Имплицитне функције

Са изузетком малог броја случајева, до сада је било речи о функцијама које су експлицитно задане (или је било једноставно доћи до таквог облика), тј. све функције којима смо се бавили су биле облика

$$y = f(x),$$

где већ, x и y су вектори или скалари. Проблем наравно настаје што није увек једноставно доћи до претходног облика функције. Примера ради, ако посматрамо једнодимензионални случај, где имамо функцију $f\colon A \to B$, која је бијекција, екслпицитно израчунавање инверзне функције нмије увек могуће, иако знамо да она постоји. Прецизније инверзна функција ће бити задана једначином

$$x = f(y),$$

и решење тражене једначине по y задаје нам инверзну функцију. Такође, осим постојања, за инверзну функцију нпр. знамо и да је непрекидна уколико је f таква, да ће бити диференцијабилна у тачкама у којима извод f није нула итд.

Такође, често нам се одређене функције јављају као решења једначина $F(x,y) = 0$ (какав је и претходни пример). Уколико постоји функција $y = f(x)$, која решава ту једначину, тј. ако је $y = f(x)$ таква да је $F(x, f(x)) = 0$ и ако је таква f јединствена, кажемо да је функција f имплицитно задана једначином F. Овакви примери често долазе из геомтрије, што се може и и видети по једначинама правих и равних, као и неких основних кривих у равни и простору. Задржимо се накратко на примеру јединичне кружнице, која је задана једначином $\{(x,y)|x^2+y^2=1\}$. Другачије речено, ако означимо $F(x,y) = x^2+y^2-1$, тада је кружница решење једначине $F(x,y) = 0$. Уколико узмемо неку тачку са кружнице, (x_0, y_0), за коју је $y_0 \neq 0$, видимо да постоји околина y_0 и околина x_0 на којој је $y = f(x)$. Заправо, једини проблем са крузнхицом је што имамо два решења једначине, те је довољно да нађемо околину y_0 којој не припада друго решење (које је $-y_0$). Даље, на тој околини, y је график функције $\pm\sqrt{1-x^2}$, у зависности од знака y_0.

Са друге стране, када је $y_0 = 0$, односно у тачкама $(1,0)$ и $(-1,0)$ немамо такве околине. Заиста, уколико узмемо било коју околину тачке $y_0 = 0$, она садржи и позитивне и негативне вредности за y, тј. морали би да покријемо са једним x две могућности за решење, што функција не може да уради. Више детаља о овом примеру се може наћи у књизи.

Приметимо да смо у овој ситуацији били када смо решавали системе линеарних једначина. Наиме, ако све везане променљиве означимо са y а слободне са x, након што решимо систем, добијамо да су све везане променљиве изражене као линеарне функције од слободних.

У складу са примером кружнице, питање постојања имплицитне функције постављамо локално, тј. да ли постоји околина на којој је имлплицитна функција дефинисана и јединствена.

Најједноставниј варијанта Теореме о имплицитној функцији је следећа

Теорема Нека је $A \subset \mathbb{R}^2$ отворен скуп, $(a,b) \in A, F\colon A \to \mathbb{R}$ непрекидна функција и нека је још:

1. $F(a,b) = 0$.
2. $\frac{\partial F}{\partial y}$ постоји и непрекидан је на A.
3. $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0$.

Тада постоји околина $W = U \times V$ тачке (a,b), где је $U = \{x||x-a| < \alpha\}$ и $V = \{y||y-b| < \beta\}$ и једнозначно одређена непрекидна функција $f\colon U \to V$ таква да је $f(a) = b$ и $F(x, f(x)) = 0$, за $x \in U$.

Доказ није неопходан, али може се погледати у књизи разумевања ради, јер је сличан али једноставнији од доказа општег случаја.

Од услова претходне Теореме суштински је услов 3. и он гарантује претходно решавање једначине. Уколико посматрамо на случају линеарне функције, која је у овом случају облика $F(x,y) = ax+by$, дати услов је $b \neq 0$, одакле решавањем система нарвно видимо да y можемо да изразимо преко x.

Такође, да је услов 3. битан видимо и на примеру круга, јер у проблематичним тачкама $(1,0)$ и $(-1,0)$ имамо да је $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$.

