Основне особине функција

Наредна област коју прелазимо односи се на функције, а као и у случају низова, навјише нам је од интереса њихово гранично понасање. За почетак резимирамо неке основне особине функција. Прво, бавимо се реалним функцијама реалне променљиве (што ћемо углавном звати само функција), прецизније функцијама $f\colon A \to \mathbb{R}$, где је $A \subset \mathbb{R}$. Уобичајено, A називамо домен, а $\mathbb{R}$ кодомен функције. За разлику од општег случаја функције на скупу, где је унапред подразумевано шта је домен функције, како се функције углавном задају преко аналитичких израза попут $\sqrt{x}, \sin x, e^x, \ldots$ за домен ћемо подразумевати максимални подскуп од $\mathbb{R}$ на коме тај аналитички израз има смисла.

Напомена У претходном треба пазити, примера ради израз $\frac{x^2}{x}$ формално нема смисла за $x = 0$, иако ту може да се додефинише тако да функција остане "смислена". Касније ћемо видети још оваквих примера, где само то додефинисање неће бити очигледно као у овом примеру, а напомена је дакле да такве тачке, овако како смо ми дефинисали домен, нису у домену.

Дефинишимо сад неколико основних особина функција

Дефиниција За скуп $A \subset \mathbb{R}$ кажемо да је симетричан уколико важи $x \in A \Rightarrow -x \in A$. За функцију $f\colon A \to \mathbb{R}$, дефинисану на симетричном скупу A, кажемо да је парна уколико важи $f(x) = f(-x)$, односно непарна уколико важи $f(-x) = -f(x)$.

Претходна нотација долази од степених функција, где имамо да су функције x^{2n} парне, а функције x^{2n+1} непарне. Још неке примере ћемо имати касније, код тригонометријских функција.

Дефиниција За функцију $f\colon A \to \mathbb{R}$ кажемо да је периодична уколико постоји $T > 0$, такво да је $f(x+T) = f(x)$ (наравно подразумевамо да је домен такав да израз има $f(x+T)$ има смисла). Најмањи такав позитиван број T, уколико постоји, називамо основни период функције f.

Основни примери периодичних функција су тригонометријске функције, што ћемо видети касније.

Приметимо да функција може да буде периодична али да нема основни период. Примера ради, посматрајмо функцију

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q}, \\ 0, x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

која се још често назива Дирихлеова функција. Она је периодична, јер за сваки рационалан број q имамо да је $\chi(x+q) = \chi(x)$, јер је збир два рационална опет рационалан број, а збир ирационалног и рационалног је ирационалан. Са друге стране, како не постоји најмањи позитиван рационалан број, то ова функција нема основни период.

Дефиниција Нека је $B \subset A \subset \mathbb{R}$ и $f\colon A \to \mathbb{R}$. Тада кажемо да је функција f

1. растућа на B, уколико важи $x_1, x_2 \in B, x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$
2. строго растућа на B, уколико важи $x_1, x_2 \in B, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
3. опадајућа на B, уколико важи $x_1, x_2 \in B, x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)$
4. строго опадајућа на B, уколико важи $x_1, x_2 \in B, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Уколико f задовољава било који од претходних услова кажемо да је монотона, а уколико задовољава неки од услова 2 или 4 кажемо да је строго монотона.

Дефиниција За функцију $f(A) \to \mathbb{R}$ кажемо да је ограничена одозго (одоздо, ограничена), уколико је њен скуп вредности $\{f(x) | x \in A\}$ ограничен одозго (одоздо, ограничен респективно).

Гранична вредност функције

Дефиниција Нека је $f\colon A \to \mathbb{R}$ функција и $a \in \overline{\mathbb{R}}$ тачка нагомилавања скупа A. Кажемо да је $b \in \overline{\mathbb{R}}$ гранична вредност функције f у тачки a, у ознаци $\lim_{A \ni x \to a} f(x) = b$ ако за сваку околину V тачке b постоји околина U тачке a, таква да је $f((U \cap A) \setminus \{a\}) \subset V$. Прецизније

$$\lim_{A \ni x \to a} f(x) = b \Leftrightarrow (\forall V\text{-околина}\, b)(\exists U\text{-околина}\, a)(x \in U \cap A, x \neq a \Rightarrow f(x) \in V).$$

Ознака A скупа по коме се узима лимес углавном се не наглашава тј. граничну вредност записујемо само са $\lim_{x \to a} f(x)$. Такође, као код низова користимо и ознаке $f(x) \to b, x \to a$...

