Интеграли у $\mathbb{R}^m$

Настављајући уопштавање појмова са једнодимензионалног на вишедимензионални случај, долазимо до интеграла у $\mathbb{R}^m$. За почетак, присетимо се дефиниције Риманове суме која гласи

$$\sum_{k=1}^{n} f(c_k)(x_k - x_{k-1}),$$

где је $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ нека функција, x_k тачке поделе и c_k тачка из интервала $[x_{k-1}, x_k]$, чијим се граничним прелазом, са параметром поделе добијао Интеграл функције. Како је $x_k - x_{k-1}$ дужина интервала $[x_{k-1}, x_k]$, што је једино везано за једнодимензионални случај, видимо да уколико имамо функцију на скуповима са сличним својствима као што је дужина, можемо по аналогији дефинисати интеграл. Такво пресликавање називаћемо мером (наравно још су примери површина тела у равни и запремина у простору, а касније ћемо више прецизирати шта очекујемо) и углавном се означава са $\mu(A)$ за подскуп A. Дакле, уколико имамо такво пресликавање и функцију $f\colon A \to \mathbb{R}$ разбијањем скупа A на мање скупове A_k на којима узмемо тачку $c_k \in A_k$, интеграл функције би се добио у граничном процесу од суме $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\mu(A_k)$. Тиме, дефинисање интеграла, почињемо са дефинисањем мере у $\mathbb{R}^m$.

Такође, осим питања мере, интересоваће нас и који су подскупови у $\mathbb{R}^m$ адекватни да се по њима интеграли. Ово питање нисмо постављали у једнодимензионалном случају, јер су мање-више једини разумни подскупови од $\mathbb{R}$ интервали (нпр. они су једини повезани). Са друге стране, нпр. у равни $\mathbb{R}^2$ повезани су скупови и правоугаоници $[a,b] \times [c,d]$, кругови (тј. лоптему метрици d_2) итд...

Жорданова мера

Нека су нам дате тачке $a = (a_1, \ldots, a_m)$ и $b = (b_1, \ldots, b_m)$ у простору $\mathbb{R}^m$. Скуп $I_{a,b} = \{x = (x_1, \ldots, x_m)) | a_i \leqslant x_i \leqslant b_i\}$ називамо $m-$димензионалним квадром у $\mathbb{R}^m$, или само квадром, а назива се и сегментом у $\mathbb{R}^m$ по аналогији са једнодимензионализм случајем. Наравно, у $\mathbb{R}^2, I_{a,b}$ је правоугаоник, док је у $\mathbb{R}^3$ обичан квадар. По аналогији са та два случаја (и по логици ствари) узећемо да је мера квадра (у $\mathbb{R}^m$) производ дужина његових страница, тј. $\mu^m(I_{a,b}) = \prod_{k=1}^{m}(b_k - a_k)$. Уколико нема забуне око димензије у којој рачунамо меру, користићемо само нотацију $\mu(I_{a,b})$.

Из дефиниције имамо дакле да је $2-$димензионална мера правоугаоника његова површина, док је $3-$димензионална мера квадра његова запремина. Наравно, претходно се уклапа и са једнодимензионалним случајем, тј. мера интервала $[a,b]$ је његова дужина $b-a$.

Даље, дефинишимо поделу квадра $I_{a,b}$. У претходној нотацији, означимо са $I_i = [a_i, b_i]$ одакле имамо да је $I_{a,b} = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_m$. Сваки сегмент I_i можемо уобичајено поделити (као у математици 1) тачкама $P_i = \{x_i^0 = a_i, x_i^1, \ldots, x_i^{n_i} = b_i\}$. Најзад, Декартов производ

$$P = P_1 \times \ldots \times P_m,$$

називамо поделом квадра $I_{a,b}$. Другачије речено, на претходно описан начин разбили смо квадар $I_{a,b}$ на $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_m$ мањих квадара који су одређени сегментима

$$[x_1^{j_1}, x_1^{j_1+1}] \times [x_2^{j_2}, x_2^{j_2+1}] \times \ldots \times [x_m^{j_m}, x_m^{j_m+1}],$$

које називамо подквадрима у подели P. Како нам претходни експлицитан запис често није неопходан, поделу P ћемо означавати и само тим подсегментима поређаним неким редоследом

$$P = \{I_1, \ldots, I_k\},$$

где је $k = n_1 \cdot \ldots \cdot n_m$. Означимо даље са $\mathcal{P}(I_{a,b})$ скуп свих подела сегмента I. Даље, за поделу P' кажемод да је финија од поделе P (односно да је P грубља од P') ако је сваки подсегмент I^j поделе P' садржан у неком подсегменту поделе P. Као и у једнодимензионалном случају, видимо да за дате две поделе P' и P'' постоји подела P финија од обе (примера ради, можемо унирати све подеоне тачке које се јављају на координатама и од њих направити поделу P).

Пре него што наставимо са увођењем мере, требаће нам пар нових операција са скуповима. Нека је $A \subset \mathbb{R}^m$ и $x \in \mathbb{R}^m$. Кажемо да је x унутрашња тачка скупа A уколико припада скупу A са неком својом околином. Кажемо да је спољашња уколико је унутрашња тачка скупа $\mathbb{R}^m \setminus A$. Преостале тачке називамо рубним тачкама скупа A. То су дакле тачке све тачке $x \in \mathbb{R}^m$ такве да у свакој околини U су садржане и тачке од A и тачке од $\mathbb{R}^m \setminus A$. Даље, са A° означавамо скуп свих унутрашних тачака од A, док са ∂A означавамо све рубне тачке скупа A. Може се показати да је раније уведено затворење $\overline{A}$ заправо скуп $A \cup \partial A$.

