Извод

Нека је f функција дефинисана на интервалу (a, b) (што се надаље подразумева уколико ништа није експлицитно речено) и нека је x било која тачка тог интервала. Интересује нас (мало касније ћемо видети неке примере мотивације) брзина промене функције у односу на промену независно промењиве у тој тачки. Прво, како је (a, b) отворени интервал, то тачка x њему припада са неком околином, односно за неко h довољно мало важи $x + h \in (a, b)$. Дакле, има смисла $f(x+h)$, а разлику $f(x+h) - f(x)$ називамо прираштајем функције који одговара прираштају независно промењиве h.

Дефиниција Под претходним претпоставкама, уколико постоји коначан

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

називамо га изводом функције f у тачки x и означава се са $f'(x)$.

Пре него што пређемо на мотивацију, поменимо да се прираштаји често означавају са δ, односно, у односу на претходну ознаку се узима $h = \delta x$, а прираштај функције се означава са $\delta f = f(x + \delta x) - f(x)$, а за њега се користи и ознака δy. Ова нотација има недостатак да се слично означавају прираштај и изабрана тачка x који немају везе једно са другим, тачније прираштај δx бирамо потпуно независно од почетне тачке x (наравно осим услова да је $x + \delta x \in (a, b)$). Отуда ћемо ову нотацију ређе користити.

Прођимо сада укратко кроз мотивацију за претходну дефиницију.

Геометријски, израз $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ износи коефицијент правца праве (сечице), која сече график функције f у тачкама $f(x)$ и $f(x+h)$ (скицу погледати у књизи). Дати коефицијент правца је износи и $\operatorname{tg}\alpha$, где је α угао који поменута сечица заклапа са позитивним делом $x-$осе. Даље, како прираштај h тежи нули, сечица се све више приближава тангенти на график те функције. Уколико сам тај лимес постоји, односно ако функција f има извод у тачки x из ове перспективе значи да се може лепо апроксимирати правом линијом (тангентом) у околини тачке x. Мало касније више ћемо прецизирати тај појам.

Друга мотивација је механичка, наиме означимо са $s = f(t)$ пређени пут који прелази нека тачка крећући се по правој за време t. Тадаје средња брзина на том путу износи $v = \frac{s}{t}$. Ако би хтели да рачунамо њену тренутну брзину у тренутку t, посматрајмо промену пута за мали период времена h. За то време тачка прелази пут $s(t+h) - s(t)$ те по истој формули средња брзина за тај период износи $\frac{s(t+h)-s(t)}{h}$. Одатле, пуштајући да $h \to 0$, уколико лимес постоји, узимамо да је тренутна брзина

$$\lim_{h\to 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h},$$

односно извод функције s.

Користећи табличне лимесе, могу се израчунати изводи неких основних функција. Нпр. $(e^x)' = e^x, \sin x' = \cos x, \cos x' = -\sin x, (x^n)' = nx^{n-1}$, где је у последњем n природан број. Такође, директно се види да је извод константне функције једнак нули. Детаљи се могу наћи у књизи.

Посматрајмо још функцију $f(x) = |x|$ са изводом у нули. Како је $f(0) = 0$, то се питање постојања извода своди на постојање лимеса $\frac{|x|}{x}$, који не постоји (леви лимес износи -1, док десни износи 1). Отуда ова функција нема извод у нули. Дакле немају све елементарне функције изводе у свим тачкама.

Код геометријске интерпретације извода, поменули смо да функција има извод у тачки x ако се лепо може апроксимирати правом у тој тачки. Прецизирајмо то више

Дефиниција За функцију $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ кажемо да је диференцијабилна у тачки $x \in (a, b)$ ако постоји $A \in \mathbb{R}$ такво да је

$$f(x + h) = f(x) + A \cdot h + o(h),$$

када $h \to 0$.

Приметимо да је израз са десне стране, без $o(h)$, заправо права (та права је тангента на график). Другачије речено, функција је диференцијабилна у тачки x, ако је главни део прираштаја линеаран, тј. остатак прираштаја је мањи асимптоцки од линеарног дела. Важи

Став Функција f је диференцијабилн у тачки x ако и само ако има извод у тој тачки.

Доказ се своди на то да је $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = A$, ако и само ако је $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = A + o(1)$. Такође видимо и да је број A из претходне дефиниције једнак $f'(x)$. Детаље погледати у књизи.

У суштини, претходне две дефиниције се слично односе као геометријска и механичка интерпретација извода, одакле претходни резултат и није неочекиван.

Став Ако је функција f диференцијабилна у тачки x тада је она и непрекидна у тачки x.

Уз основна својства лимеса, имамо да је f непрекидна у x, ако је $\lim_{h\to 0} f(x + h) - f(x) = 0$. Уколико је још и диференцијабилна, тада последњи израз износи $Ah + o(h)$, што свакако тежи нули.

Обрнуто не мора да важи, а за пример се може узети раније поменута функција $|x|$.

Правила диференцирања

У наредних неколико ставова наводимо понашање извода у односу на уобичајене операције са функцијама

Став Нека функције u и v имају изводе у тачке x. Тада и функције $u \pm v, u \cdot v, \frac{u}{v}$ имају извод у тачки x (последња уколико је $v(x) \neq 0$) и важи

1. $(u \pm v)'(x) = u'(x) \pm v'(x)$.

2. $(u \cdot v)'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$.
3. $(\frac{u}{v}'(x) = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v^2(x)}$.
Доказ погледати у књизи.
Из претходног се даље могу израчунати изводи неких функција, као што су tg и ctg, као количници функција чије изводе знамо. Добија се $\mathrm{tg}'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ и $\mathrm{ctg}'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$.
Став Нека је функција $f(x)$ диференцијабилна у тачки x_0 а функција $g(x)$ диференцијабилна у тачки $y_0 = f(x_0)$. Тада је функција $g \circ f$ диференцијабилна у тачки x_0 и важи

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0).$$

Доказ Како је g диференцијабилна у y_0 то је

$$g(y_0 + h) = g(y_0) + g'(y_0)h + \alpha(h)h,$$

где је $\alpha(h)$ функција која тежи нули када $h \to 0$. Додефинишимо додатно да је $\alpha(0) = 0$ и приметимо да је последња релација тачна и тада. Заменом у тој релацији, за прираштај сложене функције имамо

$$g(f(x_0 + h)) - g(f(x_0)) = g'(y_0)(f(x_0 + h) - f(x_0)) + \alpha(f(x_0 + h) - f(x_0))f(x_0 + h) - f(x_0).$$