Приметимо одмах две разлике у односу на дефиницију лимеса низа. Прво, нисмо помињали тачке нагомилавања, јер код низова смо једино разматрали лимес у бесконачности, што је тачка нагомилавања скупа $\mathbb{N}$, те о томе и нисмо морали да водимо рачуна. Друго, у старту смо искључили саму вредност функције у тачки a (уколико је функција уопште дефинисана у тој тачки). Опет о овоме нисмо морали да водимо рачуна код низова из истог разлога, наиме низ свакако није дефинисан у тачки $+\infty$. Идеја иза тога је да лимес одређују вредности функције близу те тачке, а не вредност у самој тачки, одакле и назив гранично понашање. Како ће нам се претходни случај често помињати, означимо скуп из дефиниције са $\overset{\circ}{U}$, прецизније, уколико је U околина тачке a, тада је

$$\overset{\circ}{U} = U \setminus \{a\}.$$

Претходни скуп се још назива и пробушена околина тачке a.

Дефиниција лимеса има смисла и када су a или b једнаки $\pm\infty$. Ако занемаримо тих неколико случајева, можемо задати оперативнију дефиницију лимеса, тзв. $\varepsilon-\delta$ дефиицију која гласи

$$\lim_{x\to a} f(x)=b \Leftrightarrow (\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in A)(0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon).$$

Еквивалентност дефиниција следи из тога што свака околина тачке садржи неку ε-околину те тачке.
У случају да је $a=+\infty$ (или $-\infty$), како су околине $+\infty$ облика $(M,+\infty)$ имамо елвивалентну дефиницију

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=b \Leftrightarrow (\forall\varepsilon>0)(\exists M)(\forall x\in A)(x>M \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon),$$

док у случају $-\infty$, мењамо одговарајући знак. На крају уколико је нпр. $b=+\infty$, дефиниција се чита са

$$\lim_{x\to a} f(x)=+\infty \Leftrightarrow (\forall M)(\exists\delta>0)(\forall x\in A)(0<|x-a|<\delta \Rightarrow f(x)>M),$$

где је опет претпостављено да је a коначан број.

Примери

1. Илустрације ради, за напоменуто да вредност функције у самој тачки не утиче на граничну вредност, посматрајмо функцију дату са

$$f(x)=\begin{cases}1, x\neq 0,\\ 0, x=0\end{cases}.$$

Тада је $\lim_{x\to 0} f(x)=1$.

2. $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$. Ово се доказује слично као одговарајуће тврђење за низове. Нека је $\varepsilon>0$, тада постоји N такво да је $0<\frac{1}{N}<\varepsilon$, одатле за $x>N$ имамо да је $0<\frac{1}{x}<\frac{1}{N}<\varepsilon$, одакле је први лимес нула. Како је и $-\varepsilon<-\frac{1}{N}<0$, то је за $x<-N$ и $-\varepsilon<-\frac{1}{N}<\frac{1}{x}<0$, одакле је и други лимес нула.
У претходном примеру је лимес узет по домену функције $\frac{1}{x}$, скупу $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

3. Приметимо да раније дефинисана Дирихлеова функција, нема граничну вредност ни у једној тачки. Заиста, за свако $a\in\mathbb{R}$ и за свако $\delta>0$, у околини $(x-\delta,x+\delta)$ има и рационалних и ирационалних бројева, где она узима вредност 1 односно 0. Одатле, не могу све вредности у тој околини бити ε близу неком b.

Један случај лимеса када ће нам од интереса бити домен, је када посматрамо лимес у тачки a само са десне стране, односно преко бројева који су строго већи од a и аналогно са леве стране. Ову ситуацију прецизирамо дефиицијом.

