База и димензија векторског простора

$\boxed{1}$ Нека је W потпростор простора $\mathbb{R}^5$ генерисан векторима

$$\begin{aligned} u_1 &= \ \ (1, -2, \ \ 1, \ \ 3, -1) \\ u_2 &= (-2, \ \ 4, -2, -6, \ \ 2) \\ u_3 &= \ \ (1, -3, \ \ 1, \ \ 2, \ \ 1) \\ u_4 &= \ \ (3, -7, \ \ 3, \ \ 8, -1). \end{aligned}$$

Одредити бар једну базу за W као и његову димензију.

Дате векторе запишемо по врстама матрице, коју затим сводимо на степанасти облик. Не-нула врсте степенасте матрице чине једну базу за W, а њихов број је dimW.

$$\begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -2 & -6 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -7 & 3 & 8 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{r} u_1 \\ u_2 + 2u_1 \\ u_3 - u_1 \\ u_4 - 3u_1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{array}{r} u_1 \\ u_2 + 2u_1 \\ u_3 - u_1 \\ u_4 - 3u_1 - u_3 + u_1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Једна база за W су не-нула врсте степенасте матрице, тј. вектори $(1, -2, 1, 3, -1)$ и $(0, -1, 0, -1, 2)$, а димензија је 2. Из друге врсте последње матрице можемо закључити да је $u_2 = -2u_1$, а и последње врсте да је $u_4 = 2u_1 + u_3$. Дакле, и вектори u_1 и u_3 такође формирају базу за W.

$\boxed{2}$ Нека је W потпростор простора $\mathbb{R}^5$ генерисан векторима

$$u_1 = (1, 1, \ \ 1, \ \ 2, \ 3)$$

$$u_2 = (1, 2, -1, -2, \ 1)$$

$$u_3 = (3, 5, -1, -2, \ 5)$$

$$u_4 = (1, 2, -1, -1, 4).$$

Наћи подскуп скупа вектора $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ који формира базу за W.

Од датог скупа вектора треба издвојити максималан линеарно независан подскуп. Векторе u_1, u_2, u_3, u_4 ћемо записати по колонама матрице коју ћемо елементарним трансформацијама врста свести на степенасту форму. Из почетног скупа вектора бришемо оне векторе којима одговарају колоне степенасте матрице без пивота.

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 5 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 3 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & -2 \\ 0 & -4 & -8 & -3 \\ 0 & -2 & -4 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 3 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 3 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Пивоти се налазе у првој, другој и четвртој колони, па вектори u_1, u_2 и u_4 формирају једну базу потпростора W.

$\boxed{3}$ Испитати да ли вектори

$$u_1 = (1, \ \ 1, 1)$$

$$u_2 = (1, \ \ 2, 3)$$

$$u_3 = (2, -1, 1)$$

чине базу векторског простора $\mathbb{R}^3$.

Пошто је простор $\mathbb{R}^3$ димензије 3, довољно је показати да су вектори u_1, u_2, u_3 линеарно независни.

$$\begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{r} u_1 \\ u_2 - u_1 \\ u_3 - 2u_1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{r} u_1 \\ u_2 - u_1 \\ u_3 - 2u_1 + 3(u_2 - u_1) \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Степенаста матрица нема нула врста, па су полазни вектори u_1, u_2, u_3 линеарно независни.

$\boxed{4}$ Нека је V векторски простор квадратних матрица реда 2×2 над пољем $\mathbb{R}$. Наћи базу и димензију потпростора W који је генерисан векторима

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Канонску базу за простор V чине вектори

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Преласком на координате вектора у односу на базу $E = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ добијамо векторе из $\mathbb{R}^4$

$$[A]_E = (1, -5, -4, \ 2)$$

$$[B]_E = (1, \ \ 1, -1, \ 5)$$

$$[C]_E = (2, -4, -5, \ 7)$$

$$[D]_E = (1, -7, -5, 1).$$

Издвојимо из овог скупа вектора максималан линеарно независан подскуп.

$$
\begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 & 1 \\ -5 & 1 & -4 & -7 \\ -4 & -1 & -5 & -5 \\ 2 & 5 & 7 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{6} & 6 & -2 \\ 0 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{6} & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

Пивоти се налазе у првој и другој колони, па прва два вектора A и B чине базу за W и $\mathrm{dimW} = 2$.