Приметимо да за h довољно мало израз има смисла, јер је због непрекидности функције f разлика $f(x_0+h)-f(x_0)$ мала. Такође, поменуто додефинисавање α нам треба, јер је могуће да се деси $f(x_0+h) = f(x_0)$ за $h \neq 0$. Дељењем добијеног израза са h добијамо

$$\frac{g(f(x_0 + h)) - g(f(x_0))}{h} = g'(y_0)\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \alpha(f(x_0 + h) - f(x_0))\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Пуштајући да $h \to 0$, први сабирак са десне стране једнакости конвергира ка $g'(y_0) \cdot f'(x_0)$. Други сабирак конвергира ка нули, јер $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ конвергира ка $f'(x_0)$, што је коначан број, док $\alpha(f(x_0 + h) - f(x_0))$ тежи нули. Наиме, како је f непрекидна у x_0, пуштањем да $h \to 0$, то $f(x_0 + h) - f(x_0) \to 0$, а одатле по Теореми о лимесу сложене функције и $\alpha(f(x_0 + h) - f(x_0))$ тежи нули.
Последњи став од ових основних својстава извода се односи на извод инверзне функције
Став Нека је $y = f(x)$ непрекидна и строго монотона функција у некој околини тачке x_0 и нека је у тој тачки још и диференцијабилна. Уколико је $f'(x_0) \neq 0$, тада је и инверзна функција f^{-1} диференцијабилна у $y_0 = f(x_0)$ и важи

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Доказ погледати у књизи. Напоменимо само да претходни став осим што даје формулу за израчунавање извода, гарантује и диференцијабилност инверзне функције. Иначе, уколико би одмах знали да је f^{-1} диференцијабилна, њен извод можемо израчунати и преко претпрошлог става о изводу композиције. Заиста, тада је $f^{-1}(f(x)) = x$ и диференцирањем тог израза добијамо

$$\left(f^{-1}(f(x))\right)' = \left(f^{-1}\right)'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) = x' = 1,$$

што је у ствари претходна формула. На овај начин можемо да израчунамо изводе логаритма и инверзних тригонометријских функција, а по поменутом знамо и где су диференцијабилне. Примера ради, како e^x има извод e^x у свим тачкама, који нигде није једнак нули. Самим тим, $\ln x$ има извод у свим тачкама свог домена. Што се рачуна тиче имамо да је $\ln e^x = x$, те диференцирањем

$$\left(\ln e^x\right)' = \ln'(e^x) \cdot e^x = 1,$$

односно $\ln'(e^x) = \frac{1}{e^x}$. Заменом $e^x = t$, добијамо да је $\ln'(t) = \frac{1}{t}$. Аналогно се добија да је $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$. Одавде, можемо израчунати и извод степене функције за сваки степен $\alpha \in \mathbb{R}$. Наиме како је $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$, диференцирањем добијамо

$$\left(x^\alpha\right)' = e^{\alpha \ln x} \cdot \left(\alpha \ln x\right)' = x^\alpha \alpha \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

Претходно се односи на $x > 0$, да би логаритам имао смисла. Остали случајеви се слично разматрају.
Што се инверзних тригонометријских функција тиче, за arcsin који је дефинисан на $[-1, 1]$ извод рачунамо само у тачкама $(-1, 1)$ (тако смо и дефинисали). Он је на том интервалу инверзна функција за $\sin x$ на интервалу $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, на коме је извод синуса $\cos x$. Како $\cos x$ нема ниједну нулу на $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, то arcsin има извод у свим тачкама и аналогним рачуном имамо

$$(\arcsin(\sin x))' = \arcsin'(\sin x) \cos x = 1,$$

тј. да је $\arcsin'(\sin x) = \frac{1}{\cos x}$, за $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Како је на том интервалу $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$, то добијамо $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Слично се разматрају и остале инверзне тригонометријске функције.
Даље, знајући све изводе основних елементарних функција, можемо израчунати извод сваке елементарне функције, у тачкама у којим је диференцијабилна. Више детаља се може наћи у књизи.
Поменимо још да је услов $f'(x_0) \neq 0$ у последњем ставу неопходан. Примера ради функција x^3 је строго монотона и диференцијабилна у свим тачкама. Њен извод износи $3x^2$ и једнак је нули за $x = 0$. Њој

инверзна функција $x^{1/3}$ са друге стране нема извод у одговарајућој тачки 0^3. Заиста, ако погледамо по дефиницији је

$$\frac{h^{1/3}-0}{h}=h^{-2/3},$$

што не конвергира када $h\to 0$, прецизније тежи бесконачно. Ова ситауација има природну геометријску интерпретацију. Наиме, да је извод нула, значи да је тангента у тој тачки паралелна $x-$оси, а са друге стране, график инверзне функције се добија симетријом у односу на праву $y=x$. При тој симетрији, права паралелна $x-$оси постаје права паралелна $y-$оси, која има коефицијент правца бесконачно (тј. није облика $y=ax+b$). Уопште, ова ситуација одговара томе када функција има бесконачан извод (не обавезно инверзна).

По аналогији са лимесима дефинишимо и леви и десни извод.

Дефиниција Нека је f функција дефинисана у интервалу лево од тачке x (нпр. на $(x-\varepsilon,x]$). Ако постоји коначан

$$\lim_{h\to 0-}\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

називамо га левим изводом функције f у тачки x и означава се са $f'_-(x)$. Аналогно се дефинише и десни извод.

Како лимес постоји ако и само ако постоје леви идесни извод и једнаки су, то и функција има извод у тачки ако постоје леви и десни извод и једнаки су. Геометријска интерпретација се односи на то да тада график може да се апроксимира са полуправама са обе стране и одговара томе да функције има неке "шпицеве", попут функције $|x|$. Више детаља се може погледати у књизи.

Диференцијал Ако је функција f диференцијабилна у тачки x, односно уколико важи

$$f(x+h)-f(x)=f'(x)h+o(h),$$

видимо да је део $f'(x)h$ главни део прираштаја. Прецизније, остатак прираштаја функције је за ред величине мањи од наведеног линеарног дела. Тај главни, односно линеарни део прираштаја називамо диференцијалом функције f у ознаци $df(x)$. Дакле

$$df(x)h=f'(x)h.$$

Такође, једноставности записа ради користи се и ознака $df(x)$, или само df. Геометријски диференцијал је прираштај тангенте на график функције у тачки x. Самим тим, претходни израз има смисла за свако h, али наравно апроксимација је добра само уколико имамо да $h\to 0$.