Дефиниција Нека је $a\in\mathbb{R}$ тачка нагомилавања скупа $A\cap(a,+\infty)=\{x\in A|x>a\}$, и $f\colon A\to\mathbb{R}$. Вредност $\lim\limits_{A\cap(a,+\infty)\ni x\to a} f(x)$, уколико постоји, називамо десним лимесом функције f у тачки a и означавмо са $\lim_{x\to a+} f(x)$ или $f(a+0)$. Аналогно се дефинише лева гранична вредност, у ознаци $\lim_{x\to a-} f(x)$ или $f(a-0)$.

Примери

1. Слично као у претходном примеру 2, може се видети да је $\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x}=+\infty$, као и $\lim_{x\to 0-}\frac{1}{x}=-\infty$.

2. Посматрајмо функцију цео део $f(x)=[x]$ и погледајмо њено гранично понашање у целобројним тачкама. Нека је $n\in\mathbb{Z}$ и нека је $\delta>0$. Уколико је $x\in(n,n+\delta)$, тада је x веће од n, али ако изаберемо $\delta<1$, тада x неће бити веће од следећег целог броја $n+1$, тј. $n<x<n+1$. Тада је $f(x)=n$. Одавде је $\lim_{x\to n+}[x]=n$. Са друге стране, за $x\in(n-\delta,n)$, опет за δ изабрано које је довољно мало имамо да је $n-1<x<n$, одакле је $[x]=n-1$, за све $x\in(n-\delta,n)$. Одатле је $\lim_{x\to n-}[x]=n-1$.

Још неки примери могу се наћи у књизи.
Напоменимо још да уколико постоји обичан лимес у a, тада постоје и леви и десни и оба су једнака обичном лимесу. Тачније, постоје они који имају смисла (тј. постоје са оне стране са које је a тачка нагомилавања одговарајућег скупа). Такође, важи и обрнуто, уколико постоје и леви и десни лимес и једнаки су, тада постоји и обичан лимес који је једнак са осталима.
Приметимо да лимес функције у тачки a не мора да постоји, а да опет лимес може да постоји по неким низовима који конвергирају ка a. Нпр. уколико је $f(x)$ Дирихлеова функција, тада не постоји $\lim_{x\to\infty} f(x)$ (потпуно аналогно неком претходном примеру), док постоји $\lim_{n\to\infty} f(n)=\lim_{\mathbb{N}\ni x\to\infty} f(x)=1$. Следећа важна Теорема даје везу, која се још назива и Хајнеова, ова два појма.

Теорема Гранична вредност функције $f\colon A\to\mathbb{R}$ у тачки $a\in\overline{\mathbb{R}}$ једнака је $b\in\overline{\mathbb{R}}$ ако и само ако за сваки низ тачака $x_n\in A\setminus\{a\}$ такав да је $\lim_{n\to\infty} x_n=a$ важи $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=b$.

Доказ погледати у књизи.
Дакле, последња два лимеса $\lim_{n\to\infty} x_n=a$ и $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=b$ су лимеси низова. Претходна теорема није згодна у пракси за рачунање лимеса, јер дакле мора да се провери лимес по сваком низу који конвергира ка a, којих може да буде јако много. Са друге стране, може бити згодна у теорији за преношење неких својстава које важе за низове на одговарајућа својства за функције, што ћемо видети. Такође, у пракси се често користи њена последица, да ако могу да се нађу два низа x_n и y_n која оба конвергирају ка a, а $f(x_n)$ и $f(y_n)$ не конвергирају ка истим вредностима, тада не постоји лимес функције $f(x)$ кад x тежи a.
Неки примери се могу наћи у књизи.
Основна својства граничних вредности функција су аналогна одговарајућим својствима граничних вредности низова.

Став Уколико функција f има лимес у тачки a, он је једнозначно одређен.

