Ред елемента

Алгебра 1

$\boxed{1}$ За елемент a групе G и природан број m важи:

$$a^m = e \quad \Leftrightarrow \quad w(a) \mid m.$$

$\Leftarrow$: Претпоставимо да $w(a) \mid m$, тј. да постоји $k \in \mathbb{N}$ тако да је $m = k \cdot w(a)$. Тада је

$$a^m = a^{k \cdot w(a)} = (a^{w(a)})^k = e^k = e.$$

$\Rightarrow$: Нека је $a^m = e$. При дељењу броја m бројем $w(a)$ постоје јединствени количник k и остатак r, тј.

$$m = k \cdot w(a) + r, \quad 0 \le r < w(a).$$

Тада је

$$e = a^m = a^{k \cdot w(a) + r} = a^{k \cdot w(a)} \cdot a^r = (a^{w(a)})^k \cdot a^r = e^k \cdot a^r = e \cdot a^r = a^r.$$

Пошто је $w(a)$ најмањи природан број за који важи да је $a^n = e$ и како је $a^r = e, r < w(a)$, закључујемо да је $r = 0$.

$\boxed{2}$ Доказати да је за произвољан елемент a групе G

$$w(a) = w(a^{-1}).$$

За произвољан природан број k важи да је $(a^{-1})^k = (a^k)^{-1}$. За $k = w(a)$ имамо

$$(a^{-1})^{w(a)} = (a^{w(a)})^{-1} = e^{-1} = e.$$

На основу задатка 1, како је $(a^{-1})^{w(a)} = e$, закључујемо да $w(a^{-1}) \mid w(a)$.
Ако у једнакости $(a^{-1})^{w(a)} = e$ уместо елемента a ставимо елемент a^{-1} добијамо

$$((a^{-1})^{-1})^{w(a^{-1})} = e, \qquad a^{w(a^{-1})} = e.$$

Применом задатка 1 следи да $w(a) \mid w(a^{-1})$.
Из $w(a^{-1}) \mid w(a)$ и $w(a) \mid w(a^{-1})$ закључујемо да је $w(a) = w(a^{-1})$.

$\boxed{3}$ Доказати да је

$$w(x^{-1}ax) = w(a).$$

За произвољан природан број k имамо

$$(x^{-1}ax)^k = (x^{-1}ax)(x^{-1}ax)\cdots(x^{-1}ax) = x^{-1}a^k x.$$

За $k = w(a)$ имамо $(x^{-1}ax)^{w(a)} = x^{-1}a^{w(a)}x = x^{-1}ex = x^{-1}x = e$.
Пошто је $(x^{-1}ax)^{w(a)} = e$, на основу задатка 1 следи да

$$w(x^{-1}ax) \mid w(a).$$

Са друге стране важи $(x^{-1}ax)^{w(x^{-1}ax)} = e$, тј. $x^{-1}a^{w(x^{-1}ax)}x = e$, па је
$a^{w(x^{-1}ax)} = xex^{-1} = e$. На основу задатка 1 $w(a) \mid w(x^{-1}ax)$.

$\boxed{4}$ Доказати да је $w(ab) = w(ba)$, за произвољне елементе a и b групе G.
Представимо елемент ab у облику $b^{-1}bab$. На основу претходног задатка имамо

$$w(ab) = w(b^{-1}bab) = w(b^{-1}(ba)b) = w(ba).$$

$\boxed{5}$ Наћи редове свих елемената у цикличној групи реда 6.

Нека је G циклична група реда 6 генерисана елементом a, $G =< a >= \{e, a, a^2, a^3, a^4, a^5\}$.
Неутрални елемент e је реда 1.
Елемент a је реда 6 јер је $a^6 = e$.
За елемент a^2 важи: $a^2 \neq e$, $(a^2)^2 = a^4 \neq e$ и $(a^2)^3 = a^6 = e$.
Дакле, $w(a^2) = 3$.
Елемент $a^3 \neq e$, али је $(a^3)^2 = a^6 = e$, па је $w(a^3) = 2$.
За елемент a^4 важи: $a^4 \neq e$, $(a^4)^2 = a^8 = a^6a^2 = a^2 \neq e$,
$(a^4)^3 = a^{12} = (a^6)^2 = e$.
Дакле, ред елемента a^4 је 3.
Ред елемента a^5 је 6 јер је $a^5 \neq e$, $(a^5)^2 = a^{10} = a^4 \neq e$,
$(a^5)^3 = a^{15} = a^3 \neq e$, $(a^5)^4 = a^2 \neq e$, $(a^5)^5 = a \neq e$ и $(a^5)^6 = e$.