Уколико посматрамо функцију $f(x)=x$, за њен диференцијал имамо $df(x)=dx=1\cdot h$, одакле се за прираштај h користи само ознака dx. У тој нотацији је дакле $df(x)=f'(x)dx$, а самим тим је и $f'(x)=\frac{df(x)}{dx}$. За разлику од раније напоменуте нотације са h и δx у овом случају је згодно писати диференцијал на претходни начин. Илустроваћемо ово на једном важном својству диференцијала. Нека је дакле $f(x)$ диференцијабилна функција и нека је још x функција од неког параметра t. По изводу сложене функције је тада $d(f(x(t)))=f'(x(t))x'(t)dt$. Приметимо даље да је израз $x'(t)dt$ диференцијал функције $x(t)$ тј. $dx(t)$. Отуда је опет $df(x(t))=f'(x(t))dx(t)$. Самим тим диференцијал увек има облик $f'(x)dx$, без обзира да ли је x независно променљива или зависи од неке друге променљиве. Ово својство се назива инваријантност форме диференцијала.

Рачунање диференцијала се своди на одговарајућа правила рачунања извода.

Став Ако су функције u и v диференцијабилне у тачки x, онда важи

1. $d(u(x)\pm v(x))=du(x)\pm dv(x)$
2. $d(u(x)v(x))=v(x)du(x)+u(x)dv(x)$.
3. $d\frac{u(x)}{v(x)}=\frac{v(x)du(x)-u(x)dv(x)}{v^2(x)}$, где у последњем претпостављамо да је још $v(x)\neq 0$.

Виши изводи и диференцијали

Нека је функција $f(x)\colon(a,b)\to\mathbb{R}$ диференцијабилна у свакој тачки интервала (a,b). Тада је њен извод $f'(x)$ опет функција независно променљиве x на интервалу (a,b). Ако је та функција диференцијабилна у некој тачки x интервала (a,b), вредност њеног извода у тој тачки називамо другим изводом функције f и означавамо га са $f''(x)$, или $f^{(2)}(x)$. Дакле

$$(f'(x))'=f''(x).$$

Слично, опет уколико је f' диференцијабилна у свим тачкама други извод је опет функција, и његов извод називамо трећим изводом функције f итд. Прецизније, можемо дати индуктивну дефницију да уколико је дефинисан $n-$ти извод $f^{(n)}$ функције f на интервалу (a,b) извод те функције у некој тачки је $n+1-$и извод функције f, тј.

$$(f^{(n)}(x))'=f^{(n+1)}(x).$$

Нотације ради, уколико функција има $n-$ти извод, кажемо да је $n-$пута диференцијабилна у тој тачки. Такође, често се користи нотација $f^{(0)}(x)=f(x)$.

Што се рачуна тиче, рачунање виших извода аналогно је рачунању првог извода, међутим сами изрази могу бити рогобатнији. Прођимо кроз пар једноставних примера.

1. Извод функције a^x износи $(a^x)' = a^x \ln a$. Самим тим, из правила за извод производа и како је извод константе нула добијамо да је $(a^x)^{(n)} = a^x(\ln a)^n$. Специјално $(e^x)^{(n)} = e^x$.
2. Што се степене функције тиче, имамо да је $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$. Поновним диференцирањем добијамо да је $(x^\alpha)'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$. Индукцијом се може показати да је $(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$.
3. Што се тиче извода синуса и косинуса, приметимо да из адиционих формула директно имамо да је $\sin x' = \sin(x+\frac{\pi}{2})$ и $\cos x' = \cos(x+\frac{\pi}{2})$. Одавде, из правила за рачунање извода сложене функције видимо да је $(\sin x)^{(n)} = \sin(x+n\frac{\pi}{2})$ и $(\cos x)^{(n)} = \cos(x+n\frac{\pi}{2})$. Претходни изрази се могу даље расписати. Са друге стране, ако желимо да избегнемо претходну нотацију, опет директно имамо да је

$$\sin x' = \cos x, \qquad (\sin x)^{(2)} = -\sin x, \qquad (\sin x)^{(3)} = -\cos x, \qquad (\sin x)^{(4)} = \sin x,$$

након чега се опет изводи периодично понављају. Слично се добија и за косинус.
Још неке примере погледати у књизи.
Од основних својстава, како први извод директно пролази кроз збир, то и сви виши изводи директно пролазе кроз збир. Прецизније важи

$$(u(x)+v(x))^{(n)} = u^{(n)}(x) + v^{(n)}(x),$$

уколико су функције u и v довољно пута диференцијабилне. Што се производа тиче, ситуација је мало компликованија.
Став Ако су u и v $n-$пута диференцијабилне функције, тада је и $u\cdot v$ $n-$пута диференцијабилна и важи

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(n-k)} v^{(k)}.$$

Доказ се ради индукцијом и потпуно је аналоган доказу биномне формуле. Погледати детаље у књизи.
Претходна формула се назив још и Лајбницова формула.
Што се виших диференцијала тиче, њихова дефиниција је слична тј. они су диференцијали од диференцијала. Дакле, за диференцијалну функцију f имамо од раније да је $df = f'(x)dx$, те поновним диференцирањем добијамо $d^2f(x) = d(df(x)dx) = d(f'(x)dx) = f''(x)(dx)^2$. Овде је коришћено да прираштај dx не зависи од променљиве x (ово је једна од ситуација где је логичније користити ознаку која нема везе са x, попут h), а самим тим и не утиче на извод. Последњи израз се уобичајено пише без заграде, тј. као $d^2f(x) = f''(x)dx^2$. Индукцијом добијамо да је $d^nf(x) = f^{(n)}(x)dx^n$.
Поменимо још само да виши диференцијали немају својство инваријантности које има први диференцијал. По жељи се детаљи могу погледати у књизи.

Основне теореме диференцијалног рачуна

Пре него што видимо примене извода, прецизирајмо један појам
Дефиниција Нека је $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ функција и $c \in (a,b)$. За тачку c кажемо да је локални максимум (минимум) функције f уколико постоји околина U тачке c, таква да је