Став Уколико функција f има коначну граничну вредност у тачки a, тада постоји околина U тачке a на којој је функција f ограничена.
Уколико је b коначна гранична вредност из формулације, уколико узмемо нпр. околину $(b-1, b+1)$, тада постоји околина U таква да је $f(\overset{\circ}{U}) \subset (b-1, b+1)$, односно скуп вредности f на тој околини је ограничен (одозго са $b+1$ а одоздо са $b-1$).
Аналогно, лимес се лепо слаже са алгебарским операцијама
Став Нека су $f, g \colon A \to \mathbb{R}$ такве да је $\lim_{x\to a} f(x) = b$ и $\lim_{x\to a} g(x) = c$. Тада важи:
1. $\lim_{x\to a} f(x) \pm g(x) = b \pm c$.
2. $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = bc$.
3. $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}$, уколико је $c \neq 0$.
Доказ Тврђење се може доказати директно, а овде ће бити показано преко Хајнеове Теореме. Нека је x_n произвољан низ тачака A који конвергира ка a и за који је $x_n \neq a$. По Хајнеовој Теореми је тада и $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = b$ и $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = c$. По аналогном тврђењу за низове је тада и 1. $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \pm g(x_n) = b \pm c$.
2. $\lim_{n\to\infty} f(x_n)g(x_n) = bc$.
3. $\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{b}{c}$, уколико је $c \neq 0$.
Како је x_n био произвољан низ који конвергира ка a, претходно је тачно за сваки такав низ. Тиме је, опет по Хајнеовој Теореми, претходно тачно и за граничне вредности функција.
У претходној теореми није неопходно да функције f и g имају исти домен (формулисано је тако само једноставности ради). Генерално говорећи, гранична вредност у тачки a има смисла ако је функција дефинисана на некој околини тачке a, а такође и зависи само од вредности на тој околини. Одатле је довољно да обе функције буду дефинисане довољно близу тачке a, што ће углавном бити да су обе дефинисане на некој околини тачке a. Општије довољно је да обе буду дефинисане на скупу коме је a тачка нагомилавања. Ова напомена у принципу важи увек када разматрамо граничне вредности више функција у једној тачки.
Став Нека је $\lim_{x\to a} f(x) = b$ и $\lim_{x\to a} g(x) = c$ (опет, f и g су дефинисане на некој околини тачке a) и нека је $b < c$. Тада постоји околина Uтачке a таква да је $f(x) < g(x)$ за све $x \in \overset{\circ}{U}$. Знак $<$ може се заменити са $>$.
Заиста можемо да изаберемо $\varepsilon > 0$ тако да је $b + \varepsilon < c - \varepsilon$, а тада ће постојати околине U_1 и U_2, такве да је $f(\overset{\circ}{U_1}) \subset (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ и $g(\overset{\circ}{U_2}) \subset (c-\varepsilon, c+\varepsilon)$. Тада, на пресеку ових околина, ће важити закључак теореме. Контрапозицијом добијамо

Последица Ако је за неку околину U тачке a испуњено $f(x) \leqslant g(x)$ за све $x \in \overset{\circ}{U}$, тада је $\lim_{x\to a} f(x) \leqslant \lim_{x\to a} g(x)$. Знак $\leqslant$ може се заменити са $\geqslant$.

Став Нека су $f, g, h \colon A \to \mathbb{R}$ функције такве да је $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ за све $x \in \overset{\circ}{U}$, где је U околина тачке a која је тачка нагомилавања скупа a. Уколико је $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = b \in \overline{\mathbb{R}}$, тада је и $\lim_{x\to a} g(x) = b$. Доказ је аналоган доказу одговарајућег својства код низова и може се погледати у књизи. Такође може се доказати и преко Хајнеове Теореме слично као тврђење о алгебарским својствима лимеса.

Експоненцијална, Логаритамска и Степена функијца

Уколико је $a \in \mathbb{R}$ и $a > 0$, до сада смо дефнисиали шта је a^q, где је $q \in \mathbb{Q}$. Остаје дакле да се види смисао те ознаке за произвољан реалан број, као и својства која има одговарајућа функција. Кроз претходно нећемо проћи формално, и докази за тврдења наведена у овој глави неће бити навођени. Наравно, заинтересовани читаоци их могу погледати у књизи.
За почетак, од раније знамо да експоненцијална функција има својства

$$a^{r_1+r_2} = a^{r_1}a^{r_2}, \qquad (a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 r_2},$$