$\boxed{6}$ Наћи редове свих елемената у цикличној групи реда 12.
$w(e) = 1$, $w(a) = 12$, $w(a^2) = 6$, $w(a^3) = 4$, $w(a^4) = 3$,
$w(a^5) = 12$,$w(a^6) = 2$, $w(a^7) = 12$, $w(a^8) = 3$,
$w(a^9) = 4$, $w(a^{10}) = 6$, $w(a^{11}) = 12$.

$\boxed{7}$ Нека је n ред елемента a у групи G.
Ако је m било који цео број и $d = NZD(m, n)$, доказати да је $w(a^m) = \frac{n}{d}$.

Докажимо да $w(a^m) \mid \frac{n}{d}$ и да $\frac{n}{d} \mid w(a^m)$.
Како је $w(a) = n$, то је $a^n = e$ и важи да је

$$(a^m)^{\frac{n}{d}} = a^{\frac{mn}{d}} = (a^n)^{\frac{m}{d}} = e^{\frac{m}{d}} = e.$$

Из $(a^m)^{\frac{n}{d}} = e$, према задатку 1 следи да $w(a^m) \mid \frac{n}{d}$.
Ако $w(a^m)$ означимо са r, онда је $(a^m)^r = e$, тј. $a^{mr} = e$. Према томе, $w(a) \mid mr$, тј. $n \mid mr$. Дакле, постоји цео број q такав да је $mr = nq$. Тада је $\frac{m}{d}r = \frac{n}{d}q$, па $\frac{n}{d} \mid \frac{m}{d}r$. Пошто су бројеви $\frac{m}{d}$ и $\frac{n}{d}$ узајамно прости, следи да $\frac{n}{d} \mid r$, тј. да $\frac{n}{d} \mid w(a^m)$.

Специјално, ако је n ред елемента a у групи G и ако је $NZD(m, n) = 1$, онда је $w(a^m) = n$.

$\boxed{8}$ Нека су m и n редови елемената a и b у групи G и нека је e њен неутрал. Ако је $ab = ba$ и ако је $< a > \cap < b >= \{e\}$, доказати да је $w(ab) = NZS(m, n)$.

Означимо $w(ab) = k$ и $NZS(m, n) = l$. Треба показати да $k \mid l$ и $l \mid k$.
Пошто је $l = NZS(m, n)$, имамо да $m \mid l$ и $n \mid l$. Према томе, постоје бројеви l_1 и l_2 такви да је $l = l_1 m$ и $l = l_2 n$.
С обзиром да елементи a и b комутирају имамо да је

$$(ab)^l = a^l b^l = a^{l_1 m} b^{l_2 n} = (a^m)^{l_1} \cdot (b^n)^{l_2} = e^{l_1} \cdot e^{l_2} = e.$$

Из $(ab)^l = e$, на основу задатка 1 следи да $w(ab) \mid l$, тј. да $k \mid l$.
Са друге стране, пошто је $w(ab) = k$, имамо да је $e = (ab)^k = a^k b^k$, па је $a^k = b^{-k}$.
Означимо тај елемент са c. Како је $c = a^k$ и $c = b^{-k}$, то елемент c припада пресеку $< a > \cap < b >$ који је по претпоставци тривијалан. Дакле, $c = e$, тј. $a^k = e$ и $b^{-k} = e$.
Отуда следи да $w(a) \mid k$ и $w(b) \mid k$, тј. $m \mid k$ и $n \mid k$.
Број l је најмањи заједнички садржалац бројева m и n, па дели сваки други број кога деле и m и n. Дакле, l дели k.

$\boxed{9}$ Ако су a и b елементи групе G за које је $ab = ba$ и чији су редови узајамно прости, доказати да је $w(ab) = w(a)w(b)$.

Да бисмо применили претходни задатак, треба проверити да ли важи да је

$$< a > \cap < b > = \{e\}.$$

Нека је c произвољан елемент из $< a > \cap < b >$.