$$f(x) \leqslant f(c) \qquad (f(x) \geqslant f(c)),$$

за све $x \in U$. Уколико су неједнакости строге за све $x \in U \setminus \{c\}$ кажемо да је c строги локални максимум (минимум). (Строги) локални максимум и минимум се заједно називају (строги) локални екстремум.
Претходна дефиниција је општија од раније дефинисаног максимума и минимума, које ћемо надаље називати глобални минимум или максимум. Другачије речено, c је локални екстремум, ако је максимум или минимум функције на некој околини тачке c. Наравно, глобални максимумм или минимум се увек локални екстремуми, док обрнуто не мора бити тачно. Прво својство извода које наводимо је да они дају неопходан услов за локалне екстремуме.
Став Нека је f диференцијабилна у тачки c и нека у тој тачки има локални екстремум. Тада је $f'(c) = 0$.
Доказ Доказ се своди на посматрање знака $\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$. Уколико је c, примера ради локални минимум, за h довољно мало да $c+h$ упада у околину на којој је c минимум, имамо да је $f(c+h)-f(c) \geqslant 0$. Са друге стране h мења знак. Отуда је $\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geqslant 0$, за h позитивно и $\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leqslant 0$, за h негативно. Како лимес постоји, јер смо претпоставили да је f диференцијабилна у c, то извод у тој тачки мора бити нула.
Претходни став се назива и Фермаов став.
Дакле, кандидати за локалне екстремуме су оне тачке x у којима је $f'(x) = 0$. Ови услови нису довољни, примера ради за $f(x) = x^3$ је $f'(0) = 0$, али та тачка није локални екстремум. Такође, као што се види из доказа, функција мора да буде дефинисана на некој околини тачке да би применили претходни став. Дакле, уколико тражимо екстремне вредности функције, крајеви интервала морају одвојено да се посматрају. Примера ради претходни став не види тачке попут $x = 0$ за функцију $f(x) = \sqrt{x}$ која је глобални минимум, или тачке 1 и -1 за arcsin који су глобални максимум и минимум те функције. Из тог разлога смо и у дефиницији локалног екстремума захтевали да функција буде дефинисана на околини, дакле и лево и десно од тачке.
Теорема Нека је $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ функција која је непрекидна на $[a,b]$ и диференцијабилна на (a,b) и нека је још $f(a) = f(b)$. Тада постоји $c \in (a,b)$ такво да је $f'(c) = 0$.
Доказ Доказ се своди на Вајерштрасову Теорему и претходни став. По Вајерштрасу, како је f непрекидна

на $[a,b]$ она на том сегменту достиже глобални максимум M и глобални минимум m у неким тачкама. Приметимо прво да ако је $m=M$ то је f константна у ком случају је $f'(x)=0$ у свим тачкама. Уколико то није случај, барем једна од вредности m или M није једнака вредностима f у крајевима интервала, а самим тим та тачка је унутар (a,b). Како је она и локални екстремум, по претходном ставу, како је f диференцијабилна на (a,b) у тој тачки је извод нула.
Претходна Теорема се назива Ролова Теорема. Њену геометријску интерпретацију погледати у књизи. Услов да је $f(a)=f(b)$ у претходној Теореми је мало незгодан за практичне примене. Отуда, наредна Теорема, која се назива Лагранжева, мада се своди на Ролову, доста је практичнија од ње.
Теорема Нека је $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ функција која је непрекидна на $[a,b]$ и диференцијабилна на (a,b). Тада постоји тачка $c\in(a,b)$ таква да је

$$f'(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Доказ Посматрајмо функцију $\varphi(x)=f(x)+\lambda x$ и изаберимо λ тако да су задовољени услови Ролове Теореме. Дакле, треба нам да је $f(a)+\lambda a=f(b)+\lambda b$, односно да је $\lambda=-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Тада по Роловој Теореми постоји тачка c таква да је $\varphi'(c)=f'(c)+\lambda=0$, што је и требало показати.
Геометријску интерпретацију и ове Теореме погледати у књизи. Лагранжева Теорема се назива иначе и Теорема о средњој вредности.
Последице Лагранжеве Теореме
За почетак, преко Лагранжеве Теореме директно можемо да покажемо да је контантна функција једина функција чији је извод једнак нули
Став Нека је $f\colon(a,b)\to\mathbb{R}$ диференцијабилна функција, таква да је $f'(x)=0$ за све $x\in(a,b)$. Тада је $f(x)=c$ за све $x\in(a,b)$
Узмимо тачке $x,y\in(a,b)$. Како f задовољава услове Лагранжеве Теореме на сегменту $[x,y]$, имамо да је $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=f'(c)=0$, односно $f(x)=f(y)$. Како су то биле произвољне две тачке, f узима исту вредност у свим тачкама.
Директна последица претходног, је да функције које имају исте изводе, које су дефинисане на интервалу, се разликују за константу.
Даље, осим екстремума, изводима можемо да видимо и монотоност функције.
Став Нека је $f\colon(a,b)\to\mathbb{R}$ диференцијабилна функција у (a,b) и нека је $f'(x)\geqslant 0(\leqslant 0)$. Тада f расте (опада) на (a,b). Уколико је $f'(x)>0(<0)$ тада f строго расте (опада) на (a,b).
Доказ Претпоставимо да је $f'(x)\geqslant 0$ и нека је $x,y\in(a,b)$, за које је $x<y$. Тада је по Лагранжевој Теореми $f(y)-f(x)=f'(c)(y-x)\geqslant 0$. Такође видимо и да уколико је $f'(c)>0$ функција строго расте.
Услов за строгу монотоност није неопходан. Примера ради, раније поменута функција $f(x)=x^3$ строго расте, али извод јој није строго позитиван (у нули је једнак нули).
Прекиди извода
Претпоставимо да имамо функцију $f\colon(a,b)\to\mathbb{R}$ која је диференцијабилна у свакој тачки. Поставља се питање каква ће тада бити функција $f'(x)$. Примере које смо имали до сада су углавном елементарне функције које су махом диференцијабилне у свим тачкама (махом са поменутим изузецима, које нису биле диференцијабилне само у понеким тачкама). Наравно општи случај није такав. Кратко се осврнимо на ово питање. За почетак, Лагранжева Теорема гарантује да извод не може да има прекиде прве врсте. Прецизније
Став Нека је $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ диференцијабилна на (a,b), непрекидна на $[a,b]$ и нека још постоји $\lim_{x\to a+}f'(x)$. Тада постоји и десни извод у тачки a, а важи и

$$f'_+(a)=\lim_{h\to 0+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a+}f'(x).$$

Доказ По Лагранжевој Теореми, за $h>0$, важи

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(c_h),$$

за неко $c_h\in(a,a+h)$. Приметимо да како $h\to 0$, по Теореми о два полицајца и $c_h\to a$. Одатле, пуштањем лимеса да $h\to 0$ у горњој једнакости, добијамо закључак става.
Слично тврђење важи и за леви извод у b уколико постоји леви лимес првог извода.
Последица Нека је $f\colon(a,b)\to\mathbb{R}$ диференцијабилна функција. Тада функција $f'(x)$ нема прекиде прве врсте.
Нека је $c\in(a,b)$, и претпоставимо супротно да f' има прекид прве врсте, односно да постоје $\lim_{x\to c-}f'(x)$ и $\lim_{x\to c+}f'(x)$. Како је f диференцијабилна и непрекидна на некој околини тачке c, то су испуњени услови претходног става, одакле имамо да су леви и десни лимес $f'(x)$ у тачки c редом једнаки левом и десном изводу f у тачки c. Како је по претпоставци f диференцијабилна у c, то су леви и десни извод једнаки, а тиме су и леви и десни лимес $f'(x)$ једнаки у тачки c. Одатле, c није прекид $f'(x)$.
Напомена Претходна последица не каже да извод не може да има прекиде, што може, већ само да су му