за свака два рационална броја r_1 и r_2. Важи још и
1. $r_1 < r_2 \Rightarrow a^{r_1} < a^{r_2}$, уколико је $a > 1$, односно $a^{r_1} > a^{r_2}$, уколико је $a < 1$.
2. $\lim\limits_{\mathbb{Q}\ni r\to r_0} a^r = a^{r_0}$.
Напоменимо само да је својство 1. последица тога да је (претпостављамо да је $a > 1$) $a^m < a^n$, уколико је $m < n$ (што је последица аксиома) и монотоности корена, тј. ако је $0 < x < y$ тада је и $\sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y}$ (што је последица тога да је $x^n < y^n$, што следи из аксиома).
Нека је сад $x \in \mathbb{R}$ и $a > 1$. Означимо са $A = \{a^r | r \in \mathbb{Q}, r < x\}$ и $B = \{a^r | r \in \mathbb{Q}, r > x\}$. Из својства један имамо да је сваки елемент скупа A доње ограничење скупа B као и да је сваки елемент скупа B горње ограничење скупа A. Отуда постоје $s = \sup A$ и $i = \inf B$ а из претходног имамо и да је $s \leqslant i$. Заправо из претходног својства 2. имамо да је $i = s$. Уколико узмемо да је $r_1 < x < r_2$, тада је и $a^{r_1} \leqslant s \leqslant i \leqslant a^{r_2}$, а одатле

$$0 \leqslant i - s \leqslant a^{r_2} - a^{r_1} = a^{r_1}(a^{r_2 - r_1} - 1) \leqslant s(a^{r_2 - r_1} - 1).$$

Како можемо изабрати да $r_2 - r_1 \to 0$, а из својства 2. имамо да $a^r \to 1$ кад $r \to 0$, последњи добијени израз у претходној неједнакости се може учинити произвољно малим. Отуда мора бити $i = s$.

Дефинциија Нека је $x \in \mathbb{R}$ и $a > 1$. Дефинишемо $a^x = i = s$. Функцију $x \to a^x$ називамо експоненцијална функција са основом a.
Експоненцијална функција задржава сва својства која има и на рационалним бројевима
Став Нека је $a > 1$. Тада важи
1. $\lim\limits_{\mathbb{Q}\ni r \to x} a^r = a^x$, за свако $x \in \mathbb{R}$.
2. $x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$ за све $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.
3. $a^{x_1+x_2} = a^{x_1}a^{x_2}$ и $(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1x_2}$ за све $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.
4. $\lim\limits_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$.
5. $x \to a^x$ је функција из $\mathbb{R}$ на $(0, +\infty)$.
Слухцај када је $0 < a < 1$ је аналоган осим што се мења монотоност.
Из својстава 2. и 5. имамо да је функција $f(x) = a^x$ бијекција између $\mathbb{R}$ и $(0, +\infty)$. Њена инверзна функција $f^{-1}\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ назива се Логаритамском функцијом са основом a, и означава се са $\log_a x$. Дакле, важи

$$\log_a x = y \Leftrightarrow x = a^y.$$

Став Нека је $a > 0, a \neq 1, y_0, y_1, y_2 > 0$. Тада:
1. $\log_a a = 1, \log_a 1 = 0$.
2. $\log_a(y_1y_2) = \log_a y_1 + \log_a y_2$.
3. За $a > 1$ важи $y_1 < y_2 \Leftrightarrow \log_a y_1 < \log_a y_2$, док за $a < 1$ важи $y_1 < y_2 \Leftrightarrow \log_a y_1 > \log_a y_2$.
4. $\lim\limits_{y\to y_0} \log_a y = \log_a y_0$.
Претходна својства су само реформулација одговарајућих својстава експоненцијалне функције.
Специјално, за $a = e$, користимо ознаку ln уместо $\log_e$.
По претходном, сада за сваки позитиван број a, изузев 1, имамо дефинисано шта је a^b за свако $b \in \mathbb{R}$. Уколико додефинишемо још $1^b = 1$ и фиксирамо експонент а мењамо основу, добијамо функцију коју називамо степена функција. Прецизније, степена функција, са степеном $\alpha \in \mathbb{R}$ је функција $f(x)\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}x \to x^\alpha$. Опет, претходна својства реформулисана у терминима ове функције гласе
Став Нека је $x > 0, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, a > 0$ и $a \neq 1$. Тада важи
1. $x^\alpha = a^{\alpha \log_a x}$.
2. $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$.
3. $(x^{alpha})^\beta = x^{\alpha\beta}$.
4. За $\alpha > 0$ функција $x \to x^\alpha$ је строго растућа, док је за $\alpha < 0$ строго опадајућа.
5. За $\alpha \neq 0$, функција $x \to x^\alpha$ пресликава $(0, +\infty)$ на $(0, +\infty)$.
У неким случајевима дефиниција степене функције може се проширити на цео $\mathbb{R}$. Наиме уколико је $\alpha = \frac{p}{q}$ и ако је q непаран број, тада за $x < 0$ узимамо да је

