_D f(\varphi(u,v),\psi(u,v),\chi(u,v))\|n(u,v)\|dudv,$$

где је $n(u,v) = \frac{\partial r}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial r}{\partial v}(u,v)$ вектор нормале на површ.
Доказ погледати по жељи. Сама формула није изненађујућа, у суштини је потпуно аналогна формули за израчунавање криволинијског интеграла прве врсте, где је меру криве, тј. дужину, одређивао интензитет вектора $\gamma'(t)$, док овде аналогно ради вектор нормале (што видимо у формулама за дужину лука криве односно површину површи).
**Површински интеграл друге врсте**
**Оријентација равни и површи**
Нека је дата раван $\alpha$ и нека вектори $u_1, u_2 \in \alpha$ чине базу дате равни, тј. нека је још $rang[u_1u_2] = 2$. Кажемо да је база $(u_1,u_2)$ позитивно оријентисана, укоилко крећуци се од вектора $u_1$ ка вектору $u_2$, оним углом који је мањи од $\pi$, идемо у смеру супротном од кретања казаљке на сату. У најједноставнијем примеру, дакле у $\mathbb{R}^2$, видимо да је уобичајена оријентација $((1,0),(0,1))$, односно кад идемо од $x-$осе ка $y-$оси, позитивна, јер угао којим се крећемо износи $\pi/2$. Уколико се раван $\alpha$ додатно налази у простору $\mathbb{R}^3$, по правилу три прста, видимо да оријентација заправо само одређује смер векторског производа $u_1 \times u_2$. Отуда, избором једне стране равни, односно једног смера вектора нормале, изабрали смо и оријентацију дате равни.

У случају површи, идеја је суштински иста. Дакле, нека је задата површ $S$ у простору $\mathbb{R}^3$, у свакој тачки површи можемо у тангентном простору у тој тачки изабрати неку оријентацију. Уколико је површ $S$ задата параметарски као $\{r(u,v)|(u,v) \in D \subset \mathbb{R}^2\}$, природан избор за векторе базе тангентних простора су вектори $\frac{\partial r}{\partial u}$ и $\frac{\partial r}{\partial v}$. Као и случају равни, оријентацију у свакој тачки $x \in S$ одређује вектор нормале и означимо даље са $n(x)$ и $-n(x)$ два избора вектора нормале дужине 1. Уколико можемо да изаберемо $n(x)$ у свакој тачки, тако да крећући се дуж произвољне затворене криве $C$, вектор $n(x)$ се непрекидно мења за $x \in C$ и на крају се враћа у почетни положај, кажемо да је површ $S$ оријентабилна или двострана, јер у датом случају имамо два избора вектора нормале. У супротном кажемо да није оријентабилна, а примери се могу наци у књизи као и наравно по интернету. За оријентабилну површ којој је изабрана једна страна кажемо да је оријентисана.

**Површински интеграл друге врсте**
Нека је задата глатка оријентабилна површ $S \subset \mathbb{R}^3$ параметарски са

$$r(u,v) = (r_1(u,v), r_2(u,v), r_3(u,v)) \qquad (u,v) \in D \subset \mathbb{R}^2,$$

и нека је $f$ непрекидна реална функција дефинисана на површи $S$. Нека је $n(x,y,z)$ изабрано векторско поље јединицних нормала на површ $S$ у одговарајућој тачки. Нека је даље $P = \{P_i|i = 1,\dots,n\}$ подела области $D$ и $S_i = r(P_i)$ њоме индукована подела површи $S$ и нека су још изабране тачке $(x_i,y_i,z_i) \in S_i$. Даље означимо са $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ углове које вектор нормале $n(x_i,y_i,z_i)$ заклапа са координатним осама. Посматрајмо интегралне суме

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\cos\alpha_i\mu(S_i)$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\cos\beta_i\mu(S_i)$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\cos\gamma_i \mu(S_i).$$

Лимеси претходних интегралних сума, када параметар поделе тежи нули (прецизније $max_{i=1,\dots,n}\mu(S_i)$) називају се површинским интегралима функције $f$ по површи $S$ и означавају се (за сада) респективно са

$$\iint_S f(x,y,z)\cos(\alpha(x,y,z))dS$$

$$\iint_S f(x,y,z)\cos(\beta(x,y,z))dS$$

$$\iint_S f(x,y,z)\cos(\gamma(x,y,z))dS,$$

где је $\alpha(x,y,z)$ угао који вектор нормале $n$ површи $S$ у тачки $(x,y,z)$ заклапа са $x$ осом, и аналогно $\beta$ и $\gamma$.