$\boxed{5}$ Наћи базу и димензију потпростора W векторског простора $P(t)$ генерисаног полиномима

$u = t^3 + 2t^2 - 2t + 1,$
$v = t^3 + 3t^2 - t + 4,$
$w = 2t^3 + t^2 - 7t - 7.$

Координате вектора u, v, w у канонској бази $e = \{t^3, t^2, t, 1\}$ простора полинома степена највише 3 су

$[u]_e = (1, 2, -2, \quad 1)$

$[v]_e = (1, 3, -1, \quad 4)$

$[w]_e = (2, 1, -7, -7).$

Формирамо од ових вектора матрицу ређајући их по врстама.

$$
\begin{array}{c} u \\ v \\ w \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -7 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{r} u \\ v-u \\ w-2u \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & -9 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{r} u \\ v-u \\ w-2u+3(v-u) \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

Из последње врсте степенасте матрице закључујемо да је $w = 5u - 3v$, па је једна база за потпростор W скуп $\{u, v\}$. Другу базу за W чине вектори $t^3 + 2t^2 - 2t + 1$ и $t^2 + t + 3$.

$\boxed{6}$ Нека је W векторски потпростор свих симетричних матрица реда 2×2 над пољем $\mathbb{R}$. Показати да је $\mathrm{dimW} = 3$.

$$W = \left\{ A \in M_2(\mathbb{R}) : A = A^T \right\}$$

Матрица $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ припада простору W ако и само ако је $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$, тј. ако и само ако је $b = c$.

Дакле, $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} : a, b, d \in \mathbb{R} \right\}$.

Свака матрица из простора W је облика

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$ тј.

линеарна је комбинација вектора

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ и } E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Одатле следи да је $W = \mathrm{Span}(\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \mathrm{E}_3)$, па су вектори E_1, E_2, E_3 генератриса за простор W. Лако се види да су они и линеарно независни, па чине једну базу за простор W који је онда димензије 3.

$\boxed{7}$ Нека су U и W потпростори векторског простора $\mathbb{R}^4$ дати са

$U = \left\{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : b - 2c + d = 0\right\}$ и

$W = \left\{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a = d, b = 2c\right\}$.

Наћи бар по једну базу за потпросторе U и W, као и за потпростор $U \cap W$.

$U = \left\{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : b = 2c - d\right\}$

$U = \{(a, 2c - d, c, d) : a, c, d \in \mathbb{R}\}$

Сваки вектор из U можемо написати у облику

$(a, 2c - d, c, d) = a(1, 0, 0, 0) + c(0, 2, 1, 0) + d(0, -1, 0, 1)$.

Дакле, простор U је генерисан векторима

$e_1 = (1, 0, 0, 0),\ e_2 = (0, 2, 1, 0)$ и $e_3 = (0, -1, 0, 1)$.

Вектори e_1, e_2, e_3 су и линеарно независни јер степенаста матрица формирана помоћу њих нема нула врста

$$\begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{c} e_1 \\ e_3 \\ e_2 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{r} e_1 \\ e_3 \\ e_2+2e_3 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Једна база за U је $\{e_1, e_2, e_3\}$ и $\mathrm{dimU} = 3$.

$W = \left\{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a = d, b = 2c\right\}$
$W = \{(d, 2c, c, d) : c, d \in \mathbb{R}\}$
Сваки вектор из W можемо написати у облику
$(d, 2c, c, d) = d(1, 0, 0, 1) + c(0, 2, 1, 0)$.
Дакле, простор W је генерисан векторима
$f_1 = (1, 0, 0, 1)$ и $f_2 = (0, 2, 1, 0)$.
Вектори f_1, f_2 су и линеарно независни јер степенаста матрица формирана помоћу њих нема нула врста

$$\begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Једну базу за W чине вектори f_1 и f_2, па је $\mathrm{dimW} = 2$.

$U \cap W = \left\{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : b = 2c - d, a = d, b = 2c\right\}$
$U \cap W = \left\{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a = d = 0, b = 2c\right\}$
$U \cap W = \{(0, 2c, c, 0) : c \in \mathbb{R}\} = \{c(0, 2, 1, 0) : c \in \mathbb{R}\}$
$U \cap W = \mathrm{Span}((0, 2, 1, 0))$
База за простор $U \cap W$ је $(0, 2, 1, 0)$, а $\mathrm{dim(U \cap W)} = 1$.

Ранг матрице

$\boxed{8}$ Наћи ранг матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 7 & -3 & 6 & 13 \end{bmatrix}$.

Ранг матрице је максималан број линеарно независних врста, односно колона матрице.