$$x^\alpha = \begin{cases} |x|^\alpha, p - \text{паран} \\ -|x|^\alpha, p - \text{непаран}. \end{cases}$$

Такође, за $\alpha > 0$ узимамо да је $0^\alpha = 0$.

Тригонометријске функције

Овај део погледати у књизи у поглављу 4.4 до дела Поларне координате и тригонометријски облик комплексног броја

Теорема о смени променљиве у лимесу

Претпоставимо да смо у ситуацији да је $\lim_{x\to a} f(x) = b$ и $\lim_{x\to b} g(x) = c$. Поставља се природно питање да ли постоји $\lim_{x\to a} g \circ f(x)$ и да ли он износи c. Заправо, уколико композиција има смисла, имали би следеће. Нека је V околина c, па како $g(x) \to c$ кад $x \to b$ то постоји околина U_1 од b, таква да је $g(\mathring{U}_1) \subset V$. Даље, како $f(x) \to b$ кад $x \to a$, то постоји околина U_2 од a, таква да је $f(\mathring{U}_2) \subset U_1$. Тада за композицију имамо $g \circ f(\mathring{U}_2) = g(f(\mathring{U}_2)) \subset g(U_1)$, што би очекивали да је даље подскуп V, јер је $g(\mathring{U}_1)$ подскуп од V. Међутим проблем може да настане ако g узима вредност у тачки b која нема везе са њеним лимесом у тачки c. У складу са тиме, посматрајмо следећи пример
Нека је $g(x) = 1$ за $x \neq 0$ и нека је $g(0) = 0$, и нека је $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$. Тада је $\lim_{x\to 0} g(x) = 1$, а директно се провери да је $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ (како је $|\sin x| \leqslant 1$, то је $-x \leqslant x \sin \frac{1}{x} \leqslant x$, па може одатле по Теореми о два полицајца). Међутим, композиција $g(f(x))$ нема лимес када $x \to 0$. Искористићемо Хајнеову Теорему, па нека је $x_n = \frac{1}{n\pi}$, што тежи нули. Тада је $f(x_n) = 0$, а одатле је $g(f(x_n)) = 0$. Са друге стране, ако узмемо низ $y_n = \frac{1}{\pi/2+2n\pi}$, који такође тежи нули, имамо да је $f(y_n) = \frac{1}{\pi/2+2n\pi}$, јер је sin у одговарајућим тачкама једнак јединици. Тада је $g(f(y_n)) = 1$, те функција нема лимес по Хајнеовој Теореми.
Дакле, проблем је био у томе што вредност функције g у нули нема везе са њеним лимесом у нули, а функција f може да узме вредност нула у одговарајућим тачкама. Један начин да се то превазиђе даје нам следећа теорема, која се назима Теорема о смени променљиве, а касније ћемо видети да уколико је функција g иоле разумна, то не морамо да водимо рачуна о претходном. За сада