Нека је сада A ограничен подскуп од $\mathbb{R}^m$ и I произвољан квадар који садржи A. Уочимо произвољну поделу P од I и означимо са $\underline{\omega}_P(A)$ унију свих подсегмената поделе P који се састоје само од унутрашњих тачака скупа A, а са $\overline{\omega}_P(A)$ унију свих подсегмената поделе P који садрже барем једну тачку од $\overline{A}$. Са $|\underline{\omega}_P(A)|$, односно $|\overline{\omega}_P(A)|$, означићемо збир мера свих подсегмената који се налазе у $\underline{\omega}_P(A)$ односно $\overline{\omega}_P(A)$. Приметимо даље да ако је подела P' финија од поделе P, тада је $|\underline{\omega}_P(A)| \leqslant |\underline{\omega}_{P'}(A)|$ као и $|\overline{\omega}_{P'}(A)| \leqslant |\overline{\omega}_P(A)|$. Одавде, за сваке две поделе P' и P'' узимањем финије поделе од обе добијамо да је $\underline{\omega}_{P'}(A) \leqslant \overline{\omega}_{P''}(A)$. Одатле, постоје коначни

$$\sup_{P \in \mathcal{P}(I)} \left|\underline{\omega}_P(A)\right| = \mu_i(A) \qquad \text{и} \qquad \inf_{P \in \mathcal{P}(I)} \left|\overline{\omega}_P(A)\right| = \mu_e(A).$$

Број $\mu_i(A)$ називамо унутрашњом мером по Жордану скупа A, док број $\mu_e(A)$ називамо спољашњом мером по Жордану скупа A. Из претходног увек важи $\mu_i(A) \leqslant \mu_e(A)$. Уколико је $\mu_i(A) = \mu_e(A)$ за скуп A кажемо да је мерљив по Жордану а тај број означавамо са $\mu(A)$ и називамо га $m-$димензионалном Жордановом мером скупа A.

Својства мере

Приметимо прво да увек имамо $\mu(A) \geqslant 0$ за сваки скуп $A \subset \mathbb{R}$. Даље

Став

1. Ако су A, B мерљиви по Жордану и $A \subset B$ тада је $\mu(A) \leqslant \mu(B)$.
2. Ако је A непразан, отворен и мерљив, тада је $\mu(A) > 0$.
3. Мера скупа A једнака је нули ако и само ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји подела P, таква да је $|\overline{\omega}_P(A)| < \varepsilon$.

Доказ се може погледати у књизи.

Следећа теорема нам даје услов еквивалентан мерљивости.

Теорема Ако је $A \subset \mathbb{R}^m$ ограничен скуп, тада је $\mu_e(\partial A) = \mu_e(A) - \mu_i(A)$.

Доказ Уочимо произвољну поделу P квадра I који садржи A. Са једне стране, уколико неки подеони сегмент I_k налази у $\overline{\omega}_P(\partial A)$, то он садржи барем једну тачку од ∂A (заправо од $\overline{\partial A}$, али може се показати да је скуп ∂A увек затворен), а самим тим како је $\overline{A} = A \cup \partial A$, то садржи и тачку од $\overline{A}$, тј. $I_k \in \overline{\omega}_P(A)$. Са друге стране, уколико се неки подеони сегмент I_k налази у $\overline{\omega}_P(A)$ а не у $\underline{\omega}_P(A)$, што значи да I_k садржи неку тачку x која није унутрашња тачка скупа A. Тада, I_k мора да садржи и барем једну рубну тачку од A. Ово следи из тога што је скуп A° отворен (што се директно показује) па тиме, ако би у I_k биле само спољашње и унутрашње тачке од A, оне би направиле дисконексију од I_k, што је немогуће јер је I_k повезан. Отуда је $\overline{\omega}_P(\partial A) = \overline{\omega}_P(A) \setminus \underline{\omega}_P(A)$, а одатле имамо да је

$$|\overline{\omega}_P(\partial A)| = |\overline{\omega}_P(A)| - |\underline{\omega}_P(A)|.$$

Узмиањем инфимума по свим поделама добијамо тврђење Теореме, јер је $\inf(X - Y) = \inf X - \sup Y$.

Последица Ограничен скуп $A \subset \mathbb{R}^m$ је мерљив ако и само ако је $\mu(\partial A) = 0$.

Нека основна својства мере су

Став Нека су $A, B \subset \mathbb{R}^m$ мерљиви скупови. Тада:

1. Скупови $A \cup B, A \cap B$ и $A \setminus B$ су мерљиви.
2. Ако је $A \cap B \subset \partial A \cup \partial B$ онда је $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.
3. Ако је $A \subset B$, тада је $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

Доказ се може погледати у књизи (мада није неопходно). Својство 1. се доказује из основних својстава операције ∂A, односно њеним слагањем са операцијама $\cup$ и $\cap$. Својство 2. каже да ако су A и B мање више дисјунктни, односно ако им је пресек садржан у рубовима (који су мере нула), тада је мера уније збир мера и то је једно од освновних својстава мере. Својство 3. је само реформулација својства 2.

Примери

1. Нека је $A = [0, 1] \cap \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ и нека је $x \in [0, 1]$. Ако узмемо било коју околину $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ она садржи у себи рационалан број, а свакако и ирационалан. Тиме, x је рубна тачка скупа A, тј. $\partial A = [0, 1]$ што је мере 1. Дакле, скуп A није мерљив.

2. Пре него што пређемо на разумне примере мерљивих скупова, покажимо да график непрекидне функције има меру нула. Прецизније, нека је D затворен и ограничен скуп у $\mathbb{R}^{m-1}$ и $f \colon D \to \mathbb{R}$. Нека је $A = \{(x, f(x)|x \in D)\} \subset \mathbb{R}^m$ график функције f. Тада је мера од A једнака нули. Формално, D је компактан, те је f и равномерно непрекидна на D. Отуда, за $\varepsilon > 0$, постоји $\delta > 0$ такво да је $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ кад год је $d_2(x_1, x_2) < \delta$. Нека је $I \subset \mathbb{R}^{m-1}$ квадар који садржи D и поделимо га тако да су сви подеони сегменти I_k мали довољно да из $x_1, x_2 \in I_k$ следи да је $d_2(x_1, x_2) < \delta$. Даље, за I_k из претходне поделе, изаберимо произвољно $x_0 \in I_k$ и формирајмо скуп $S_k = I_k \times [f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon]$. Уколико је $x \in I_k$ произвољно, тада је $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ по конструкцији, а одатле је и $(x, f(x)) \in S_k$. Другачије речено, цео график функције f изнад I_k је садржан у S_k. Даље, како је S_k квадар, то је $\mu(S_k) = \mu(I_k) \cdot 2\varepsilon$. Најзад, ако претходно поновимо над сваким квадром I_k и формирамо скуп $S = \cup S_k$, добијамо скуп који садржи A и

$$\mu(S) = \sum_k \mu(S_k) = \sum \mu(I_k) 2\varepsilon = 2\varepsilon \cdot \mu(I),$$