сви прекиди друге врсте. Архипример такве функције је функција дата са

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$$

Ова функција је диференцијабилна у свакој тачки. Заиста, за $x \neq 0$, њен извод можемо рачунати као извод елементарне функције и уобичајеним рачуном имамо

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} \Big(-\frac{1}{x^2} \Big) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$$

У тачки $x = 0$ извод рачунамо по дефиницији. Имамо да је

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} h \sin \frac{1}{h} = 0,$$

јер $h \to 0$, а $\sin \frac{1}{h}$ је ограничен функција. Дакле, f је диференцијабилна у свакој тачки и њен извод износи

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$$

Ова функција није непрекидна у нули, јер прави проблем $\cos \frac{1}{x}$ који нема лимес. Одатле видимо и да је у питању прекид друге врсте.
И поред претходне напомене, извод $f'(x)$ има једну сличност са непрекидним функцијама. Наиме важи наредна Дарбуова Теорема
Теорема Ако је функција $f(x)$ диференцијабилна на сегменту $[a, b]$ (тј. ако је диференцијабилна на неком (α, β) који садржи $[a, b]$), онда за произвољно μ између $f'(a)$ и $f'(b)$ постоји $c \in (a, b)$ такво да је $f'(c) = \mu$.
Доказ погледати по жељи. Дакле, иако извод није непрекидан, пролази кроз све вредности попут непрекидне функције. Опет напоменимо да претходно није последица Коши - Болцанове Теореме.

Кошијева Теорема и Лопиталова правила

Наведена теорема је уопштење Лагранжеве Теореме и гласи
Теорема Ако су функције $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ непрекидне на $[a, b]$, диференцијабилне на (a, b) и $g'(x) \neq 0$, за $x \in (a, b)$, онда постоји тачка $c \in (a, b)$ таква да је

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Доказ је потпуно аналоган доказу Лагранжеве Теореме, уз посматрање функције $\varphi(x) = f(x) + \lambda g(x)$ уз намештање параметра λ за примену Ролове Теореме. Детаље погледати у књизи.
Из Кошијеве Теореме можемо добити још један начин за рачунање лимеса облика $\frac{f(x)}{g(x)}$. Начин одређивања се назива Лопиталова правила и може се показати корисним у неким ситуацијама.
Теорема Нека су функције $f(x), g(x)$ дефинисане у полуотвореном интервалу $(a, b]$, диференцијабилне у (a, b) и непрекидне на $(a, b]$ (b може да буде и $+\infty$ у ком случају претпостављамо да су функције непрекидне на (a, b)), нека је $f(b) = g(b) = 0$ или нека је $\lim_{x \to b-} f(x) = \lim_{x \to b-} g(x) = \pm\infty$, (у том случају опет претпостављамо непрекидност само на (a, b)) и нека је $g'(x) \neq 0$ на некој околини тачке b. Уколико постоји, коначан или бесконачан, $\lim_{x \to b-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, тада постоји и $\lim_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)}$ и они су једнаки.
Аналогно важи и за леве лимесе. Доказ по жељи погледати у књизи. Своди се на Кошијеву Теорему, међутим има доста случајева који се морају размотрити.

Тејлорова формула

Сетимо се да је једна од мотивација за исвод била да видимо које функције се могу лепо апроксимирати линеарним функцијама. Прецизније, апроксимирали би функцију простијом функцијом облика $ax + b$ (тј. линеарном), и тражили смо да разлика од почетне функције буде мала (тј. $o(h)$). Знајући да функција има и више изводе, поставља се питање можемо ли то урадити боље, а успут и прецизирати колика је грешка. Идеја је апроксимирати функцију полиномом, који би после линарне требало да буде нека од једноставнихијих функција. Сетимо се такође да виши диференцијали уз себе имају h^n. Отуда, ако би например хтели да апроксимирамо функцију користећи $d^2 f$, очекивано би користили h^2, што би опет дало полином по h.
Отуда за почетак, претпоставимо да функција $f(x)$, дефинисана на некој околини тачке a, има у тој тачки све изводе до реда n. Конструишимо полином степена n који у тачки a има исте изводе као и функција f, до реда n. Директним рачуном се види да је поменути полином

$$T_{n,a}(x) = f(a) + f'(a) \frac{x - a}{1} + f''(a) \frac{(x - a)^2}{2!} + \ldots + f^{(n)}(a) \frac{(x - a)^n}{n!}.$$

Заиста, ако погледамо $k-$ти извод од $T_{n,a}(x)$ у тачки a, прво сви сабирци уз степене до $k - 1$ се анулирају. Са друге стране, $k-$ти извод од $(x - a)^m$ за $m \geqslant k$ износи

$$((x - a)^m)^{(k)} = m(m - 1) \cdot \ldots \cdot (m - k + 1)(x - a)^{m-k}.$$

Одавде видимо да сабирци уз $(x-a)^m$ за $m > k$ у тачки a износе нула, јер остаје $(x-a)^{m-k}$ што је нула у тачки a. Дакле, остао је само сабирак $(x-a)^k$, чији је $k-$ти извод једнак $k(k-1)\cdot\ldots\cdot(k-k+1)(x-a)^{k-k} = k!$. Отуда се факторијели скрате и остане само константа $f^{(k)}(a)$. Дакле, $T_{n,a}(x)$ је полином за који важи

$$T_{n,a}(a)^{(k)} = f^{(k)}(a),$$

за све $k = 0, \ldots, n$. Назива се Тејлоров полином функције f. Наравно од интереса је проценити грешку коју правимо апроксимацијом функције $f(x)$ са $T_{n,a}(x)$. Отуда означимо са $R_n(x) = f(x) - T_{n,a}(x)$ остатак, односно грешку коју имамо при тој апроксимацији. Наводимо две процене за њега.

Теорема Нека је $f : U \to \mathbb{R}$, функција која је непрекидна на околини U и има изводе до реда $n+1$ на тој околини. Уколико је $a \in U$, за све $x \in U$ важи формула

$$f(x) = f(a) + f'(a)\frac{x-a}{1} + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \ldots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c),$$

где је c тачка која припада интервалу (a, x) или (x, a) зависно од распореда x и a, и наравно зависи од тачке x.