Теореме налик претходној називамо Теоремама о имплицитној функцији. Преостале које ћемо формулисати су мање више исте, осим што се мењају домен и кодомен пресликавања F, а тиме донекле и услови. Пре тога, наведимо једну допуну претходној Теореми.

Став Нека још, уз услове претходне Теореме, важи и

4. $\frac{\partial F}{\partial x}$ постоји и непрекидан је на A,

тј. нека је $F \in C^1(A)$. Тада је и функција f из претходне Теореме непрекидно диференцијабилна, тј. $f \in C^1(U)$ и важи

$$f'(x) = -\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))/\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)).$$

Аналогно, ако је $F \in C^p$ тада је и $f \in C^p$.

Претходна формула за извод директна је последица правила диференцирања. Наиме, како је $F(x, f(x)) = 0$, диференцирањем претходног израза по изводу сложене функције је

$$0 = \frac{d}{dx}F(x, f(x)) = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{df}{dx},$$

одакле сређивање следи претходна формула. Дакле, тежина става је у томе да је функција f уопште диференцијабилна.
Претходна Теорема о имплицитној функцији се директно уопштава уколико је $A \subset \mathbb{R}^m$, тј. све док су у питању скаларне функције, докази су аналогни.

Имплицитне функције са векторским вредностима

Претпоставимо да уместо једне једначине $F(x,y)=0$, имамо њих неколико, као и да су одговарајуће функције F дефинисане на произвољном $\mathbb{R}^n$. Прецизније, претпоставимо да имамо n једначина

$$\begin{aligned}
&F_1(x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_n)=0\\
&F_2(x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_n)=0\\
&\dots\\
&F_n(x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_n)=0,
\end{aligned}$$

где $F_i\colon A\to\mathbb{R}, A\subset\mathbb{R}^{m+n}$. Претходни систем желимо да (локално) решимо по y, односно да добијемо

$$\begin{aligned}
&y_1=f_1(x_1,\dots,x_m)\\
&y_2=f_2(x_1,\dots,x_m)\\
&\dots\\
&y_n=f_n(x_1,\dots,x_m).
\end{aligned}$$

Приметимо да је разлика у ознакама променљивих вештачка, у циљу да би се лакше формулисао проблем. У пракси углавном ћемо имати n једначина функција које имају више од n променљивих, а проблем ће бити да се неких n изрази преко осталих. Даље, једноставности записа ради, означимо $m-$торку $(x_1,\dots,x_m)$ са x а $n-$торку $(y_1,\dots,y_n)$ са y. Такође, ако означимо са $F\colon A\to\mathbb{R}^n$ функцију дату са $F(x,y)=(F_1(x,y),\dots,F_n(x,y))$, а са $f=(f_1,\dots,f_n)$, цео проблем записујемо са

$$F(x,y)=0,$$

а решење тражимо као $y=f(x)$.
Уведимо још ознаке

$$d_yF(x,y)=\begin{pmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n}\end{pmatrix},\quad d_xF(x,y)=\begin{pmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_m}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_m}\end{pmatrix},$$

које ће бити корисне за формулацију проблема. Како је матрица d_yF квадратна дефинисан је и њен Јакобијан

$$\det d_yF(x,y)=\frac{D(F_1,\dots,F_n)}{D(y_1,\dots,y_n)}.$$

Теорема Нека је $A\subset\mathbb{R}^{m+n}$ отворен скуп, $(a,b)\in A, F\colon A\to\mathbb{R}^n$ непрекидна функција и нека још важи:
1. $F(a,b)=0$.
2. Парцијални диференцијал $d_yF(x,y)$ дефинисан је на A и сви његови елементи $\frac{\partial F_j}{\partial y_k}$ су непрекидни.
3. $\det d_yF(a,b)\neq 0$, тј. матрица $d_yF(a,b)$ је инвертибилна.