јер су скупови S_k дисјунктни. Како последњи израз може да се учини произвољно малим, то је $\mu(A) = 0$. Неформално, претходно је и очекивано, јер је график функције (у овом случају) $m - 1$ димензионални објекат, прецизније слика при f $m - 1-$димензионалног објекта D, а тражимо његову $m-$димензионалну меру. Из претходног имамо и да је мера површи дате са $S : F(x) = 0$ такође мере нула. Заиста, како смо раније показали, S је локално график функције, који је мере нула, а тиме је и цео скуп мере нула. Одавде имамо да су неки разумни скупови попут $\{x \in \mathbb{R}^m | f(x) \leqslant c\}$ мерљиви, где је f нека иоле разумна функција. Наиме, може се показати, да је граница таквог скупа $\{x | f(x) = c\}$, што је по претходном мере нула. Такви скупови су нпр. лопта $\{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}$, (чија је граница сфера), као и разни други основни геометријски објекти.

Још неке примере мерљивих скупова погледати у књизи.

$n-$ **интеграл**

Као што је раније речено, како смо видели шта би требало да мења дужину интервала у Римановој суми, даље интеграл дефинишемо као раније. Ипак, пре тога нам треба још једна техничка ствар, наиме аналогија параметра поделе, тј. појам којим ћемо рачунати да је одређена подела довољно "фина". У ту сврху дефинишемо дијаметар скупа

$$\delta A = \sup\{d(x,y) | x, y \in A\},$$

која има смисла у било ком метричком простору. Претходно нисмо помињали раније, јер у случају скупа $\mathbb{R}$ растојање и мера су исти (тј. оба су дужина). Са друге стране, видимо да постоје квадри који су мале мере, а имају тачке које су далеко (примера ради правоугаоник чија је једна ивица дужине n а друга $\frac{1}{n^2}$ има тачке на растојању n, док му је површина $\frac{1}{n}$). Одатле, за фину поделу није довољно захтевати да су подеони сегменти само мале мере, већ јаче да су малог дијаметра.

Дефиниција Нека је $I \subset \mathbb{R}^m$ квадар и $f \colon I \to \mathbb{R}$ функција. Нека је $P = \{I_1, \ldots, I_k\}$ подела квадра I и $c = \{c_1, \ldots, c_k\}$ истакнуте тачке, тј. $c_i \in I_i$. Збир

$$\sigma(f, P, c) = \sum_{i=1}^{k} f(c_k)\mu(I_k),$$

називамо Римановом сумом по подели P са истакнутим тачкама c. Уколико постоји $J \in \mathbb{R}$, такво да за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$, тако да за сваку поделу P за коју је параметар поделе $\lambda(P) = \max_i \delta I_i < \delta$ и сваки избор истакнутих тачака c важи

$$\big|\sigma(f, P, c) - J\big| < \varepsilon,$$

кажемо да је функција f Риман - интеграбилна (или само интеграбилна) на I, а број J називамо интегралом (или $m-$интегралом) функције f по I.

Број J означавамо са

$$J = \int_I f(x)dx, \quad \int_I f(x_1, x_2, \ldots, x_m)dx_1dx_2\ldots dx_m, \quad \overbrace{\int\cdots\int_I}^{m} f(x_1, x_2, \ldots, x_m)dx_1dx_2\ldots dx_m.$$

Слично као и раније, користићемо и ознаку $J = \lim_{\lambda(P)\to 0} \sigma(f, P, c)$. Такође, користимо ознаку $\mathcal{R}(I)$ за све интеграбилне функције на скупу I.

Нешто касније видећемо како се претходна дефиниција проширује на интеграле по произвољном мерљивом скупу.

Напомена Приметимо, да сада када знамо за које скупове има смисла мера, тј. који су скупови мерљиви по Жордану, уместо поделе сегмента на сегменте, могли смо да правимо и поделе на произвољне мерљиве скупове. Међутим, ове две дефиниције испадну еквивалентне. Доказ и више детаља се може погледати у књизи.

За почетак, потпуно аналогно као раније, уколико функција није ограничена, адекватним избором истакнутих тачака, Риманове суме се могу направити произвољно великим, тј. важи

Став Ако је реална функција $f \colon I \to \mathbb{R}$ интеграбилна, тада је она ограничена на I.

Доказ се може погледати у књизи.

Даље, аналогно се могу увести Дарбуове суме и њихова основна својства остају на снази. Наиме, за ограничену функцију $f \colon I \to \mathbb{R}$ и поделу $P = \{I_1, \ldots, I_k\}$ квадра I, дефинишемо $m_i = \inf_{x\in I_i} f(x)$ и $M_i = \sup_{x \in I_i} f(x)$. Збирове

$$s = s(f, P) = \sum_{i=1}^{k} m_i \mu(I_i) \qquad \text{и} \qquad S = S(f, P) = \sum_{i=1}^{k} M_i \mu(I_i),$$

називамо респективно доњом и горњом Дарбуовом сумом функције f по подели P.

Аналогно, како је $m_i \leqslant f(c_i) \leqslant M_i$, то је

$$s(f, P) \leqslant \sigma(f, P, c) \leqslant S(f, P),$$

за све поделе, а потпуно аналогно се показује и да је $\sup_c \sigma(f, P, c) = S(f, P)$ и $\inf_c \sigma(f, P, c) = s(f, P)$. Даље, профињивањем поделе, доња Дарбуова сума расте, а горња опада. Ово је опет последица тога да је супремум по мањем скупу мањи од супремума по већем, док за инфимум важи обрнуто. Одатле аналогно, уколико имамо две поделе P' и P'' и ако је P подела финија од обе, тада је

$$s(f, P') \leqslant s(f, P) \leqslant S(f, P) \leqslant S(f, P'').$$

Одатле, горње Дарбуове суме су ограничене одоздо, а доње одозго, те постоје

$$\underline{\int}_I f(x)dx = \sup_P s(f, p) \qquad \text{и} \qquad \overline{\int}_I f(x)dx = \sup_P S(f, P),$$

које називамо доњи и горњи Дарбуов интеграл.