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 3 & -2 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 7 & -3 & 6 & 13 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \boxed{1} & 3 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 5 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 3 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \boxed{1} & 3 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрица A има 3 линеарно независне врсте, па је $\mathrm{rang(A)} = 3$.

Сума и директна сума потпростора

За потпросторе U и W векторског простора V, дефинишемо њихову суму са
$U + W = \{u + w \mid u \in U, w \in W\}$.
Векторски простор V је директна сума потпростора U и W, у ознаци $V = U \oplus W$, ако се сваки вектор $v \in V$ може на јединствен начин написати у облику
$v = u + w$, где је $u \in U$, $w \in W$.
$V = U \oplus W$ ако и само ако је $V = U + W$ и $U \cap W = \{0\}$.

$\boxed{9}$ Нека су U и W потпростори векторског простора $\mathbb{R}^3$ дати са
$U = \big\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a = b = c\big\}$ и
$W = \big\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a = 0\big\}$.
Показати да је $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$.

$U = \{(a, a, a) : a \in \mathbb{R}\}$ и
$W = \{(0, b, c) : b, c \in \mathbb{R}\}$
Произвољан вектор $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ можемо представити као збир једног вектора из U и једног вектора из W
$(a, b, c) = (a, a, a) + (0, b - a, c - a)$.
Дакле, $\mathbb{R}^3 = U + W$.
Како је ово представљање јединствено, сума је и директна.
У то се можемо уверити и ако проверимо да је
$U \cap W = \{0\}$.
Нека је $v = (a, b, c) \in U \cap W$. Тада је $a = b = c$ и $a = 0$, па закључујемо да је $a = 0, b = 0, c = 0$, тј. да је $v = 0$.

$\boxed{10}$ Дати су потпростори U_1, U_2 и U_3 векторског простора $\mathbb{R}^3$
$U_1 = \Big\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a + b + c = 0\Big\}$,
$U_2 = \Big\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a = c\Big\}$ и
$U_3 = \Big\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a = 0, b = 0\Big\}$.
Показати да је:
а) $\mathbb{R}^3 = U_1 + U_2$,
б) $\mathbb{R}^3 = U_2 + U_3$,
в) $\mathbb{R}^3 = U_1 + U_3$.
Када је сума и директна?
$U_1 = \{(-b - c, b, c) : b, c \in \mathbb{R}\}$,
$U_2 = \{(c, b, c) : b, c \in \mathbb{R}\}$ и
$U_3 = \{(0, 0, c) : c \in \mathbb{R}\}$.
а) Произвољан вектор $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ можемо представити као збир једног вектора из U_1 и једног вектора из U_2
$(a, b, c) = (a, -a - c, c) + (0, a + b + c, 0)$.
Дакле, $\mathbb{R}^3 = U_1 + U_2$.
Међутим, ово представљање није јединствено. Вектор (a, b, c) можемо представити и на други начин као збир једног вектора из U_1 и једног вектора из U_2
$(a, b, c) = (a - c, -a + c, 0) + (c, a + b - c, c)$.
Сума дакле није директна.
То смо могли закључити и из чињенице да је
$U_1 \cap U_2 \neq \{0\}$.

$U_1 \cap U_2 = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a+b+c=0, a=c\}$, тј.
$U_1 \cap U_2 = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a=c, b=-2c\} = \{(c,-2c,c) : c \in \mathbb{R}\} \neq \{0\}$.

б) Произвољан вектор $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ можемо представити као збир једног вектора из U_2 и једног вектора из U_3
$(a,b,c) = (a,b,a) + (0,0,c-a)$.
Дакле, $\mathbb{R}^3 = U_2 + U_3$.
Како је ово представљање јединствено, сума је и директна.
У то се можемо уверити и ако проверимо да је
$U_2 \cap U_3 = \{0\}$.
Нека је $v = (a,b,c) \in U_2 \cap U_3$. Тада је $a = c$ и $a = b = 0$, па закључујемо да је $a = 0, b = 0, c = 0$, тј. да је $v = 0$.

в) Произвољан вектор $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ можемо представити као збир једног вектора из U_1 и једног вектора из U_3
$(a,b,c) = (a,b,-a-b) + (0,0,a+b+c)$.
Дакле, $\mathbb{R}^3 = U_1 + U_3$.
Како је ово представљање јединствено, сума је и директна.
У то се можемо уверити и ако проверимо да је
$U_1 \cap U_3 = \{0\}$.
Нека је $v = (a,b,c) \in U_1 \cap U_3$. Тада је $a+b+c=0$ и $a=b=0$, па закључујемо да је $a=0, b=0, c=0$, тј. да је $v=0$.