Тада постоји околина $W=U\times V$ тачке (a,b) (где је U околина тачке a у $\mathbb{R}^m$, а V је околина тачке b у $\mathbb{R}^n$) и једнозначно одређена непрекидна функција $f\colon U\to V$ таква да је $f(a)=b$ и $F(x,f(x))=0$, за све $x\in U$.
Детаље доказа погледати у књизи, овде ћемо само проћи кроз основне црте (део да је f непрекидна није неопходан).
Једноставности ради, узећемо да је $a=b=0$, што се може постићи транслирањем.
Како је матрица $d_yF(0,0)$ инвертибилна, једначина $F(x,y)=0$ је еквивалентна једначини

$$y-\big(d_yF(0,0)\big)^{-1}F(x,y)=y,$$

одакле решење претходне једначине тражимо као фиксну тачку пресликавања

$$\Phi_x(y)=y-\big(d_yF(0,0)\big)^{-1}F(x,y).$$

Што се извода Φ тиче, имамо

$$d\Phi_x(y)=E_n-\big(d_yF(0,0)\big)^{-1}d_yF(x,y)=\big(d_yF(0,0)\big)^{-1}d_yF(0,0)-\big(d_yF(0,0)\big)^{-1}d_yF(x,y)=\big(d_yF(0,0)\big)^{-1}\big(d_yF(0,0)-d_yF(x,y)\big).$$

Како је извод $d_yF(x,y)$ непрекидан, то се разлика $\|d_yF(0,0)-d_yF(x,y)\|$ може направити произвољно малом, а одатле, како је и $\big(d_yF(0,0)\big)^{-1}$ линеарно пресликавање, то је

$$\|\big(d_yF(0,0)\big)^{-1}\|=C,$$

па избором довољно мале кугле око $(0,0)$, тј. такве да је $\|d_yF(0,0)-d_yF(x,y)\|<1/2C$, имамо да је

$$\|d\Phi_x(y)\|\leqslant\frac{1}{2}.$$

Како је кугла конвексан скуп, по Теореми о средњој вредности, на тој кугли имамо и да је

$$\|\Phi_x(y_1) - \Phi_x(y_2)\| \leqslant \|y_1 - y_2\| \sup_y \|d\Phi_x(y)\| \leqslant \frac{1}{2}\|y_1 - y_2\|.$$

Да би даље искористили Банахову Теорему о непокретној тачки, треба нам да је $\Phi_x(y)$ дефинисана на комплетном метричком простору и да га пресликава самог у себе, што се опет може постићи избором довољно мале кугле (овај део погледати у књизи). Одатле нам претходна теорема даје коначан закључак теореме о имплицитној функцији.

Аналогно скаларном случају, сама функција f је глатка колико је глатка и функција F. Прецизније важи (наводимо без доказа)

Теорема Нека, поред услова 1. 2. и 3. важи још и

4. парцијални изводи $\frac{\partial F_j}{\partial x_i}$ постоје и непрекидни су на A.

Тада је и функција f диференцијабилна и њен извод се може рачунати аналогно као у скаларном случају.

Теорема о инверзној функцији

Вратимо се сада на разматрање када постоји инвертибилна функција. Прецизније, нека је $f\colon A \to \mathbb{R}^m$, где је $A \subset \mathbb{R}^m$ отворен, односно нека је

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, \dots, x_m) \\ &\cdots \\ y_m &= f_m(x_1, \dots, x_m), \end{aligned}$$

и постављамо питање када претходни систем једначина можемо решити по x. Локални одговор даје следећа

Теорема Нека је $A \subset \mathbb{R}^m$ отворен скуп, $a \in A$ и нека је $f\colon A \to \mathbb{R}^m$ непрекидно диференцијабилна функција, таква да је $\det df(a) \neq 0$. Тада постоје околине U од a и V од $b = f(a)$, такве да је рестрикција $f\colon U \to V$ бијекција. При томе је инверзна функција $f^{-1}\colon V \to U$ такође непрекидно диференцијабилна и важи

$$df^{-1}(y) = \big(df(x)\big)^{-1},$$

(са десне стране је инверзна матрица од $df(x)$) за све $x \in U$ и $y = f(x) \in V$.

Доказ се своди на примену Теореме о имплицитној функцији на функцију $F(x,y)\colon A \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ дате са $F(x,y) = f(x) - y$, односно њено локално решавање по x. Погледати детаље у књизи.

Пресликавање $f\colon U \to V$ које је бијекција, диференцијабилно и за које је инверзно пресликавање f^{-1} такође диференцијабилно назива се дифеоморфизам. Уколико су још f и f^{-1} глаткости k, тј. $k-$пута непрекидно диференцијабилне, и за сам дифеоморфизам кажемо да је глаткости k. Аналогно као код имплицитне функције, важи

Став Ако је поред услова у претходној теореми, функција f глаткости k, тада се околине U и V могу изабрати тако да је и f^{-1} глаткости k.