Потпуно аналогно као у једнодимензионалном случају се доказује

Теорема Нека је f ограничена функција на квадру $I \subset \mathbb{R}^m$. Тада су следећи услови еквивалентни:

1. f је интеграбилна на I.
2. $(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall P \in \mathcal{P}(I))(\lambda(P) < \delta \Rightarrow S(f, P) - s(f, p) < \varepsilon)$

3. $(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall P\in\mathcal{P}(I))(\lambda(P)<\delta\Rightarrow|\sigma(f,P,c')-\sigma(f,P,c'')|<\varepsilon)$
4. $(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall P_1,P_2\in\mathcal{P}(I))(\lambda(P_1)<\delta,\lambda(P_2)<\delta\Rightarrow|\sigma(f,P,c')-\sigma(f,P,c'')|<\varepsilon)$
Из претходног, директно можемо да покажемо да су непрекидне функције интеграбилне.
Став Ако је реална функција f непрекидна на квадру I тада је она интеграбилна на њему.
Доказ је аналоган једнодимензионалном случају и следи из равномерне непрекидности функције f. Наиме, за $\varepsilon>0$ постоји $\delta>0$, за које $d(x,y)<\delta$ повлачи $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. Избором поделе P, за коју је $\lambda(P)<\delta$ из услова 3. претходног става, имамо да је тада

$$\left|\sigma(f,P,c')-\sigma(f,P,c'')\right|\leqslant\sum_{i=1}^{k}|f(c_i')-f(c_i'')|\mu(I_i)\leqslant\varepsilon\sum_{i=1}^{k}\mu(I_i)=\varepsilon\mu(I).$$

Детаљи се могу погледати у књизи.
Скупови Лебегове мере нула
Карактеризација интеграбилности у $\mathbb{R}^m$ у суштини потпуно је аналогна интеграбилности у $\mathbb{R}$. Да бисмо то прецизирали, треба нам Лебегова мера, прецизније само да знамо шта су скупови Лебегове мере нула.
Дефиниција Лебегова мера квадра $I_{a,b}$ је $m(I_{a,b})=\prod_{i=1}^{m}(b_i-a_i)$. За скуп A кажемо да има Лебегову меру нула ако за свако $\varepsilon>0$ постоји пребројиво много сегмената (у $\mathbb{R}^m$) I_{a_n,b_n}, таквих да је $A\subset\cup_n I_{a_n,b_n}$ и $\sum_{n=1}^{\infty}m(I_{a_n,b_n})<\varepsilon$.
Неформално, Лебегова и Жорданова мера су исте и одговарају, што би се рекло, некој уобичајенос мери у $\mathbb{R}^m$, као што су дужина, површина и запремина итд. Разликују се по скуповима на којима су дефинисане (Лебегова је дефинисана на широј класи), а проблематика дефинисања Лебегове мере (којом се нећемо бавити) је баш у томе да се нађе класа скупова на којима је она дефинисана. Згодна ствар је у томе, да и без знања шта је Лебегова мера, знамо шта значи да неки скуп има Лебегову меру нула, што смо и раније користили.
Основна својства скупова Лебегове мере нула су слична као раније:
1. Пребројиви скупови имају Лебегову меру нула. Заиста, ако је A пребројив, тј. $A=\{x_1,x_2,\dots\}$ и узмемо да је I_1 квадар који садржи x_1 мере мање од $\varepsilon/2$, I_2 квадар мере $\varepsilon/4$ који садржи x_2, итд. добијамо да је $A\subset\cup_n I_n$, јер свакако имамо $x_k\in I_k$, док је $\sum_{n=1}^{\infty}m(I_n)=\varepsilon\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\varepsilon$. Одавде видимо да скуп $\mathbb{Q}^m\subset\mathbb{R}^m$ има Лебегову меру нула док Жорданова мера на њему није дефинисана, како смо раније видели.
2. Општије мало, пребројива унија скупова $A_1,A_2,\dots$ мере нула такође има меру нула. Заиста, скуп A_1 можемо покрити са пребројиво много сегмената укупне мере мање од $\varepsilon/2$, A_2 опет са пребројиво много сегмената укупне мере мање од $\varepsilon/4$, итд A_n можемо покрити са пребројиво много сегмената укупне мере мање од $\varepsilon/2^n$. Одатле, ако посматрамо све сегменте који прекривају сваки од скупова A_k, њих има пребројиво много, а укупна мера им је мања од $\varepsilon/2+\varepsilon/4+\ldots+\varepsilon/2^n+\ldots=\varepsilon$.
3. Директно се проверава и да ако је $A\subset B$ и B је скуп Лебегове мере нула, тада је и A скуп Лебегове мере нула.
Иако по претходном скуп Лебегове мере нула не мора имати Жорданову меру, важи
Лема Скуп $A\subset\mathbb{R}^m$ Жорданове мере нула има Лебегову меру нула. Ако је Лебегова мера A нула и ако је још A компактан, тада је и Жорданова мера скупа A једнака нули.
Доказ се може погледати у књизи. Одавде имамо да раније помињани скупови који су Жорданове мере нула, што су најчешће били скупови мање димензије од амбијентног простора, су и Лебегове мере нула.
Као и раније важи карактеризација
Теорема Ограничена функција f на сегменту I је интеграбилна (у Римановом смислу) ако и само ако је њен скуп прекида Лебегове мере нула.
Доказ се може погледати у књизи, али није неопходан.
Интеграл по скуповима мерљивим по Жордану
Као што смо раније поменули, осим интеграла по сегментима (што смо до сада посматрали), интересоваће нас и интеграли по многим другим скуповима. Знајући претходну карактеризацију интеграбилности, ова два појма можемо сада једноставно да изједначимо.
Нека је $f\colon D\to\mathbb{R}$ ограничена реална функција на ограниченом скупу $D\subset\mathbb{R}^m$ који је мерљив по Жордану. Нека је I било који квадар који садржи D (какав постоји, јер је D ограничен). Дефинишимо $g\colon I\to\mathbb{R}$ са

$$g(x)=\begin{cases}f(x), x\in D\\ 0, x\in I\setminus D\end{cases}$$

За функцију f кажемо да је интеграбилна у Римановом смислу на скупу D ако постоји интеграл $\int_i g(x)dx$. При томе, дефинишемо

$$\int_D f(x)dx=\int_I g(x)dx.$$

Претходна дефиниција је логична, јер смо само допунили функцију f нулом до скупа по коме знамо да интегралимо. Наравно допуњавање нулом не утиче на вредност интеграла.
Претходна карактеризација интеграбилности остаје на снази и даље