Као и сви претходни типови интеграла, површински интеграл друге врсте је линеаран (јер је сума линеарна). Као и криволинијски интеграл друге врсте зависи од оријентације, односно избором вектора $-n$ све суме мењају знак, па самим тим и интеграл мења знак. Отуд он нема својсвта монотоности површинског интеграла прве врсте

Даље, директно из дефиниције и формуле за рачунање површинског интеграла прве врсте имамо да је

$$\iint_S f(x,y,z)\cos(\alpha(x,y,z))dS = \iint_D f(r_1(u,v), r_2(u,v), r_3(u,v))\cos(\alpha(r_1(u,v), r_2(u,v), r_3(u,v)))\|n\|dudv.$$

У специјалном случају, уколико је површ $S$ график функције, тј $S = \{(x,y,z(x,y)) | (x,y) \in D\}$, коришћењем наведене параметризације, у којој је вектор нормале $(-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1)$, а косинус угла који он заклапа са равни $O_{xy}$ износи $\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{(\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2 + 1}}$ (рачун је већ спроведен приликом рачунања елемента површине површи која је график функције), директно из формуле за рачунање површинског интеграла прве врсте добијамо да је

$$\iint_S f(x,y,z)\cos(\gamma(x,y,z))dS = \iint_D f(x,y,z(x,y))\frac{1}{\sqrt{(\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2 + 1}}\sqrt{(\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2 + 1}dxdy = \iint_D f(x,y,z(x,y))dxdy,$$

одакле се интеграл $\iint_S f(x,y,z)\cos(\gamma(x,y,z))dS$ уобичајено записује са $\iint_S f(x,y,z)dxdy$. Слично се може добити и за $\iint_S f(x,y,z)\cos(\alpha(x,y,z))dS$ и $\iint_S f(x,y,z)\cos(\beta(x,y,z))dS$ одакле се долази до уобичајеног записа површинског интеграла друге врсте са

$$\iint_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy,$$

где су $P, Q, R$ непрекидне функције дефинисане на површи $S$.

Још један елегантан запис површинског интеграла друге врсте је тзв. векторски. Директно из дефиниције видимо да уколико означимо са $v(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ да је уједно и

$$\iint_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy = \iint_S v \circ ndS,$$

где је други интеграл одговарајући површински интеграл прве врсте а $n(x,y,z)$ је јединични вектор нормале. У нотацији из претходног, како је $n$ јединични вектор, то је његов координатни запис заправо $(\cos(\alpha(x,y,z)), \cos(\beta(x,y,z)), \cos(\gamma(x,y,z)))$, па директно из дефиниције добијамо да интегралне суме површинског интеграла друге врсте представљају исте интегралне суме као за поменути површински интеграл прве врсте.

**Градијент, дивергенција, ротор**

Нека је $u\colon U \to \mathbb{R}$, где је $U \subset \mathbb{R}^3$ област диференцијабилна функција. Градијент функције $u$ је векторско поље дато са

$$\mathrm{grad}u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

Уколико је дата функција, односно векторско поље, $v\colon U \to \mathbb{R}^3, v(x,y,z) = (v_1(x,y,z), v_2(x,y,z), v_3(x,y,z))$ где је $U$ опет област у $\mathbb{R}^3$, дивергенција од $v$, у ознаци $\mathrm{div}v$ је функција дата са

$$\mathrm{div}v = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}.$$

На крају, ротор векторског поља $v$ је векторско поље $\mathrm{rot}v$ дато са

$$\mathrm{rot}v = \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}, \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}, \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right).$$

Уколико формално означимо са $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ и дати формални израз посматрамо као вектор, претходне формуле се могу лакш записати са

$$\mathrm{grad}u = \nabla u, \qquad \mathrm{div}v = \nabla \circ v, \qquad \mathrm{rot}v = \nabla \times v,$$

где последњи израз означава векторски производ у $\mathbb{R}^3$. Претходне ознаке су формалне, а правила рачунања са њима су иста као са векторима и скаларима, осим што када израз $\frac{\partial}{\partial x}$ упарујемо са одговарајућом координатом не множимо већ диференцирамо. Основна правила рачунања са претходним операцијама могу се наћи у књизи.