Теорема Нека је
1. $B \subset \mathbb{R}, b \in \overline{\mathbb{R}}$ тачка нагомилавања скупа $B, g\colon B \to \mathbb{R}$ и $\lim_{x\to b} g(x) = c$.
2. $A \subset \mathbb{R}, a \in \overline{\mathbb{R}}$ тачка нагомилавања скупа $A, f\colon A \to B$, и за сваку околину V тачке b постоји околина U тачке a таква да је $f(\overset{\circ}{U}) \subset \overset{\circ}{V}$. Тада је

$$\lim_{x\to a} g \circ f(x) = c.$$

Приметимо да је услов 2. јачи од тога да је $\lim_{x\to a} f(x) = b$. Дакле, осим тога што захтевамо да је $f(x)$ близу b када је x близу a, тражимо и да има околину на којој нигде не узима вредност b, да не би могла да се деси ситуација из претходног примера. Такође, уколико имамо услов 2, настављајући резоновање са почетка видимо да је тада $g \circ f(\overset{\circ}{U_2}) = g(f(\overset{\circ}{U_2})) \subset g(\overset{\circ}{U_1}) \subset V$, одакле и следи закључак теореме.
Применом претходне теореме могу се израчунати неки основни лимеси. Детаље погледати у књизи.
Став
1. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x = e$ и $\lim\limits_{x\to-\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x = e$.
2. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$.
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x -}{x} = \ln a$.
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$.

Гранична вредност монотоне функције

Слично као код низова уз претпоставку о монотоности функције, за постојање коначне граничне вредности неопходно је и довољно да функције буде ограничен. Прецизније
Став Нека је $f\colon A \to \mathbb{R}$ растућа функција и нека су још $i = \inf A$ и $s = \sup A$ тачке нагомилавања скупа A. Тада постоје $\lim_{x\to s} f(x)$ и $\lim_{x\to i} f(x)$. Да би први од тих лимеса био коначан неопходно је и довољно да је f ограничена одозго. Аналогно важи за опадајућу функцију.
Идеја доказа је иста као код низова. Уколико је f ограничена одозго, означимо са $b = \sup\{f(x) | x \in A, x \neq s\}$. Тада за $\varepsilon > 0$, како $b - \varepsilon$ више није горње ограничење наведеног скупа, то постоји $x_0 \in A$ и $x_0 \neq s$, такво да је $b - \varepsilon < f(x_0) \leqslant b$. Али тада због монотоности функције f, за све $x \in (x_0, s) \cap A$, имамо да је $b - \varepsilon < f(x_0) \leqslant f(x) \leqslant b$, тј. $b = \lim_{x\to s} f(x)$. Остале детаље доказа погледати у књизи.
Директна последица претходног става је да монотона функција има леви и десни лимес у свакој тачки домена (наравно, уколико су тачке нагомилавања одговарајућих скупова).
Последица Нека је $f\colon A \to \mathbb{R}$ монотона функција и нека је a тачка нагомилавања скупова $\{x \in A | x < a\}$ и $\{x \in A | x > a\}$. Тада постоје $\lim_{x\to a+} f(x)$ и $\lim_{x\to a-} f(x)$.
Доказ је последица претходног става, јер је под датим претпоставкама $a = \sup\{x \in A | x < a\}$, као и $a = \inf\{x \in A | x > a\}$.
Приметимо да монотона функција не мора да има лимес у свакој тачки. Нпр. ако узмемо да је

$$f(x) = \begin{cases} x, x \in [0,1] \\ x+1, x \in (1,2] \end{cases}$$

тада је f растућа, али нема лимес за $x = 1$.

Асимптотске ознаке

За конкретно рачунање граничних вредности, често нам није важно да знамо тачно колико нека функција износи, већ ког је она "реда величине" у односу на остале функције које се појављују у тој граничној вредности. Другачије речено, важније нам је да знамо који нам је део функције занемарив, а који је битан, да би се израчунала дата гранична вредност. Примера ради, ако погледамо познати лимес $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$, иако знамо да је $\sin x \leqslant x$, разлика $x - \sin x$ је занемарива, прецизније занемариво је мала у односу на именилац x и самим тим не утиче на граничну вредност. Отуда имамо мотивацију за наредну дефиницију
Дефиниција Нека су f и g дефинисане у некој околини U тачке a. Кажемо да је f бесконачно мала у односу на функцију g и пишемо