Теорема Нека је $D \subset \mathbb{R}^m$ ограничен скуп који је мерљив по Жордану и $f\colon D \to \mathbb{R}$ ограничена функција. Она је интеграбилна на D ако и само ако је њен скуп прекида Лебегове мере нула.
Ова Теорема је директна последица претходне Лебегове Теореме. Наиме, интеграбилнсот f је по дефиницији исто што и интеграбилност g на сегменту I. Приметимо да смо додефинисањем могли само да додамо прекиде у рубним тачкама скупа D (које су Лебегове мере нула). Заиста, ако је x унутрашња тачка скупа D, она има околину која је цела саджана у D а на тој околини f и g се подударају, одакле је у тој тачки g непрекидна ако и само ако је f непрекидна. Аналогно, у унутрашњим тачкама скупа $I \setminus D$, је g једнака нули на некој околини, те је и у њима непрекидна. Остају само рубне тачке, али њих је већ мере нула, јер је D мерљив по Жордану.
Из претходне дефиниције имамо и једну последицу, наиме да Жорданову меру можемо изразити интегралом, тј.

$$\mu(D) = \int_I \chi_D(x)dx,$$

где је I било који сегмент који садржи скуп D, а $\chi_D(x) = 1$, уколико је $x \in D$ а нула иначе. Заправо из дефиниције интеграла по квадру I можемо да видимо да интеграл константне функције $f(x) = c$ износи $c\mu(I)$, а претходно се може закључити посматрањем одговарајућих Дарбуових сума. Детаљи се могу погледати у књизи.

Својства интеграла

Основна својства интеграла, као што су линеарност, Теореме о монотоности, итд. и даље остају на снази. Докази су потпуно аналогни и углавном се своде на аналогна својства која имају суме. Једноставности нотације ради, како све радимо на скуповима мерљивим по Жордану, такве скупове називаћемо само мерљивим.
Став Нека је $D \subset \mathbb{R}^m$ мерљив скуп, $f, g \in \mathcal{R}(D)$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тада је $\alpha f + \beta g \in \mathcal{R}(D)$ и важи

$$\int_D \alpha f(x) + \beta g(x)dx = \alpha \int_D f(x)dx + \beta \int g(x)dx.$$

Став Нека су $A, B \subset \mathbb{R}^m$ мерљиви скупови, такви да је $A^\circ \cap B^\circ = \emptyset$ и нека је $D = A \cup B$. За реалну функцију f важи да је $f \in \mathcal{R}(D)$ ако и само ако је $f \in \mathcal{R}(A)$ и $f \in \mathcal{R}(B)$ и важи

$$\int_D f(x)dx = \int_A f(x)dx + \int_B f(x)dx.$$

Доказ погледати у књизи. Последње тврђење је аналогија за више димензија тврђења да је $\int_a^c f dx = \int_a^b f dx + \int_b^c f dx$. Услов да је $A^\circ \cap B^\circ = \emptyset$ у суштини значи да се A и B секу само по граници, што је скуп мере нула, одакле је тврђење и очекивано.
Став Нека је $D \subset \mathbb{R}^m$ мерљив скуп и $f, g \in \mathcal{R}(D)$. Тада је:
1. $f \cdot g \in \mathcal{R}(D)$.
2. $|f| \in \mathcal{R}(D)$.
3. Уколико је $|f(x)| \geqslant c > 0$, за све $x \in D$, тада је и $1/f \in \mathcal{R}(D)$.

Претходни став се своди на Лебегову Теорему о интеграбилности и доказ је потпуно аналоган ранијем. Даље, интеграли поштују $\leqslant$, прецизније
Став Нека је $D \subset \mathbb{R}^m$ мерљив скуп и $f, g \in \mathcal{R}(D)$ такве да је $f(x) \leqslant g(x)$. Тада је

$$\int_D f(x)dx \leqslant \int_D g(x)dx.$$

Довољно је показати да је интеграл ненегативне функције ненегативан број, што ако посматрамо Риманову суму $\sum f(c_i)\mu(I_i)$ следи из тога што је мера $\mu(I_i)$ позитиван број. Детаље видети у књизи.
Као и раније, последица претходног става је тзв. прва Теорема о средњој вредности
Теорема Нека је $D \subset \mathbb{R}^m$ мерљив скуп и $f, g \in \mathcal{R}(D)$ такве да је $g(x) \geqslant 0$. Ако означимо $m = \inf_{x \in D} f(x)$ и $M = \sup_{x \in D} f(x)$, важи

$$m \int_D g(x)dx \leqslant \int_D f(x)g(x)dx \leqslant M \int_D g(x)dx.$$

Специјално, из претходне Теореме имамо да постоји $k \in [m, M]$ такво да је $k = \int_D f(x)g(x)dx / \int_D g(x)dx$, што се у случају $g(x) = 1$ своди на $k = \frac{1}{\mu(D)} \int_D f(x)dx$. Уколико је f још и непрекидна а D повезан скуп, тада важи и да f узима поменуту вредност k. Прецизније
Став Нека је $D \subset \mathbb{R}^m$ мерљив и повезан скуп, $f, g \in \mathcal{R}(D)$ где је f непрекидна а $g(x) \geqslant 0$. Тада постоји $c \in D$ такво да је

$$\int_D f(x)g(x)dx = f(c) \int_D g(x)dx.$$

Доказ следи из претходног и тога да је слика скупа D при f интервал који сигурно садржи интервал (m, M), где се k налази.