Да би се нагласило да c припада поменутом интервалу, често се користи и ознака $c = a + \theta(x-a)$, где је $\theta \in (0, 1)$. Претходна формула се назива Тејлорова формула са остатком у Лагранжевом облику.

Доказ У ранијој нотацији, нека је $R_n(x) = f(x) - T_{n,a}(x)$, те приметимо да како полиноми имају изводе сваког реда, то функција R_n има такође изводе до $n+1-$ог реда у околини U, односно колико и функција f. Претпоставимо једноставности ради да је $x < a$ и применимо Кошијеву Теорему на функције $f(x) = R_n(x)$ и $g(x) = (x-a)^{n+1}$ у нотацији теореме, на интервалу $[a, x]$. Приметимо да су услови теореме задовољени, јер је $g'(x) = (n+1)(x-a)^n$ није нула унутар интервала (a, x) (једнак је нули само у a) и функције су свакако пута диференцијабилне. Дакле, имамо да постоји $c_1 \in (a, x)$ такво да је

$$\frac{R_n(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{R_n(x) - R_n(a)}{(x-a)^{n+1} - (a-a)^{n+1}} = \frac{R_n'(c_1)}{(n+1)(c_1-a)^n}.$$

Приметимо да је $R_n(a) = f(a) - f(a) = 0$, одакле следи прва једнакост. Заправо имамо да је $R_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) - T_{n,a}^{(k)}(a) = 0$, за све $k = 0, 1, \ldots, n$, јер смо Тејлоров полином и направили да је полином чији су сви изводи једнаки изводу функције у датој тачки. Одатле, прво имамо

$$\frac{R_n'(c_1)}{(n+1)(c_1-a)^n} = \frac{R_n'(c_1) - R_n'(a)}{(n+1)(c_1-a)^n - (n+1)(a-a)^n},$$

а даље примењујући Кошијеву Теорему, сада на функције R_n' и $(n+1)(x-a)^n$ на интервалу $[a, c_1]$ добијамо даље

$$\frac{R_n(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{R_n'(c_1) - R_n'(a)}{(n+1)(c_1-a)^n - (n+1)(a-a)^n} = \frac{R_n''(c_2)}{(n+1)n(c_2-a)^{n-1}},$$

за неку тачку $c_2 \in (a, c_1)$. Даље, наставимо поступак.

Размотримо да када можемо да понављамо претходни поступак. Дакле, прво нам треба да су функције диференцијабилне, где је R_n диференцијабилна $n+1$ пута, док је $(x-a)^{n+1}$ диференцијабилна колико год пута. Даље треба нам да извод функције у бројиоцу није нула унутар отвореног интервала, што се први пут дешава за $n+2-$и извод, када је извод функције свуда нула. Такође, нам треба да је $R_n^{(k)}(a) = 0$, и аналогно за функцију у бројиоци. Приметимо дакле да све можемо да урадимо тачно n пута. Одатле, после n примена Кошијеве Теореме имамо да је

$$\frac{R_n(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{R_n'(c_1)}{(n+1)(c_1-a)^n} = \ldots = \frac{R_n^{(n)}(c_n)}{(n+1)n\cdot 2(x-a)} = \frac{R_n^{(n)}(c_n) - R_n^{(n)}(a)}{(n+1)n\cdot 2(x-a) - (n+1)n\cdot 2(a-a)} = \frac{R_n^{(n+1)}(c_{n+1})}{(n+1)!},$$

за неку тачку $c_{n+1} \in (a, c_n) \subset (a, x)$. Даље, како је $T_{n,a}^{n+1}(x) = 0$, јер је $T_{n,a}(x)$ полином степена n, то је

$$R_n^{(n+1)}(c_{n+1}) = f^{(n+1)}(c_{n+1}) - T_{n,a}^{n+1}(c_{n+1}) = f^{(n+1)}(c_{n+1}).$$

Дакле, извлачећи прву и последњу једнакост, добили смо

$$\frac{R_n(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{R_n^{(n+1)}(c_{n+1})}{(n+1)!} = \frac{f^{(n+1)}(c_{n+1})}{(n+1)!},$$

што је заправо тврђење теореме.

Друга процена остатка је сличнија оригиналној мотивацији за извод и назива се Пеанов облик остатка.

Теорема Нека је f дефинисана на околини U тачке a, нека на тој околини има све изводе до $n-1-$ог реда и нека још има $n-$ти извод у тачки a. Тада је

$$R_n(x) = o(x-a)^n,$$

када $x \to a$.

Доказ погледати у књизи.

Претходна процена је слабија од Лагранжеве, јер даје само асимптоцку оцену остатка. Са друге стране, претпоставили смо доста мање, тј. да $n-$ти извод постоји само у једној тачки, док за Лагранжеву процену претпостављамо постојање $n-$ог извода на целој околини.

Испитивање функција

Монотоност функција

Раније смо видели да функција која има ненегативан извод расте. Да важи и обрнуто директно се показује.

Став Нека је $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ растућа (опадајућа) и диференцијабилна функција. Тада је $f'(x) \geqslant 0 (\leqslant 0)$.

Доказ Уколико је f растућа, за $x \in (a,b)$ и $h > 0$, како је $x + h > x$ то је $f(x+h) \geqslant f(x)$, а одатле је

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geqslant 0.$$

Са друге стране, за $h < 0$ је $f(x+h) \leqslant f(x)$, па дељењем са h опет добијамо ненегативан број, тј. претходна неједнакост је тачна и у овом случају. Пуштањем да $h \to 0$, добијамо тражени резултат.

Такође, раније смо видели да су нуле извода кандидати за локалне екстремуме. Прецизирајмо даље тај резултат

Став Нека је функција f непрекидна у некој околини U тачке c и диференцијабилна у $U \setminus \{c\}$. Тада је c локални екстремум функције f ако f' мења знак при проласку кроз тачку c. Прецизније, уколико је

1. $f'(x) < 0$, за $x \in U \cap (-\infty, c)$ и $f'(x) > 0$ за $x \in U \cap (c, +\infty)$ онда је c строги локални минимум.
2. $f'(x) > 0$, за $x \in U \cap (-\infty, c)$ и $f'(x) < 0$ за $x \in U \cap (c, +\infty)$ онда је c строги локални максимум.
3. Ако је извод сталног знака на околини c, тада c није екстремум.

Доказ За $x \in U$ по Лагранжевој Теореми примењеној на $[c,x]$ или $[x,c]$ имамо да је

$$f(c) - f(x) = f'(\alpha)(c - x).$$

Уколико је случај 1. тада за $x < c$ је $f'(\alpha) < 0$, а $c - x > 0$, па је десна страна једнакости строго мања од нуле, односно $f(c) < f(x)$. Ако је $x > c$, обе неједнакости се окрећу и опет је десна страна строго негативна. Отуда је c минимум. Аналогно се показује 2.