Условни екстремуми

Пре него што пређемо на проблематику, посмтрајмо прво скупове облика $S = \{x \in A | \phi(x) = 0\}$ где је $\phi\colon A \to \mathbb{R}$ непрекидно диференцијабилна функција на отвореном скупу $A \subset \mathbb{R}^m$. Претпоставимо још да је $\nabla\phi(x) \neq 0$, за све $x \in A$, односно да у свакој тачки $x \in A$ постоји независно променљива x_i таква да је $\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x) \neq 0$. Нека је $s = (s_1, \dots, s_m) \in S$ и претпоставимо једноставности ради да је $\frac{\partial \phi}{\partial x_1}(s) \neq 0$. По Теореми о имплицитној функцији, тада можемо променљиво x_1 локално на скупу S изразити преко осталих. Прецизније, тада постоји околина U у $\mathbb{R}^{m-1}$ тачке $(s_2, \dots, s_m)$ и околина V у $\mathbb{R}$ тачке s_1 и функција $f\colon U \to V$ која је непрекидно диференцијабилна, $f(s_2, \dots, s_m) = s_1$ и $\phi(f(x_2, \dots, x_m), x_2, \dots, x_m) = 0$ за све $(x_2, \dots, x_m) \in U$. Другачије речено, на околини $W = V \times U$ тачке s, скуп $W \cap S$ представља график функције f. Приметимо још да је пресликавање дато са $\Psi\colon U \to W \cap S$ дато са $\Psi(x_2, \dots, x_m) = (f(x_2, \dots, x_m), x_2, \dots, x_m)$ (назива се и параметризација S) бијекција као и да је непрекидно диференцијабилно (прецизније глатко је колико и функција f). Како је његов инверз само пројекција на све координате осим на прву, која је диференцијабилна произвољно много пута, а која је и бијекција на скупу $W \cap S$ то је пресликавање Ψ дифеоморфизам (и исте је глаткости као функција ϕ). Закључак је дакле да свака тачка скупа S има околину која је дифеоморфна отвореном скупу у $\mathbb{R}^{m-1}$. Овакве скупове називамо још и $m-1$ димензионалним глатким површима (или многострукостима), односно глаткости p уколико је почетна функција ϕ глаткости p. Претходна дефиниција садржи у себи криве као и обичне површи димензије 2 у простору $\mathbb{R}^3$ којима се највише и бавимо. Примера ради јединична сфера $\{(x,y,z) | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ је дводимензионална површ због претходне дискусије. Приметимо такође да сфера сама по себи није дифеоморфна отвореном скупу у равни. Нпр. сфера је компактан скуп, док отворени подскуп од равни није компактан. Са друге стране, како непрекидна пресликавањ чувају компактност, то и дифеоморфни скупови су истовремено компактни или нису.

Важна својство оваквих скупова је да они могу да се апроксимирају векторским просторима, слично као што тангентом може да се апроксимира график диференцијабилне функције. Прецизније, тангентним простором $m-1$ димензионалне површи у тачки s називаћемо скуп свих тангентних вектора на све криве које пролазе кроз тачку s и садржане су у површи S. Прецизније

$$T_sS = \{\gamma'(0) | \gamma(-1,1) \to S, \gamma(0) = s, \gamma \quad \text{је глатка}\}.$$

Наравно, избор интервала $(-1,1)$ и тачке 0 за параметризацију криве је небитан, сваку криву можемо адекватно репараметризовати да задовољава те услове. Означимо γ координатно као $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_m(t))$ и приметимо даље да $\gamma(-1,1) \to S$, заправо значи да је $\phi(\gamma(t)) = 0$, за све $t \in (-1,1)$, те диференцирањем претходног израза и коришћењем правила за извод сложене функције добијамо

$$0 = \frac{d}{dt}\phi(\gamma(0)) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(s)\gamma_i'(0).$$

Како је из дефиниције, вектор $(\gamma_1'(0), \dots \gamma_m'(0))$ произвољан вектор тангентног простора, то видимо да је градијент $\nabla\phi(s)$ заправо вектор нормале на тангентни простор T_sS у тачки s. Прецизније, добили смо

$$(h_1, \dots, h_m) \in T_sS \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\partial \phi}{\partial x_1}h_1 + \frac{\partial \phi}{\partial x_2}h_2 + \dots + \frac{\partial \phi}{\partial x_m}h_m = 0.$$