Став За функцију $f \in \mathcal{R}(D)$ важи неједнакост

$$\left|\int_D f(x)dx\right| \leqslant \int_D \left|f(x)\right|dx.$$

Доказ се своди на неједнакост

$$-\left|f(x)\right| \leqslant f(x) \leqslant \left|f(x)\right|.$$

Свођење $n-$ интеграла на вишеструки

До сада смо само разматрали својства $n-$интеграла и нисмо рекли ништа о њиховом конкретном рачунању. Што се рачуна тиче, прва важна Теорема је наредна, која се назива и Фубинијева Теорема, која своди рачунање интеграла по вишедимензионалном квадру на неколико узастопних обичних интеграла. Прецизније

Теорема Нека је $f(x,y)$ интеграбилна функција на правоугаонику $I = [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$. Тада важе једнакости

$$\iint_I f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy.$$

Проћићемо укратко кроз основне идеје доказа, у нотацији из књиге. Оназчимо са I' и I'' интервале $[a,b]$ и $[c,d]$ респективно и поделе $P' = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_p = b\}$ на интервале једнаке дужине односно $P'' = \{y_0 = c, y_1, \ldots, y_p = d\}$ исто на једнаке интервале. Нека су $h = x_i - x_{i-1}$ и $k = y_k - y_{k-1}$ дужине одговарајућих подеоних интервала. Ове поделе индукују поделу $P = \{I_{i,j} | i,j = 1, \ldots, p\}$ правоугаоника $I = I' \times I''$, где је $I_{i,j} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ и по претходном имамо да је $\mu(I_{i,j}) = hk$. Означимо даље са $m_{i,j} = inf_{(x,y)\in I_{i,j}} f(x,y)$ и $M_{i,j} = sup_{(x,y)\in I_{i,j}} f(x,y)$. При овој подели, имамо да доња и горња Дарбуова сума износе

$$s(f,P) = \sum_{i,j=1}^{p} m_{i,j}\mu(I_{i,j}) = \sum_{i,j=1}^{p} m_{i,j}hk, \qquad S(f,P) = \sum_{i,j=1}^{p} M_{i,j}hk.$$

Фиксирајмо сада $x \in [x_{i-1}, x_i]$. Тада имамо

$$m_{i,j} \leqslant \inf_{y\in[y_{j-1},y_j]} f(x,y),$$

јер је $m_{i,j}$ инфимум по већем скупу, где дакле можемо да мењамо и x, а не да га држимо фиксираног, а самим тим важи дата неједнакост. Аналогно важи и

$$\sup_{y\in[y_{j-1},y_j]} f(x,y) \leqslant M_{i,j}$$

Настављајући са првом неједнакости, за и даље фиксирано $x \in [x_{i-1}, x_i]$, уколико саберемо претходне неједнакости по j и измножимо са k, добијамо

$$\sum_{j=1}^{p} m_{i,j}k \leqslant \sum_{j=1}^{p} \inf_{y\in[y_{j-1},y_j]} f(x,y)k.$$

Ослободимо се сада претпоставке за x. Наиме, претходно је тачно за било које $x \in [x_{i-1}, x_i]$, а одатле, узимањем инфимума по свим тим x (прецизније, лева страна не зависи од x, те је доње ограничење по x за десну страну, а тиме је већа од инфимума) добијамо

$$\sum_{j=1}^{p} m_{i,j}k \leqslant \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} \sum_{j=1}^{p} \inf_{y\in[y_{j-1},y_j]} f(x,y)k.$$

Опет, множењем обе стране са h и сабирањем по свим i добијамо

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} m_{i,j}hk = s(f,P) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} \left(\sum_{j=1}^{p} \inf_{y\in[y_{j-1},y_j]} f(x,y)k\right)h.$$

Приметимо, за фиксирано x, израз под заградом је доња Дарбуова сума функције $g(y) = f(x,y)$ (посматране као функције по y) са поделом P'' интервала $[c,d]$. Како је функција f ограничена на целом правоугаонику, то је ограничена свакако и функција g, те отуд постоје горњи и доњи Дарбуов интеграл, који су одговарајући inf и sup. Ипак, функција не мора бити интеграбилна за свако x, о чему ће бити речи касније. Претпоставићемо за сада да јесте интеграбилна, а случај када није може се погледати у књизи (што није суштински корак). Приметимо да ако је f непрекидна на целом правоугаонику, ово свакако јесте случај, јер је $f(x,y)$ тада непрекидна као функција по y. Како је

$$\sup_{P''} \sum_{j=1}^{p} \inf_{y\in[y_{j-1},y_j]} f(x,y)k = \int_c^d f(x,y)dy,$$

то настављајући претходну процену добијамо

$$\sum_{i=1}^{p}\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]}\Big(\sum_{j=1}^{p}\inf_{y\in[y_{j-1},y_j]}f(x,y)k\Big)h \leqslant \sum_{i=1}^{p}\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]}\int_c^d f(x,y)dyh \leqslant \sum_{i=1}^{p}\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}\int_c^d f(x,y)dyh,$$

одакле сада мање више радимо исте процене само за горње Дарбуове суме. Прво, како је $\int_c^d f(x,y)dy$ и инфимум горњих Дарбуових сума, то је он мањи од горње Дарбуове суме за поделу P'', чиме добијамо

$$\sum_{i=1}^{p}\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}\int_c^d f(x,y)dyh \leqslant \sum_{i=1}^{p}\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}\Big(\sum_{j=1}^{p}\sup_{y\in[y_{j-1},y_j]}f(x,y)k\Big)h \leqslant S(f,P),$$

где је последња неједнакост потпуно аналогна првој за доње Дарбуове суме. Дакле, са издвајањем битних делова, добили смо

$$s(f,P)\leqslant \sum_{i=1}^{p}\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]}\int_c^d f(x,y)dyh \leqslant S(f,P).$$

Приметимо да је у средини доња Дарбуова сума функције $h(x)=\int_c^d f(x,y)dy$. Одатле, пуштањем да $p\to\infty$, како оба $s(f,P), S(f,P)$ конвергирају ка $\iint_I f(x,y)dxdy$, по Теореми о два полицајца добијамо

$$\int_a^b h(x)dx = \int_a^b\Big(\int_c^d f(x,y)dy\Big)dx = \iint\limits_I f(x,y)dxdy,$$

уз додатну претпоставку о интеграбилности $f(x,y)$ по y, за свако фиксирано x. Друга једнакост из формулације се показује аналогно.

