Uvod u matematičku logiku

13. čas: Logika prvog reda.

Osnovne teoreme (I)

- $\vdash (\forall x)\,\varphi \leftrightarrow (\forall y)\,\varphi[y/x]$ i $\vdash (\exists x)\,\varphi \leftrightarrow (\exists y)\,\varphi[y/x]$,
  gde je smena regularna i y nije slobodna u φ;
- $\vdash (\forall x)\,\varphi \leftrightarrow \varphi$ i $\vdash (\exists x)\,\varphi \leftrightarrow \varphi$,
  gde x nije slobodna u φ;
- $\vdash (\forall x)(\forall y)\,\varphi \leftrightarrow (\forall y)(\forall x)\,\varphi$ i $\vdash (\exists x)(\exists y)\,\varphi \leftrightarrow (\exists y)(\exists x)\,\varphi$;
- $\vdash (\exists x)(\forall y)\,\varphi \rightarrow (\forall y)(\exists x)\,\varphi$;
- $\vdash (\forall x)(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\forall x)\,\varphi \wedge (\forall x)\,\psi$ i
  $\vdash (\forall x)\,\varphi \vee (\forall x)\,\psi \rightarrow (\forall x)(\varphi \vee \psi)$;
- $\vdash (\exists x)(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\exists x)\,\varphi \vee (\exists x)\,\psi$ i
  $\vdash (\exists x)(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\exists x)\,\varphi \wedge (\exists x)\,\psi$;
- $\vdash (\forall x)\,\varphi \vee \psi \leftrightarrow (\forall x)(\varphi \vee \psi)$,
  gde x nije slobodna u ψ;
- $\vdash (\forall x)\,\varphi \vee (\forall x)\psi \leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(\varphi \vee \psi[y/x])$,
  gde y nije slobodna u φ i smena $\psi[y/x]$ je regularna;

Osnovne teoreme (II)

- $\vdash (\exists x)\, \varphi \wedge \psi \leftrightarrow (\exists x)(\varphi \wedge \psi)$,

  gde x nije slobodna u ψ;
- $\vdash (\exists x)\, \varphi \wedge (\exists x)\psi \leftrightarrow (\exists x)(\exists y)(\varphi \wedge \psi[y/x])$,

  gde y nije slobodna u φ i smena $\psi[y/x]$ je regularna;
- $\vdash (\forall x)\, \varphi \wedge \psi \leftrightarrow (\forall x)(\varphi \wedge \psi)$ i
  $\vdash (\exists x)\, \varphi \vee \psi \leftrightarrow (\exists x)(\varphi \vee \psi)$,

  gde x nije slovodna u φ.

Zadovoljivi i konzistentni skupovi

Definicija. Skup $\mathcal{L}$-rečenica Σ je:

- zadovoljiv ako ima model;
- konzistentan ako $\Sigma \nvdash \bot$.

Definicija. $\mathcal{L}$-rečenica φ je logička posledica od Σ, $\Sigma \models \varphi$, ako za sve $\mathcal{L}$-strukture $\mathcal{M}$ važi implikacija $\mathcal{M} \models \Sigma$ povlači $\mathcal{M} \models \varphi$.

Komentar. Σ je zadovoljiv akko $\Sigma \not\models \bot$.

Gedelova teorema potpunosti (I)

Teorema potpunosti (Gedel). Skup Σ je zadovoljiv akko je konzistentan.

$(\Rightarrow)$ je specijalan slučaj sledeće leme:

Lema. Neka je Σ skup formula i φ formula. Ako $\Sigma \vdash \varphi$, onda za sve $\mathcal{M}$ i v važi implikacija $(\mathcal{M}, v) \models \Sigma$ povlači $(\mathcal{M}, v) \models \varphi$.

Lema se dokazuje indukcijom po dužini sekventa $\Sigma \vdash \varphi$, slično teoremi saglasnosti u iskaznoj logici.

Dokaz $(\Leftarrow)$ je komplikovaniji.

Teorema (Levenhajm, Skolem, Tarski). Ako je $\mathcal{L}$ najviše prebrojiv jezik i Σ je konzistentan, onda Σ ima najviše prebrojiv model.

Gedelova teorema potpunosti (II)

Teorema potpunosti (Gedel). $\Sigma \vdash \varphi$ akko $\Sigma \models \varphi$.

Slaba teorema potpunosti. $\vdash \varphi$ akko $\models \varphi$.

Teorema kompaktnosti (Gedel, Malcev). Skup $\mathcal{L}$-rečenica Σ je zadovoljiv akko $(\forall \Sigma_0 \subseteq_{kon.} \Sigma)$ Σ_0 je zadovoljiv.

Tamo-amo argument

Teorema. Neka su $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ dva prebrojiva gusta linearna uređenja bez najmanjeg i najvećeg elementa, onda postoji strogo rastuća bijekcija $f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$.