Претпоставимо сада да је скуп S задат са више функције, не само са једном, тј. $S = \{x \in A | \phi_1(x) = 0, \dots, \phi_k(x) = 0\}$ где су $\phi_i \colon A \to \mathbb{R}$ непрекидно диференцијабилне функције $(k \leqslant m)$. Да би аналогно применили Теорему о имплицитној функцији, треба нам услов да је матрица

$$A(\phi) = \begin{pmatrix} \nabla\phi_1 \\ \vdots \\ \nabla\phi_k \end{pmatrix},$$

максималног ранга, што је у овом случају k. Тада ће она имати неку подматрицу $k \times k$ која је инвертибилна те промењљиве које су у њој могу се тада изразити преко осталих промењљивих. Дакле, скуп S ће опет бити локално график функције, односно, свака тачка из S има околину која је дифеоморфна са отвореним скупом у $\mathbb{R}^{m-k}$. Овакве скупове називамо $m-k$ димензионалним глатким површима у простору $\mathbb{R}^m$.

Аналогним рачуном за тангентни простор, видимо да крива $\gamma(t)$ припада S, ако и само ако важи $\phi_1(\gamma(t)) = 0, \dots, \phi_k(\gamma(t)) = 0$ и диференцирањем свих тих израза добијамо да вектор $h = (h_1, \dots, h_m)$ припада тангентном простору T_sS ако и само ако важи

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi_1}{\partial x_1}h_1 + \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2}h_2 + \dots + \frac{\partial \phi_1}{\partial x_m}h_m &= 0 \\
\frac{\partial \phi_2}{\partial x_1}h_1 + \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2}h_2 + \dots + \frac{\partial \phi_2}{\partial x_m}h_m &= 0 \\
\vdots \qquad & \vdots \\
\frac{\partial \phi_k}{\partial x_1}h_1 + \frac{\partial \phi_k}{\partial x_2}h_2 + \dots + \frac{\partial \phi_k}{\partial x_m}h_m &= 0.
\end{aligned}$$

Уз претходно, вратимо се на поставку проблема условних екстремума. Нека је $A \subset \mathbb{R}^m$ област, $f \colon A \to \mathbb{R}$ глатка функција и $\phi_i \colon A \to \mathbb{R}$ за $i = 1, \dots, k$ такође глатке функције за које матрица $A(\phi)$ има максималан ранг. Означимо са $S = \{x \in \mathbb{R}^m | \phi_1(x) = 0, \dots, \phi_k(x) = 0\}$.

Дефиниција Кажемо да функција f има у тачки $s \in S$ условни екстремум, при условима $\phi_1(x) = 0, \dots, \phi_k(x) = 0$, ако постоји кугла $K(s; r)$, таква да је s екстремум (минимум или максимум) функције f на скупу $K(s; r) \cap S$.

Из претходне дискусије имамо да је тачка s условни екстремум, ако је екстремум рестрикције функције f на површ S.

Приметимо да уколико можемо да параметризујемо површ S, односно запишемо је координатно као график функције, тада рестрикцију функције f на дату површ можемо посматрати као обичну функцију на отвореном скупу и њене екстремуме наћи уобичајено. Како налажење параметризације није увек једноставно, наредни метод (назива се и Лагранжева метода мултипликатора) често може бити згодна за рачунање условних екстремума.

Теорема Под претходним претпоставкама, нека је $s \in S$ условни екстремум функције f. Тада је s стационарна тачка функције

$$L(x_1, \dots, x_m, \lambda_1, \dots, \lambda_k) = f(x_1, \dots, x_m) + \lambda_1\phi_1(x_1, \dots, x_m) + \lambda_2\phi_2(x_1, \dots, x_m) + \dots + \lambda_k\phi_k(x_1, \dots, x_m).$$

Доказ Нека је $\gamma \colon (-1,1) \to S$ крива на површи S таква да је $\gamma(0) = s$. Тада функција $f(\gamma(t))$ има екстремум у тачки $t = 0$, те опет по изводу сложене функције имамо да је

$$0 = \frac{d}{dt}f(\gamma(t)) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\gamma_1'(0) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}\gamma_m'(0).$$