Из доказа теореме видимо и како интерпретирамо израз $\int_a^b(\int_c^d f(x,y)dy)dx$. Дакле, прво за фиксирано x израчунамо $\int_c^d f(x,y)dy$, где x посматрамо као константу, а рачунамо интеграл по y уобичајено као обичан интеграл функције на $\mathbb{R}$. Када израчунамо тај интеграл, добијамо функцију од x а затим израчунамо њен интеграл по $[a,b]$.

Што се поменутог услова тиче, да може да постоји x за које функција $f(x,y)$ није интеграбилна на $[c,d]$, имамо следеће. Наиме, f је интеграбилна ако јој је скуп прекида раванске мере нула, али то не гарантује да пресек скупа прекида са $\{x\}\cdot[c,d]$, где би требао да буде скуп прекида $f(x,y)$ по y, има меру нула као подскуп праве. Нпр узмимо функцију на $[0,1]\times[0,1]$, дату са

$$f(x,y)=\begin{cases}0, y\in(0,1]\\ \chi(x), y=0\end{cases}$$

где је $\chi(x)$ Дирихлеова функција. Тада f има скуп прекида на $[0,1]\times\{0\}$ што је дуж и има раванску меру нула. Са друге стране, $f(x,0)$ није интеграбилна по x. И поред тога, овај услов није суштински, јер се може показати да оваквих x има мало, тако да је Теорема тачна и за функцију која је интеграбилна на I. У том случају, за x за које функција $f(x,y)$ није интеграбилна по y, може да се узме било који број између њеног доњег и горњег Дарбуовог интеграла.

Уз аналоган, али ружнији доказ (који није неопходан за усмени), претходна Теорема важи за произвољне квадре. Прецизније

Теорема Нека је $f\colon I\to\mathbb{R}$ интеграбилна на сегменту $I=I'\times I''\subset\mathbb{R}^m$, где су I', I'' сегменти. Тада важи

$$\int_I f(u,v)dudv = \int_{I''}\Big(\int_{I'} f(u)du\Big)dv = \int_{I'}\Big(\int_{I''} f(v)dv\Big)du,$$

где дакле променљиве u и v могу бити векторске.

Индукцијом, добијамо како се рачуна интеграл по сегменту у $\mathbb{R}^m$.

Последица Нека је $f\colon I\to\mathbb{R}$ интеграбилна на сегменту $I=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\ldots\times[a_m,b_m]$. Тада важи једнакост

$$\int_I f(x)dx = \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\cdots\int_{a_m}^{b_m} f(x_1,x_2,\ldots,x_m)dx_m\ldots dx_2dx_1,$$

где дакле, функцију f интегралимо прво по x_m, а све остале променљиве држимо фиксираним. Добијену функцију онда интегралимо по x_{m-1} итд. Наравно редослед променљивих није важан, можемо интегралити којим год редоследом.

Наравно, од интереса су нам и интеграли по скуповима који нису сегменти. Наводимо још једну последицу Фубинијеве Теореме, која се односи на скупове који су између графика две функције.

Последица Нека су $\phi_1,\phi_2\colon D\to\mathbb{R}$ непрекидне функције, где је $D\subset\mathbb{R}^{m-1}$ мерљив скуп. Нека је $A=\{(u,x_m)|u\in D, \phi_1(u)\leqslant x_m\leqslant\phi_2(u)\}$ и $f\in\mathcal{R}(D)$. Тада је

$$\int_A f(u,x_m)dudx_m = \int_D\Big(\int_{\phi_1(u)}^{\phi_2(u)} f(u,x_m)dx_m\Big)du.$$

Доказ погледати у књизи. Идеја је изабрати сегмент $I = I_1 \times I_2$, где I_1 садржи скуп D а I_2 садржи све вредности $\phi_1(x)$ и $\phi_2(x)$. Тада је по претходном

$$\int_A f(u, x_m) du dx_m = \int_{I_1} \left(\int_{I_2} g(u, x_m) dx_m \right) du,$$

где је g функција која је једнака функцији f на скупу A а нула иначе. За почетак је $\int_{I_2} g(u, x_m) dx_m = \int_{\phi_1(u)}^{\phi_2(u)} f(u, x_m) dx_m$, а даље је по дефиницији и

$$\int_{I_1} \left(\int_{I_2} g(u, x_m) dx_m \right) du = \int_D \left(\int_{\phi_1(u)}^{\phi_2(u)} f(u, x_m) dx_m \right) du,$$

јер је ван тог скупа g једнака нули.

Смена променљиве

Слично као код обичног интеграла и вишеструки се могу поједноставити увођењем смена, тј. мењањем координата у областима по којима интегралимо. Претпоставимо да имамо области $U, V \subset \mathbb{R}^m$ и да имамо функцију $\Psi \colon \overline{U} \to \overline{V}$ која мења координате, прецизније уколико означимо са x координате на U и са y на V, да имамо $y = (y_1, \ldots, y_m) = \Psi(x)$, односно

$$y_1 = \Psi_1(x_1, \ldots, x_m)$$
$$\vdots$$
$$y_m = \Psi_m(x_1, \ldots, x_m),$$

која је бијекција из U на V и претпоставићемо додатно да су парцијални изводи Ψ непрекидни на U. У свакој тачки $a \in U$ дефинисан је Јакобијан са

$$\det \Psi(a) = \frac{D(y_1, \ldots, y_m)}{D(x_1, \ldots, x_m)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial \Psi_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \Psi_m}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

Даље, уколико имамо функцију $f \colon V \to \mathbb{R}$, са $f \circ \Psi$ добијамо функцију на U и инетересује нас веза интеграла тих функција по скуповима U и $V = \Psi(U)$. Пре саме Теореме која нам даје ту везу, прођимо кроз три основна примера смена. Сва три детаљније погледати у књизи, због цртежа.

