Linearna algebra i analitička geometrija, smer Informatika,
dopuna postojećim listama pitanja, za grupe 1i1a i 1i1b,
februar 2008.

Dokazi koje bi trebalo naučiti za završni ispit

1. Opisati skup rešenja homogenog sistema linearnih jednačina.

Upustvo: Dokazati da je skup rešenja homogenog sistema $A \cdot X = 0$ vektorski potprostor, $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Gde? Odrediti dimenziju tog vektorskog prostora u zavisnosti od A. Obrazložiti!

2. Opisati skup rešenja sistema linearnih jednačina.

Upustvo: Dokazati da je skup rešenja linearnog sistema $A \cdot X = B$ prazan skup ili afini potprostor, $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Gde? Odrediti dimenziju tog afinog prostora u zavisnosti od A. Obrazložiti!

3. Napisati Grassmann-ovu formulu, a zatim je dokazati.

Upustvo: Navesti kako glasi tvrđenje o produženju linearno nezavisnog skupa do baze. Zatim dokazati da je $B \cup B_U \cup B_V$ baza za $U + V$, uz pogodno izabrane B, B_U, B_V tim redom. Pazite na redosled koraka! Razmislite zašto je to bitno? Lepo obrazložiti sve korake u dokazu!

4. Slika i jezgro linearnog preslikavanja (definicije i osnovna svojstva).

Upustvo: Navesti definicije, dokazati da su potprostori (gde?), dokazati stavove koji injektivnost („1-1”) i surjektivnost („na”) linearnog preslikavanja opisuju preko osobina jezgra i slike.

5. Teorema o rangu i defektu linearnog operatora.

Upustvo: Navesti definicije ranga i defekta, napisati tvrđenje teoreme, a zatim je dokazati. Pazite da bazu jezgra dopunite do baze za ... (šta?). Onda dokažite da slike dopune čine ???? za sliku.

6. Koordinate vektora u datoj bazi. Matrica prelaska i veza između koordinata u raznim bazama.

Upustvo: Navesti definiciju koordinata vektora i definiciju matrice prelaska sa jedne baze na drugu, a zatim izvesti vezu između koordinata u raznim bazama. Definisati inverzibilne matrice i opisati njihovu vezu sa ovim pitanjem.

7. Matrica linearnog preslikavanja. Izvesti vezu između matrica linearnog preslikavanja u raznim bazama.

Upustvo: Navesti još i definiciju ekvivalentnosti i sličnosti matrica.

8. Izomorfizam vektorskih prostora $\mathrm{Hom}(U, V)$ i $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ (prostora linearnih preslikavanja i prostora matrica odgovarajućeg formata).

Upustvo: Navesti definicije operacija u $\mathrm{Hom}(U, V)$ i definiciju izomorfizma, a zatim dati ideju dokaza. Obavezno definisati preslikavanje iz jednog prostora u drugi koje ostvaruje izomorfizam, kao i njemu inverzno iz drugog u prvi. Napisati šta bi trebalo proveriti da bi dokaz bio kompletan.

9. Dokazati osnovne osobine determinante.

Upustvo: Determinantu definisati kao alternirajuću sumu po svim elementima simetrične grupe. Dokazati da je determinanta nepromenljiva u odnosu na transponovanje, linearnost (aditivnost i homogenost) po svakoj vrsti, da je alternirajuća*, kako se ponaša u odnosu na EET vrsta.

10. Dokazati formulu za Laplace-ov razvoj determinante (po nekoj vrsti).

Upustvo: Koristiti osobine determinante.

11. Dokazati da je matrica $A \in M_n(\mathbb{R})$ regularna (inverzibilna) ako i samo ako je $\det A \neq 0$.

Upustvo: Sleva udesno koristiti definiciju inverzibilnosti i Binet-Cauchy-jevu teoremu. Sdesna ulevo koristiti adjungovanu matricu, Laplace-ov razvoj i osobine determinante.

12. Dokazati Cauchy-Schwartz-ovu nejednakost.

Upustvo: Posmatrati, za $y \neq 0$, kvadratni trinom po a:$(x - ay) \circ (x - ay)$ koji je uvek ≥ 0. Analizom diskriminante dobijamo da je proizvod normi veći od skalarnog proizvoda vektora x i y.

13. Gram-Schmidt-ov postupak ortogonalizacije.

Upustvo: Opisati postupak i dokazati da se tako dobija ortonormirana baza.

14. Dokazati da je matrica simetričnog operatora e.v.p. u o.n. bazi simetrična.

Upustvo: Koristiti definiciju simetričnih operatora i formulu za računanje skalarnog proizvoda preko koordinata u o.n. bazi.

15. Dokazati da su nule karakterističnog polinoma simetrične matrice realne.

Upustvo: Poći od jednakosti $AX = \alpha X$, gde je $X \neq 0$ ...(šta?). Transponovanjem, pa konjugovanjem dobijamo još jednu jednakost. Kombinovanjem ove dve jednakosti i pretpostvake da je A simetrična dobijamo da je α jednako svom konjugatu.

16. Dokazati da su sopstveni vektori simetričnog operatora koji odgovaraju različitim sopstvenim vrednostima međusobno ortogonalni.

Upustvo: Koristiti definicije.

17. Opisati sve ortogonalne matrice reda 2.

Upustvo: Koristiti osobine ortogonalnih matrica ili izračunati po definiciji.

18. Dokazati da je matrica ortogonalnog operatora e.v.p. u o.n. bazi ortogonalna.

Upustvo: Koristiti definiciju ortogonalnih operatora i formulu za računanje skalarnog proizvoda preko koordinata u o.n. bazi.

19. Dokazati da su nule karakterističnog polinoma ortogonalne matrice po modulu jednake 1.

Upustvo: Poći od jednakosti $AZ = \alpha Z$, gde je $Z \neq 0$ ...(šta?). Transponovanjem, pa konjugovanjem dobijamo još jednu jednakost. Kombinovanjem ove dve jednakosti i pretpostvake da je A ortogonalna dobijamo čemu je jednaka apsolutna vrednost (moduo) od α.

20. **Napomena:** Kao što je u podnaslovu napisano, ovo je samo dopuna postojećim pitanjima kojom se precizira koji dokazi i izvođenja će se tražiti na teorijskom delu završnog ispita. Upustva su data da Vam pomognu, a ne da Vas zbune i nisu obavezujuća. Ako Vi na isptu umesto odgovora navedete dato upustvo, za to ćete dobiti 0 (nula) poena.

U Beogradu, 9. 2. 2008.

Dragana Todorić