$\boxed{11}$ Нека је U потпростор од $\mathbb{R}^4$ генерисан векторима

$$u_1 = (1, 1, 0, \ -1)$$

$$u_2 = (1, 2, 3, \quad 0)$$

$$u_3 = (2, 3, 3, -1),$$

а W потпростор генерисан векторима

$$v_1 = (1, 2, 2, \ -2)$$

$$v_2 = (2, 3, 2, \ -3)$$

$$v_3 = (1, 3, 4, -3).$$

Одредити бар једну базу за потпросторе U, W, $U+W$ и $U \cap W$ као и њихове димензије.

$$\begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & -1 \end{bmatrix} \sim \quad \begin{array}{r} u_1 \\ u_2 - u_1 \\ u_3 - 2u_1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{array}{r} u_1 \\ u_2 - u_1 \\ u_3 - 2u_1 - u_2 + u_1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Последња врста степенасте матрице је нула, па су вектори u_1, u_2, u_3 линеарно зависни ($u_3 = u_1 + u_2$).
Једну базу за U чине не-нула врсте степенасте матрице $(1, 1, 0, -1)$ и $(0, 1, 3, 1)$. Друга база за U је $\{u_1, u_2\}$, а $\mathrm{dimU} = 2$.

$$\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 4 & -3 \end{bmatrix} \sim \quad \begin{array}{r} v_1 \\ v_2 - 2v_1 \\ v_3 - v_1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{array}{r} v_1 \\ v_2 - 2v_1 \\ v_3 - v_1 + v_2 - 2v_1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Последња врста степенасте матрице је нула, па су вектори v_1, v_2, v_3 линеарно зависни ($v_3 = 3v_1 - v_2$).
Једну базу за W чине не-нула врсте степенасте матрице $(1, 2, 2, -2)$ и $(0, -1, -2, 1)$. Друга база за W је $\{v_1, v_2\}$,а $\mathrm{dimW} = 2$.

Ако је $U = \mathrm{Span}(\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2)$ и $W = \mathrm{Span}(\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2)$, онда је
$U + W = \mathrm{Span}(\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2)$.

$$\begin{array}{r} u_1 \\ u_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 2 & -3 \end{bmatrix} \sim \quad \begin{array}{r} u_1 \\ u_2-u_1 \\ v_1-u_1 \\ v_2-2u_1 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{array}{r} u_1 \\ u_2-u_1 \\ v_1-u_1-u_2+u_1 \\ v_2-2u_1-u_2+u_1 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{r} u_1 \\ u_2-u_1 \\ v_1-u_2 \\ v_2-u_1-u_2-v_1+u_2 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Последња врста степенасте матрице је нула, па су вектори u_1, u_2, v_1, v_2 линеарно зависни ($v_2 = u_1 + v_1$).
Једну базу за $U + W$ чине не-нула врсте степенасте матрице $(1, 1, 0, -1)$, $(0, 1, 3, 1)$ и $(0, 0, -1, -2)$. Друга база за $U + W$ је $\{u_1, u_2, v_1\}$, а $\mathrm{dim(U + W) = 3}$.

На основу Грасманове формуле важи да је

$\mathrm{dim(U + W) = dimU + dimU - dim(U \cap W)}$,

па је $\mathrm{dim(U \cap W) = 1}$.

Нека је $v \in U \cap W$ произвољан елемент пресека.
Вектор v припада и простору $U = \mathrm{Span(u_1, u_2)}$ и простору $W = \mathrm{Span(v_1, v_2)}$, па је $v = \alpha u_1 + \beta u_2$ и $v = \gamma v_1 + \delta v_2$, за неке $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Отуда следи да је
$\alpha(1, 1, 0, -1) + \beta(1, 2, 3, 0) = \gamma(1, 2, 2, -2) + \delta(2, 3, 2, -3)$

$(\alpha, \alpha, 0, -\alpha) + (\beta, 2\beta, 3\beta, 0) = (\gamma, 2\gamma, 2\gamma, -2\gamma) + (2\delta, 3\delta, 2\delta, -3\delta)$

$(\alpha + \beta, \alpha + 2\beta, 3\beta, -\alpha) = (\gamma + 2\delta, 2\gamma + 3\delta, 2\gamma + 2\delta, -2\gamma - 3\delta)$.