Поларне координате Координате тачке (x, y) у равни можемо задати преко поларних координата, наиме означимо са ϕ угао (у $[0, 2\pi]$) који вектор (x, y) заклапа са $x-$осом, а са ρ растојање тачке (x, y) од координатног почетка. Овако задане координате одређују (мање - више) једнозначно све тачке равни. Заиста, ако имамо претходна два податка, видимо да је $x = \rho \cos \phi$ и $y = \rho \sin \phi$. Означимо то пресликавање са Ψ, прецизније нека је $\Psi(\rho, \phi) = (x, y)$. За домен ρ узимамо природно $[0, +\infty)$, што све могу бити поменута растојања, а за ϕ већ поменути $[0, 2\pi]$ да би угао био једнозначно одређен. За парцијалне изводе имамо

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial \rho} = \frac{\partial x}{\partial \rho} = \cos \phi, \qquad \frac{\partial \Psi_1}{\partial \rho} = \frac{\partial x}{\partial \phi} = -\rho \sin \phi,$$

и

$$\frac{\partial \Psi_2}{\partial \rho} = \frac{\partial y}{\partial \rho} = \sin \phi, \qquad \frac{\partial \Psi_2}{\partial \rho} = \frac{\partial y}{\partial \phi} = \rho \cos \phi.$$

Што се јакобијана тиче, добија се

$$\frac{D(x, y)}{D(\rho, \phi)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \cos \phi & -\rho \sin \phi \\ \sin \phi & \rho \cos \phi \end{pmatrix} = \rho.$$

Приметимо, на крају да пресликавање Ψ не задовољава баш горе претпостављене услове. Прво, углови 0 и 2π су исти, тј. дају исте тачке, а такође координатном почетку $(0, 0)$ одговара наравно $\rho = 0$, али и било који угао ϕ. Занемаривањем овог скупа, имамо да је Ψ бијекција из $(0, +\infty) \times (0, 2\pi)$ на раван без ненегативног дела $x-$ осе. Ипак, како су ово скупови раванске мере нула, приликом интеграције не утичу на вредност интеграла, одакле не морамо да водимо рачунамо о томе (по питању интеграла).

Поменимо још, што се инверзне смене тиче, имамо да је $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, док се угао ϕ мало рузније изражава. Нпр. у првом квадранту можемо га представити као $\phi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.

Цилиндричне координате Преношење поларних координата у простор $\mathbb{R}^3$ можемо учинити на неколико природних начина. Најједноставније би било да са x и y координатама урадимо исто, док z координату не дирамо. Те координате називамо цилиндричне. Прецизније, узимамо $\Psi(\rho, \phi, z) = (\rho \cos \phi, \rho \sin \phi, z)$, а за домен узимамо $[0, 2\pi] \times [0, +\infty) \times \mathbb{R}$, чиме опет добијамо бијекцију (уз сличне напомене око бијективности). За Јакобијан врло слично добијамо

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \phi, z)} = \det \begin{pmatrix} \cos \phi & -\rho \sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \rho \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \rho.$$

Сферне координате Други начин је мало компликованији. Наиме, уколико имамо тачку (x, y, z) у простору, нека је опет ρ растојање тачке (x, y, z) од координатног почетка (дакле, $\rho^2 = x^2+y^2+z^2$) и означимо са θ оштар угао који заклапа вектор (x, y, z) са равни O_{xy}. Тада је прво $z = \rho \sin\theta$, а даље, пројекција тог вектора на раван износи вектор $(x, y, 0)$ и има интензитет $\rho\cos\theta$. Даље, у равни O_{xy} урадимо исто као са поларним координатама. Нека је ϕ угао који тај вектор заклапа са позитивним делом $x-$осе, где даље имамо да је $x = \rho\cos\theta\cos\phi$ и $y = \rho\cos\theta\sin\phi$. Тиме имамо бијекцију $\Psi(\rho, \phi, \theta) = (x, y, z)$ дефинисану на $[0, +\infty) \times [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ на $\mathbb{R}^3$ опет уз аналогне напомене. За Јакобијан имамо

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \phi, \theta)} = \det\begin{pmatrix}\cos\theta\cos\phi & -\rho\cos\theta\sin\phi & -\rho\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi & \rho\cos\theta\cos\phi & -\rho\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta & 0 & \rho\cos\theta\end{pmatrix} = \rho^2\cos\theta.$$

Напомена: За сферне координате се још користи и да је угао θ задат као угао који заклапа вектор (x, y, z) са позитивним делом $z-$осе (како је у књизи). Ствар је суштински иста, осим што се добија мало другачији рачун.

Претходне примере погледати у књизи, или на било ком месту које садрзи цртеже, где ствар постаје јаснија.

Теорему о смени променљиве наводимо без доказа.

Теорема Нека имамо области U и V и пресликавање $\Psi\colon U \to V$ које задовољава услове са почетка овог дела (дакле, да је бијекција и да су парцијални изводи непрекидни на затворењу U). Означимо још, као пре са x координате у U и са $y = \Psi(x)$. Нека је $f \in \mathcal{R}(V)$ интеграбилна функција. Тада је и функција $f \circ \Psi$ интеграбилна на U и важи

$$\int_V f(y)dy = \int_U (f\circ\Psi)(x)\Big|\frac{D(y_1, \ldots, y_m)}{D(x_1, \ldots, x_m)}\Big|dx.$$

Уместо доказа: Може се показати да ако имамо квадар $I \subset \mathbb{R}^m$ и линеарно пресликавање задано матрицом A, запремина паралелепипеда $A(I)$ износи $|detA|\mu(I)$. Ово се може проверити у дводимензионалном случају, ко жели за јединични квадрат $I = \{(x, y)|x, y \in [0, 1]\}$ при пресликавању $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$ или три димензије се сетити дефиниције мешовитог производа. У сваком случају, линеарно пресликавање растеже запремину са коефицијентом $\det A$. Идеја је одатле апроксимирати то својство са изводом Ψ који је линеаран, што може да се уради под условима Теореме. Опет, заинтересовани могу погледати више детаља у књизи, али није неопходно.