$$f = o(g), x \to a,$$

уколико посотји функција $\alpha(x)$, дефинисана на тој околини U, таква да је $f(x) = \alpha(x)g(x)$, за $x \in \overset{\circ}{U}$ и $\alpha(x) \to 0$, када $x \to a$. Претходно се чита и као f је мало o од g.
Приметимо да уколико је количник $\frac{f}{g}$ дефинисан на некој околини тачке a, тј. ако постоји околина тачке a на којој је $g(x) \neq 0$ (осим евентуално у тачки a), тада важи еквиваленција $f = o(g)$ ако и само ако је $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$, што ће бити најчешћи случај са којим ћемо се сретати у пракси.
Основни пример, на који ћемо тежити да сведемо све функције и о чему ће бити речи касније, се односи на степене функције. Наиме, за $n > m$ је $x^n = o(x^m)$ кад $x \to 0$. Такође је и $x^m = o(x^n)$ када $x \to \infty$.
Из дефиниције, а конкретно и из претходног примера, видимо да $o(g)$ није једна функција, већ правилније

речено представља фамилију функција које су облика нешто што тежи нули пута g. Отуда, уколико је $f = o(g)$ неправилно је написати $o(g) = f$. У принципу, правилније би било писати $f \in o(g)$, али традиционално се користи ознака $=$, а такође је згодније јер може да се примени у конкретном рачуну.
Дефиниција Нека су f, g функције дефинисане на некој околини U тачке a. Кажемо да је f велико O од g, кад $x \to a$, уколико постоји функција $\beta\colon U \to \mathbb{R}$, која је ограничена и важи $f(x) = \beta(x)g(x)$. Претходно записујемо са $f = O(g)$. Уколико је истовремено $f = O(g)$ и $g = O(f)$ кажемо да су f и g истог реда када $x \to a$.
Око нотације са великим O важи исто што је речено и за мало o. Следећи став карактерише ситуацију када су f и g истог реда.
Став Функције f и g су истог реда када $x \to a$, ако и само ако постоје позитивне константе c_1 и c_2 такве да важи
$$c_1|g(x)| \leqslant |f(x)| \leqslant c_2|g(x)|,$$
за све $x \in U$, где је U околина тачке a.
Доказ погледати у књизи.
Последња од асимптотских релација је
Дефиниција Ако постоји околина U тачке a и функција γ, таква да је $f(x) = \gamma(x)g(x)$ и $\lim_{x\to a} \gamma(x) = 1$, кажемо да су функције f и g асимптотски еквивалентне када $x \to a$, што записујемо са $f \sim g, (x \to a)$.
Може се показати да је $\sim$ релација еквиваленције.
Везу између претходно уведених појмова даје
Став $f \sim g(x \to a)$ ако и само ако је $f = g + o(g), (x \to a)$.
Доказ се може погледати у књизи, а главна идеја је наравно у томе да нешто што тежи 1 је облика 1+ нешто што тежи нули.
Из претходног видимо да табличне лимесе можемо да у овој нотацији запишемо са:
1. Како је $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, то је $\sin x \sim x$, а по претходном ставу је онда $\sin x = x + o(x)$.
2. Слично како је $\frac{\ln(1+x)}{x} \to 1$, кад $x \to 0$, то је $\ln(1 + x) = x + o(x)$, када $x \to 0$.
3. Из $\frac{a^x - 1}{x} \to \ln a$, имамо да је $a^x = 1 + x \ln a + o(x)$, када $x \to 0$.
4. Из $\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} \to \alpha$, имамо да је $(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$, када $x \to 0$.
Идеја претходног примера је у томе да неке компликованије функције, какве су експоненцијална, логаритамска, тригонометријске итд. асимптоцки упоредимо са једноставнијим, какве су полиноми. Претходни пример то даје само до степена 1, а касније ћемо видети метод којим то можемо да решимо до произвољног степена.
Нека основна правила рачунања са претходним ознакама су
Став
1. $f \sim g(x \to a) \Rightarrow o(f) = o(g), x \to a$.
2. $f \cdot o(g) = o(fg), x \to a$.
3. $o(f) + o(f) = o(f), x \to a$.
4. $o(o(f)) = o(f), x \to a$.
5. $g = o(f) \Rightarrow g = O(f), x \to a$.
6. $O(f) + O(f) = O(f), x \to a$.
Претходно је само реформулација неких основних својстава лимеса. Примера ради својство 3. је само реформулација тога да је збир две функције које теже нули опет функција која тежи нули. Доказ се иначе може погледати у књизи.