**Стоксова формула и формула Гауса - Остроградског**

Нека је $S$ глатка оријентабилна површ, ограничена са део по део глатком кривом $\Gamma$. Претпоставимо да се $S$ може бијективно пресликати на сваку од координатних равни. Нека су функције $P, Q, R$ непрекидно диференцијабилне у некој области $U$, која садржи површ $S$. Тада важи Стоксова формула

$$\int_\Gamma Pdx + Qdy + Rdz$$
$$= \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial Z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

Оријентација је таква да приликом обиласка криве $\Gamma$ површ $S$ остаје са леве стране.
Доказ претходне једнакости може се наћи у књизи.
Претходна формула уопштава Гринову формулу на површи које нису обавезно садржане у равни $O_{xy}$. Наиме у том случају вектор номрале је паралелан вектору правца $z$ осе, па заклапа угао $\pi/2$ са преостале две координатне осе, откуда прва два сабирка из површинског интеграла из Стоксове формуле су нула. Слично као и код Гринове формуле, Стоксова формула је тачна и за површи које су унија површи које могу бијективно да се испројектују на све координатне равни. Наиме, у том случају површински интеграл са десне стране биће збир површинских интеграла по одговарајућим деловима површи, док се криволинијски међусобно скрате као у Гриновој формули.
На крају, коришћењем векторског записа, Стоксова формула се може једноставније записати, дакле нека је $v = (P, Q, R)$ и $n$ јединични вектор нормале на површ $S$. Тада је

$$\int_\Gamma \langle v, dr\rangle = \iint_S n \circ \mathrm{rot} v dS.$$

Нека је $V \subset \mathbb{R}^3$ област дата са $V = \{(x, y, z) | \phi(x, y) \leqslant z \leqslant \psi(x, y), (x, y) \in D\}$, где је $D$ обласу у $\mathbb{R}^2$ ограничена део по део глатком кривом $\Gamma$. Означимо даље

$$S_1 : (x, y, \phi(x, y)), (x, y) \in D$$
$$S_2 : (x, y, \psi(x, y)), (x, y) \in D$$
$$S_3 : (x, y, z), (x, y) \in \Gamma, \phi(x, y) \leqslant z \leqslant \psi(x, y),$$

И нека је $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$. Неформалније, $S$ је цилиндар чије су базе графици функција $\phi$ и $\psi$ а површ $S_3$ представља омотач тог цилиндра. Овакву област $V$ називамо $z$ елементарном. Уколико је $R$ функција дефинисана на $V$ која је нерпекидна заједно са парцијалним изводом $\frac{\partial R}{\partial z}$ тада је

$$\iint_S Rdxdy = \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz,$$

где је оријентација одређена спољном страном површи $S$. Доказ ове формуле може се наћи у књизи, а идејно је сличан доказу Гринове формуле, односно добија се адекватном применом Фубинијеве теореме. Аналогно се дефинишу $x$ и $y$ елементарне области и аналогно, област називамо елементарном уколико је елемнтарна у односу на све три осе. За такве области важи

$$\iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz,$$

где је у првом интегралу узета спољна страна површи $S$, која ограничава област $V$. Претходна формула се назива формула Гауса - Остроградског.

Слично као Гринова и Стоксова формула и претходна формула важиза области које су дисјунктна унија елементарних области.

У векторском запису претходна формула се своди на

$$\iint_S v \circ ndS = \iiint_V \mathrm{div} v dxdydz,$$

где је коришћена иста нотација као у претходном тексту.