3. следи опет слично, са тим што сада $f'(\alpha)$ увек има исти знак, док се знак $c - x$ мења, одакле видимо да c није екстремум.

Претходни став је згодан што не подразумева диференцијабилност у c, односно ради и са примерима попут $|x|$.

Поменимо још само да преко Тејлоровог полинома можемо такође даље да испитамо природу тачака у којима је $f'(x) = 0$, тј. видети да ли су у питању екстремуми или не. У пракси претходни начин је једноставнији и не подразумева неки даљи рачун, тј. довољно је видети знак првог извода да би се видело да ли је у питању екстремум. С тога и не помињемо те резултате, а било ко заинтересован може погледати исте у књизи.

Конвексност

Дефиниција За функцију $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ кажемо да је конвексна уколико за произвољне $x_1, x_2 \in (a,b)$ важи

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2),$$

за све $\lambda \in [0,1]$. Уколико још, за све $x_1 \neq x_2$ и све $\lambda \in (0,1)$ важи строга неједнакост $<$ кажемо да је f строго конвексна.

Уколико уместо знака $\leqslant (<)$ стоји знак $\geqslant (>)$ за функцију f кажемо да је конкавна.

Конвексност има једноставну геометријску интерпретацију. Наиме, како скуп $\{\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 | \lambda \in [0,1]\}$ представља дуж која спаја x_1 и x_2, то претходна неједнакост каже да је график функције f испод сечице на график у тачкама $f(x_1)$ и $f(x_2)$. Детаље са скицом погледати у књизи.

Прецизирајмо мало више тај појам. Уколико је $x \in [x_1, x_2]$, односно ако припада дужи са крајевима x_1 и x_2 то директно видимо да је

$$x = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} x_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} x_2.$$

Такође, видимо да коефицијенти $\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$ и $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ су облика λ и $1 - \lambda$ за неко $\lambda \in [0,1]$. Дакле, за конвексну функцију f имамо да је

$$f(x) \leqslant \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2),$$

односно

$$(x_2 - x_1) f(x) \leqslant (x_2 - x) f(x_1) + (x - x_1) f(x_2).$$

Одавде даље добијамо

$$(x_2 - x_1) f(x) \leqslant (x_2 - x) f(x_1) + (x - x_1) f(x_2) = (x_2 - x_1 - x + x_1) f(x_1) + (x - x_1) f(x_2) = (x_2 - x_1) f(x_1) - (x - x_1) f(x_1) + (x - x_1) f(x_2)$$

$$\Leftrightarrow (x_2 - x_1)(f(x) - f(x_1)) \leqslant (x - x_1)(f(x_2) - f(x_1)) \Leftrightarrow \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Потпуно аналогно се добија да је

$$(x_2 - x_1) f(x) \leqslant (x_2 - x) f(x_1) + (x - x_1) f(x_2) = (x_2 - x) f(x_1) + (x_2 - x_1 - (x_2 - x)) f(x_2)$$

$$\Leftrightarrow (x_2 - x)(f(x_2) - f(x_1)) \leqslant (x_2 - x_1)(f(x_2) - f(x)) \Leftrightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Претходне неједнакости можемо заједно записати као
$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x},$$
наравно за $x_1 < x < x_2$, што је и претпостављано кроз цео рачун. Ако се детаљно погледа, корацима уназад се добија да је претходна неједнакост еквивалентна конвексности.
За конкавне функције важи аналогно, само са $\geqslant$, односно да нагиби опадају.
Овај еквивалентан услов такође има геометријску интерпретацију. Наиме функција је конвексна ако нагиби сечица на график $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ расту и по x_1 и по x_2. Из овога даље налазимо везу конвексности са изводом.
Напомена Пре него што кренемо на везу са изводом, до сада нисмо помињали ништа о непрекидности конвексне функције f. Ово се такође може показати из претходних неједнакости, а идеја би била следећа. Нека је $x \in (a,b)$ узмимо h довољно мало и проценимо нагиб $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Узимањем неке две тачке d_1 и d_2 које су унутар (a,b), али десније од $x+h$, имамо да је нагиб у тим тачкама већи него $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ по претходном, а узимањем две тачке l_1 и l_2 које су левље од $x-h$, нагиб над њима је мањи од поменутог, тј
$$\frac{f(l_1)-f(l_2)}{l_1-l_2} \leqslant \frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x} \leqslant \frac{f(d_1)-f(d_2)}{d_1-d_2}.$$
Множењем израза са h, имамо да је
$$\frac{f(l_1)-f(l_2)}{l_1-l_2}h \leqslant f(x+h)-f(x) \leqslant \frac{f(d_1)-f(d_2)}{d_1-d_2}h,$$
уколико је $h>0$, или обрнуто уколико је $h<0$. У сваком случају, како су изабрани нагиби у тачкама l_1, l_2, d_1, d_2 константе, када $h \to 0$, оба крајња израза теже нули, одакле је по Теореми о два полицајца f непрекидна.
За крај напомене, још само приметимо да смо конвексну функцију дефинисали на отвореном интервалу (a,b) једноставности ради а аналогна је дефиниција на било ком интервалу. Тада у крајњим тачкама интервала не можемо да применимо претходни резон, јер немамо тачке које су лево или десно. Заправо, у тим тачкама конвексна функција може имати прекид. Заинтересовани могу да размисле о примеру.
Покажимо сада да конвексна функција f има леви и десни извод у свакој тачки. Нека је $x \in (a,b), h>0$ и $c>0$ било који фиксиран број, такав да је $x-c \in (a,b)$. По монотоности нагиба имамо да је
$$\frac{f(x)-f(x-c)}{c} \leqslant \frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$
а такође знамо и да нагиб $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ опада по h. Одавде постоји лимес када $h \to 0+$, (опадајућа функција која је ограничена одоздо) што је десни извод у x. Слично имамо и леви извод у свакој тачки, што можемо видети фиксирањем h и пуштањем да $c \to 0+$. Такође видимо и да је $f'_-(x) \leqslant f'_+(x)$, а слично можемо видети и да је $f'_+(x_1) \leqslant f'_-(x_2)$, ако је $x_1 < x_2$ (заправо, између та два броја се налази нагиб $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$).
Одавде, од мањег интереса нам је то да конвексна функција има извод у свим тачкама осим њих пребројиво много (што се може показати аналогно томе да монотона функција има пребројиво много прекида, па опет, ко је заинтересован...) а више од интереса је следећи
Став Нека је $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ диференцијабилна и конвексна функција. Тада $f'(x)$ расте на (a,b).
Обрнуто се доказује применом Лагранжеве Теореме. Наиме, уколико извод расте, то је у ранијој нотацији
$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = f'(c_1), \qquad \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} = f'(c_2),$$
а како је $c_1 \in (x_1, x)$ и $c_2 \in (x, x_2)$, то је због монотоности извода и $f'(c_1) \leqslant f'(c_2)$. Одавде имамо да је f конвексна. Такође, уколико извод строго расте имамо и да је функција строго конвексна.
Применом ствари од раније, закључујемо даље
Став Нека је $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ два пута диференцијабилна функција. Да би f била конвексна неопходно је и довољно да је $f''(x) \geqslant 0$.
Наравно, за конкавне функције важе аналогни резултати.
Слично као и за монотоност, уколико је други извод функције строго позитиван, она је тада и строго конвексна. Детаљи се могу погледати у књизи. Такође може се показати да је функција конвексна ако и само ако је њен график изнад тангенте у произвољној тачки.
Опет, слично као код монотоности, где смо тражили тачке у којима извод мења знак, тј. испостављало се да су то локални екстремуми, од интереса нам је да нађемо тачке у којима функција мења конвексност. Прецизније
Дефиниција Нека је функција $f(x)$ дефинисана у некој околини U тачке x_0 и диференцијабилна на том скупу. Тачка $(x_0, f(x_0))$ се назива превојном тачком криве, односно функције $y=f(x)$ уколико је f строго конвексна (конкавна) на скупу $\{x \in U | x > x_0\}$ и строго конкавна (конвексна) на скупу $\{x \in U | x < x_0\}$.
Приметимо прво да уколико је функција f два пута диференцијабилна на U и ако јој је други извод непрекидан у x_0, тада мора бити $f''(x_0)=0$, јер је са једне стране позитиван а са друге стране негативан,