Како је по дефиницији тангентног простора, вектор $(\gamma_1'(0),\dots,\gamma_m'(0))$ његов произвољан вектор, то имамо да је
$$\frac{\partial f}{\partial x_1}h_1+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_m}h_m=0,$$
за сваки вектор $h\in T_sS$, односно вектор ∇f је ортогоналан на цео тангентни простор T_sS. Како су једини вектори који су ортогонални на тангентни простор градијенти $\nabla\phi_1,\dots,\nabla\phi_k$, то се вектор ∇f може изразити као њихова линеарна комбинација, тј. постоје $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ за које је
$$\nabla f(s)=\lambda_1\nabla\phi_1(s)+\ldots+\lambda_k\nabla\phi_k(s).$$
Мало формалније, ово се може видети из тога да ако је $h\in T_sS$, тада је
$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi_1}{\partial x_1}h_1+\frac{\partial\phi_1}{\partial x_2}h_2+\ldots+\frac{\partial\phi_1}{\partial x_m}h_m&=0\\ \frac{\partial\phi_2}{\partial x_1}h_1+\frac{\partial\phi_2}{\partial x_2}h_2+\ldots+\frac{\partial\phi_2}{\partial x_m}h_m&=0\\ \vdots\quad&\quad\vdots\\ \frac{\partial\phi_k}{\partial x_1}h_1+\frac{\partial\phi_k}{\partial x_2}h_2+\ldots+\frac{\partial\phi_k}{\partial x_m}h_m&=0,\end{aligned}$$
а уколико је s условни екстремум тада из претходног следи да уколико вектор h задовољава претходне једначине тада је још
$$\frac{\partial f}{\partial x_1}h_1+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_m}h_m=0,$$
тј. решење претходног систем се не мења додавањем последње једначине. Одатле је ранг матрице која се састоји од градијената $\nabla\phi_i$ исти као ранг матрице која још има и ∇f, одакле следи последњи закључак. У сваком случају добили смо
$$\nabla f(s)-(\lambda_1\nabla\phi_1(s)+\ldots+\lambda_k\nabla\phi_k(s))=0,$$
што је еквивалентно тврђењу теореме, јер је израз са леве стране извод функције L по променљивим x_i из формулације у тачки $(x_1,\dots,x_m,-\lambda_1,\dots,-\lambda_k)$. Са друге стране, из извода по λ_i добијамо само услове $\phi_k(s)=0$, који су свакако испуњени јер смо кренули од тачке $s\in S$, одакле и следи цео закључак.
Претходна теорема нам даје неопходне услове за условни екстремум, довољне нам гарантује следећа
Теорема Нека је, под претпоставкама претходне Теореме, још $f\in C^2(A)$ и $\phi_i\in C^2(A)$ за све $i=1,\dots,k$. Нека је даље s стационарна тачка функције L за неке $\lambda_1,\dots,\lambda_k$. Уколико је форма
$$\Phi(h)=\sum_{i,j=1}^m\frac{\partial^2L}{\partial x_i\partial x_j}(s)h_ih_j,$$
позитивно (негативно) дефинитна на тангентном простору T_sS тада је s условни минимум (максимум). Прецизније, уколико за свако $h=(h_1,\dots,h_m)\neq 0$ за које је
$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi_1}{\partial x_1}h_1+\frac{\partial\phi_1}{\partial x_2}h_2+\ldots+\frac{\partial\phi_1}{\partial x_m}h_m&=0\\ \frac{\partial\phi_2}{\partial x_1}h_1+\frac{\partial\phi_2}{\partial x_2}h_2+\ldots+\frac{\partial\phi_2}{\partial x_m}h_m&=0\\ \vdots\quad&\quad\vdots\\ \frac{\partial\phi_k}{\partial x_1}h_1+\frac{\partial\phi_k}{\partial x_2}h_2+\ldots+\frac{\partial\phi_k}{\partial x_m}h_m&=0,\end{aligned}$$
важи $\Phi(h)>0$, тада је a условни минимум.
Доказ се може погледати у књизи. Идеја је слична као код обичних екстремума, а услов да се гледају само вектори који леже у тангентном простору је очекиван. Наиме, док смо на површи S немамо слободу да се крећемо у свим правцима и самој тачки s можемо прићи само преко површи, а то је у првој апроксимацији дуж вектора који образују тангентни простор. Одатле и посматрамо само да ли је одговарајућа форма дефинитна на тим векторима.