Тада $c \in < a >$ и $c \in < b >$, па је подгрупа генерисана елементом c подгрупа цикличих група $< a >$ и $< b >$.

Према Лагранжевој теореми, ред подгрупе дели ред групе, па $| < c > |$ дели $| < a > |$ и $| < c > |$ дели $| < b > |$, тј. $w(c)$ дели $w(a)$ и $w(c)$ дели $w(b)$.

По претпоставци имамо да су $w(a)$ и $w(b)$ узајамно прости, па је $w(c) = 1$, тј. $c = e$.

За произвољне бројеве m и n важи да је

$$NZD(m,n) \cdot NZS(m,n) = m \cdot n.$$

Како је $NZD(w(a), w(b)) = 1$, имамо да је

$$NZS(w(a), w(b)) = w(a) \cdot w(b).$$

На основу претходног задатка следи да је

$$w(ab) = NZS(w(a), w(b)) = w(a) \cdot w(b).$$

$\boxed{10}$ Нека је $f : G_1 \to G_2$ хомоморфизам група и нека је $a \in G_1$ елемент коначног реда.

а) Доказати да $w(f(a))$ дели $w(a)$.

б) Ако је f изоморфизам, онда је $w(f(a)) = w(a)$.

а) Означимо неутрале група G_1 и G_2 редом са e и ε, а ред елемента a са k. Пошто је пресликавање f хомоморфизам, имамо да је

$$(f(a))^k = f(a) \cdot f(a) \cdots f(a) = f(a^k) = f(e) = \varepsilon.$$

Из $(f(a))^k = \varepsilon$ следи да $w(f(a)) \mid k$.

б) Треба показати још да $w(a) \mid w(f(a))$.

Како је f мономорфизам, f има тривијално језгро.

Језгро хомоморфизма $Kerf = \{x \in G_1 \mid f(x) = \varepsilon\}$ је једна подгрупа групе G_1.

Пресликавање f је мономорфизам акко $Kerf = \{e\}$.

Како је $\varepsilon = (f(a))^{w(f(a))} = f(a^{w(f(a))})$, имамо да $a^{w(f(a))} \in Kerf$, па је $a^{w(f(a))} = e$.

Отуда, на основу првог задатка, следи да $w(a) \mid w(f(a))$.

$\boxed{11}$ Ако је цео број k узајамно прост са редом n елемента a у групи G, тада једначина $x^k = a$ има бар једно решење у групи G.

Како је $w(a) = n$, важи да је $a^n = e$.

Пошто је $NZD(k, n) = 1$, на основу Безуове релације постоје цели бројеви p и q такви да је $pk + qn = 1$.

Отуда је $a = a^1 = a^{pk+qn} = (a^p)^k \cdot (a^n)^q = (a^p)^k \cdot e^q = (a^p)^k$.

Једначина $x^k = a$ има решење $x = a^p$ јер је $(a^p)^k = a$.

$\boxed{12}$ Ако у групи G постоји тачно један елемент a реда 2, доказати да са свако $x \in G$ важи да је $ax = xa$.

Треба доказати да је $ax = xa$, за све $x \in G$, тј. да је $x^{-1}ax = a$, за све $x \in G$.

Нека је x произвољан елемент групе G. Означимо $b = x^{-1}ax$.

Тада је $b^2 = (x^{-1}ax)(x^{-1}ax) = x^{-1}a(xx^{-1})ax = x^{-1}a^2x = x^{-1}ex = e$.

Елемент b је или реда 2 или је $b = e$. У другом случају би имали да је $x^{-1}ax = e$, односно да је $a = e$ што је супротно претпоставци да је a елемент реда 2. Дакле, b је елемент реда 2, а како је елемент a једини са том особином, закључујемо да је $b = a$.

$\boxed{13}$ Нека је $G = GL(2, \mathbb{Q})$.

Наћи редове елемената $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ и AB.

$$A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^4 = E \quad \Rightarrow w(A) = 4$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B^3 = E \quad \Rightarrow w(B) = 3$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (AB)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{итд.}$$

Индукцијом се може показати да је $(AB)^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \neq E$, за свако $n \in \mathbb{N}$, па је елемент AB бесконачог реда.