или обрнуто. Приметимо такође да из претходне дефиниције претпостављамо да график функције f има тангенту у тачки $(x_0, f(x_0))$, а како је график конвексне функције изнад, а конкавне испод тангенте, то се при проласку графика кроз превојну тачку мења тај распоред. Отуд и назив превојна тачка, јер се слободно речено функција превија око тангенте.
Напоменимо само да се негде превојна тачка дефинише само као тачка у којој се мења конвексност (дакле, не тражи се претходни услов са постојањем тангенте) што је у пракси најчешћи случај. Ипак, то није исто као малопређашња дефиниција, јер она искључује неке случајеве попут

$$f(x) = \begin{cases} x^2, x < 0 \\ \sqrt{x}, x \geqslant 0 \end{cases}$$

која је непрекидна у нули и у нули јој се мења конвексност, али није диференцијабилна у тој тачки. Отуда, како смо ми дефинисали, 0 није превојна тачка ове функције.
Слично као код екстремума, довољне услове за превојну тачку нам даје знак другог извода при проласку кроз ту тачку.
Став Нека је f диференцијабилна у некој околини U тачке x_0 и два пута диференцијабилна у $U \setminus \{x_0\}$. Ако $f''(x)$ мења знак при проласку кроз x_0, то је x_0 превојна тачка функције f.
Како је са једне стране f'' нпр. позитиван а са друге негативан, то је са одговарајуће стране функција конвексна односно конкавна. Тиме видимо да су испуњени сви услови дефиниције.
Такође, испитивање да ли је нула другог извода превојна тачка може се урадити преко виших извода. Заинтересовани могу погледати исто у књизи.
Јенсенова неједнакост
Покажимо једно уопштење неједнакости којом смо дефинисали конвексне функције.
Став Нека је $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ конвексна функција и нека су $\lambda_i \in [0,1]$, за $i = 1, \ldots, n$, такви да је $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Тада важи

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i),$$

где је $x_i \in (a,b)$.
Доказ Доказ иде индукцијом по n. За $n = 2$, претходно је неједнакост из дефиниције конвексности. Претпоставимо да је неједнакост тачна за n и покажимо да је тачна и за $n+1$. Дакле, нека су $\lambda_i \in [0,1]$, за $i = 1, \ldots, n+1$, такви да је $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$ и $x_i \in (a,b)$. Треба показати

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i).$$

Означимо са $\Lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 - \lambda_{n+1}$ и претпоставимо да $\lambda \neq 0$, јер је у том случају претходна неједнакост тривијална. Наместимо сада функцију на неједнакост из дефиниције конвексности, тј.

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) &= f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i + \lambda_{n+1} x_{n+1}\right) \\ &= f\left(\Lambda \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\Lambda} x_i + \lambda_{n+1} x_{n+1}\right) \leqslant \Lambda f\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\Lambda} x_i\right) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}). \end{aligned}$$

Како је $\Lambda \in [0,1]$ и како је $\Lambda + \lambda_{n+1} = 1$, последњи корак је само поменута неједнакост. Даље, за први сабирак применимо индуктивну хипотезу. Имамо да је f конвексна, у суми је n сабирака и имамо да је $\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\Lambda} = \frac{\Lambda}{\Lambda} = 1$. Дакле, по индуктивној хипотези имамо да је

$$\Lambda f\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\Lambda} x_i\right) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \leqslant \Lambda \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\Lambda} f(x_i) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}),$$

одакле, скраћивањем Λ добијамо тражени резултат.
Претходна неједнакост се назива Јенсенова неједнакост. Наводимо само једну њену примену, наиме из ње директно следи неједнакост аритхметичке и геометријске средине. Узмимо функцију $f(x) = e^x$, која је конвексна, јер јој је други извод једнак e^x што је позитивна функција. Дакле, по претходном важи

$$e^{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e^{x_i},$$

где су $\lambda_i \in [0,1]$ и $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, а $x_i \in \mathbb{R}$. Изаберимо даље да је $\lambda_i = \frac{1}{n}$, што задовољава услове за λ и такође приметимо да је $e^{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i} = \prod_{i=1}^{n} e^{\lambda_i x_i}$. Дакле имамо да је

$$e^{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} x_i} = \prod_{i=1}^{n} e^{\frac{1}{n} x_i} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} e^{x_i}} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} e^{x_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} e^{x_i}}{n}.$$

Заменом да је $e^{x_i} = a_i$ добијамо да је

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n},$$

што је неједнакост аритметичке и геометријске средине. Услов који имамо је да је сваки од бројева a_i облика e^{x_i}, односно да је $a_i > 0$. Приметимо да у случају да је неки $a_i = 0$, лева страна неједнакости једнака нули, тако да неједнакост важи за све ненегативне бројеве a_i.