Добијамо хомоген систем по непознатим $\alpha, \beta, \gamma, \delta$:

$$
\begin{array}{rcl}
\alpha + \beta - \gamma - 2\delta = 0 & & \alpha + \beta - \gamma - 2\delta = 0 & & \alpha + \beta - \gamma - 2\delta = 0 \\
\alpha + 2\beta - 2\gamma - 3\delta = 0 & \sim & \beta - \gamma - \delta = 0 & \sim & \beta - \gamma - \delta = 0 \\
3\beta - 2\gamma - 2\delta = 0 & & 3\beta - 2\gamma - 2\delta = 0 & & \gamma + \delta = 0 \\
-\alpha + \quad + 2\gamma + 3\delta = 0 & & \beta + \gamma + \delta = 0 & & 2\gamma + 2\delta = 0
\end{array}
$$

који има бесконачно много решења.
Једна променљива је слободна, нпр. $\delta = a$, $a \in \mathbb{R}$. Тада је $\gamma = -a$, $\beta = 0$, $\alpha = a$.
Вектор v из пресека потпростора $U \cap W$ је сада облика $v = a \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 = a \cdot u_1$, а са друге стране је $v = -a \cdot v_1 + a \cdot v_2 = a \cdot (v_2 - v_1)$.
Дакле, потпростор $U \cap W$ је генерисан вектором $u_1 = v_2 - v_1 = (1, 1, 0, -1)$.

$\boxed{12}$ Нека је U потпростор од $\mathbb{R}^4$ генерисан векторима

$$
\begin{aligned}
u_1 &= (1, 2, 0, -1) \\
u_2 &= (0, 3, 1, \ \ 2) \\
u_3 &= (-1, 1, 1, \ \ 3),
\end{aligned}
$$

а W потпростор генерисан векторима

$$
\begin{aligned}
v_1 &= (1, 1, 1, \ 1) \\
v_2 &= (0, 1, 1, \ 2) \\
v_3 &= (-1, 0, 0, 1).
\end{aligned}
$$

Одредити бар једну базу за потпросторе U, W, $U+W$ и $U \cap W$ као и њихове димензије.

$$
\begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array}
\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}
\sim
\begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 + u_1 \end{array}
\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}
\sim
$$

$$\begin{array}{r} u_1 \\ u_2 \\ u_3+u_1-u_2 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Последња врста степенасте матрице је нула, па су вектори u_1, u_2, u_3 линеарно зависни $(u_3 = u_2 - u_1)$.
Једну базу за U чине не-нула врсте степенасте матрице $(1,2,0,-1)$ и $(0,3,1,2)$. Друга база за U је $\{u_1, u_2\}$, а $\mathrm{dimU} = 2$.

$$\begin{array}{r} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{r} v_1 \\ v_2 \\ v_3+v_1 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{array}{r} v_1 \\ v_2 \\ v_3+v_1-v_2 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Последња врста степенасте матрице је нула, па су вектори v_1, v_2, v_3 линеарно зависни $(v_3 = v_2 - v_1)$.
Једну базу за W чине не-нула врсте степенасте матрице $(1,1,1,1)$ и $(0,1,1,2)$, а $\mathrm{dimW} = 2$.

Одредимо бар једну базу за простор $U + W = \mathrm{Span(u_1, u_2, v_1, v_2)}$.

$$\begin{array}{r} u_1 \\ u_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{r} u_1 \\ u_2 \\ v_1-u_1 \\ v_2 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{array}{r} u_1 \\ v_1-u_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \quad \begin{array}{r} u_1 \\ v_1-u_1 \\ 3v_1-3u_1+u_2 \\ v_1-u_1+v_2 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{r} u_1 \\ v_1-u_1 \\ v_1-u_1+v_2 \\ 3v_1-3u_1+u_2 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{array}{r} u_1 \\ v_1-u_1 \\ v_1-u_1+v_2 \\ 3v_1-3u_1+u_2-2(v_1-u_1+v_2) \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Последња врста степенасте матрице је нула, па су вектори u_1, u_2, v_1, v_2 линеарно зависни $(-u_1 + u_2 + v_1 - 2v_2 = 0)$.
Једну базу за $U + W$ чине не-нула врсте степенасте матрице $(1, 2, 0, -1)$, $(0, -1, 1, 2)$ и $(0, 0, 2, 4)$.

Друга база за $U + W$ је $\{u_1, u_2, v_1\}$, а $\dim(\mathrm{U} + \mathrm{W}) = 3$.

Потпростор $U \cap W$ је димензије 1 на основу Грасманове формуле, а базу чини вектор $-u_1 + u_2 = -v_1 + 2v_2$, тј. вектор $(-1, 1, 1, 3)$.