Uvod u matematičku logiku

12. čas: Logika prvog reda.

Čisto predikatski jezici prvog reda

Definicija. Čisto predikatski jezik prvog reda $\mathcal{L}$ je bilo koji skup čije elemente nazivamo *relacijskim* simbolima. Svakom $R \in \mathcal{L}$ pridružen je broj $n_R \in \mathbb{N}^+$ – *arnost*, tj. *dužina* simbola R.

Strukture prvog reda jezika $\mathcal{L}$

Definicija. $\mathcal{L}$-strukturu $\mathcal{M} = (M, R^{\mathcal{M}})_{R\in\mathcal{L}}$ određena je sa:

- nepraznim skupov M – *univerzum* ili *domen* od $\mathcal{M}$;
- skupom $R^{\mathcal{M}} \subseteq M^{n_R}$ za svaki $R \in \mathcal{L}$.

$R^{\mathcal{M}}$ je *interpretacija* simbola R u strukturi $\mathcal{M}$. Primetimo da je $R^{\mathcal{M}}$ jedna n_R-arna relacija na skupu M. Umesto $(a_1, \dots, a_{n_R}) \in R^{\mathcal{M}}$ pišemo $R^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_{n_R})$, i umesto $(a_1, \dots, a_{n_R}) \notin R^{\mathcal{M}}$ pišemo $\neg R^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_{n_R})$.

Formule

$\mathcal{L}$-formule zapisujemo koristeći simbole jezika $\mathcal{L}$, simbole promenljivih $x, y, z, \ldots, x_0, x_1, x_2, \ldots$ (skup promenljivih obeležavamo sa Var), znak $=$, veznik $\rightarrow$, konstantu $\perp$, kvantifikator $\forall$ i pomoćne simbole zagrada i zapete.

Definicija

Skup $\mathcal{L}$-formula je najmanji skup $\mathcal{F}$ takav da:

- $\perp \in \mathcal{F}$;
- $x_1 = x_2$ pripada $\mathcal{F}$, gde $x_1, x_2 \in \mathrm{Var}$;
- $R(x_1, \ldots, x_{n_R}) \in \mathcal{F}$, gde $R \in \mathcal{R}$ i $x_1, \ldots, x_{n_R} \in \mathrm{Var}$;
- ako $\varphi, \psi \in \mathcal{F}$, onda $(\varphi \rightarrow \psi)$ pripada $\mathcal{F}$;
- ako $\varphi \in \mathcal{F}$ i $x \in \mathrm{Var}$, onda $(\forall x)\, \varphi$ pripada $\mathcal{F}$.

Za formule iz prve tri tačke kažemo da su *atomske*.

Formule

Skraćenice:

- $\top := \bot \to \bot$;
- $\neg\varphi := \varphi \to \bot$;
- $\varphi \lor \psi := \neg\varphi \to \psi$;
- $\varphi \land \psi := \neg(\varphi \to \neg\psi)$;
- $\varphi \leftrightarrow \psi := (\varphi \to \psi) \land (\psi \to \varphi)$;
- $(\exists x)\, \varphi := \neg(\forall x)\, \neg\varphi$;
- $x_1 \neq x_2 := \neg\ x_1 = x_2$;

Tačnost formule

Fiksirajmo $\mathcal{L}$-strukturu $\mathcal{M}$.

Valuacija u $\mathcal{M}$ je bilo koja funkcija $v : \mathrm{Var} \to M$.

Tačnost formule φ u valuaciji v, $\varphi^{\mathcal{M}}[v]$, definišemo rekurentno:

- $\varphi^{\mathcal{M}}[v] = \mathbf{n}$ ako je $\varphi = \bot$;
- $\varphi^{\mathcal{M}}[v] = \mathbf{t}$ akko $v(x_1) = v(x_2)$, ako je φ formula $x_1 = x_2$;
- $\varphi^{\mathcal{M}}[v] = \mathbf{t}$ akko $R^{\mathcal{M}}(v(x_1), \dots, v(x_{n_R}))$, ako je φ formula $R(x_1, \dots, x_{n_R})$;
- $\varphi^{\mathcal{M}}[v] = \mathbf{n}$ akko $\psi^{\mathcal{M}}[v] = \mathbf{t}$ i $\theta^{\mathcal{M}}[v] = \mathbf{n}$, ako je φ formula $\psi \to \theta$;
- $\varphi^{\mathcal{M}}[v] = \mathbf{t}$ akko $\psi^{\mathcal{M}}[v_{a/x}] = \mathbf{t}$ za sve $a \in M$, ako je φ formula $(\forall x)\,\psi$, gde:

Tačnost formule

valuacija $v_{a/x} : \mathrm{Var} \to M$ definisana je sa:

$$v_{a/x}(y) := \begin{cases} v(y) & \text{ako } y \neq x \\ a & \text{ako } y = x \end{cases}, \quad \text{za } y \in \mathrm{Var}\,.$$

Tačnost formule

Komentari

- Formule $\top$, $\neg\varphi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \leftrightarrow \psi$ imaju očekivane vrednosti.
- Ako je φ formula $(\exists x)\,\psi$, $\varphi^{\mathcal{M}}[v] = \mathbf{t}$ akko $\psi^{\mathcal{M}}[v_{a/x}] = \mathbf{t}$ za neko $a \in M$.

Definicija

Pišemo:

- $(\mathcal{M}, v) \models \varphi$ ako $\varphi^{\mathcal{M}}[v] = \mathbf{t}$; inače, $(\mathcal{M}, v) \not\models \varphi$;
- $\mathcal{M} \models \varphi$, $\mathcal{M}$ je *model* za φ, ako $(\mathcal{M}, v) \models \varphi$ za sve $v : \mathrm{Var} \to M$; inače, $\mathcal{M} \not\models \varphi$, $\mathcal{M}$ je *kontramodel* za φ;
- $\models \varphi$, φ je *valjana*, ako $\mathcal{M} \models \varphi$ za sve $\mathcal{M}$; inače, $\not\models \varphi$, φ nije valjana.

Slobodno i vezano pojavljivanje promenljive

Definicija. Pojavljivanje promenljive u formuli je *vezano* ako je pod dejstvom kvantifikatora; inače je *slobodno*. Primetimo da ista promenljiva može da ima i slobodna i vezana pojavljivanja.

Ako formula φ nema slobodna pojavljivanja promenljivih, kažemo da je φ *rečenica*.

Tvrđenje. Tačnost $\varphi^{\mathcal{M}}[v]$ zavisi samo od vrednosti valuacije v u promenljivama koje imaju slobodna pojavljivanja u formuli φ.

Specijalno, tačnost rečenice ne zavisi od valuacije (samo od strukture).

Intuitivnija notacija

Pišemo $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ ako su promenljive sa slobodnim pojavljivanjima u φ (neke od) $x_1, \ldots, x_n$.

Pišemo i:

- $\mathcal{M} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$ ako je $\varphi^{\mathcal{M}}[v] = \mathbf{t}$, gde je $v : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix}$;
- ako je $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = (\forall y)\ \psi(y, x_1, \ldots, x_n)$, onda je $\mathcal{M} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$ akko $\mathcal{M} \models \psi(b, a_1, \ldots, a_n)$ za sve $b \in M$;
- ako je $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = (\exists y)\ \psi(y, x_1, \ldots, x_n)$, onda je $\mathcal{M} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$ akko $\mathcal{M} \models \psi(b, a_1, \ldots, a_n)$ za neko $b \in M$.

Pravila PD

Pravila za univerzalni kvantifikator su:

$$\frac{(\forall x)\,\varphi}{\varphi[t/x]}\,I \quad \text{i} \quad \frac{\begin{array}{|l} \boxed{u} \qquad \text{nova promenljiva} \\ \quad\vdots \\ \varphi[u/x] \end{array}}{(\forall x)\,\varphi}\,G$$

Zovemo ih *instanciranje* i *generalizacija*.

U pravilu I zahtevamo da je y promenljiva takva da je smena $\varphi[y/x]$ regularna.

U pravilu G zahtevamo da je u nova (nekorišćena) promenljiva (primetimo da je tada smena $\varphi[u/x]$ regularna); dovoljno je da zahtevamo da je u promenljiva koja u dotadašnjem dokazu nema slobodna pojavljivanja i smena $\varphi[u/x]$ je regularna.

Pravila PD

Pravila za jednakost su:

$$\frac{}{x = x}\,r \quad \text{i} \quad \frac{x = y \quad \varphi[x/z]}{\varphi[y/z]}\,S$$

Zovemo ih *refleksivnost* jednakosti i *supstitucija*.

U pravilu r, x je proizvoljna promenljiva.

U pravilu S, zahtevamo da su y i z promenljive takve da su smene $\varphi[x/z]$ i $\varphi[y/z]$ regularne.

Izvedena pravila: jednakost, $\exists$ i DM

Simetričnost i tranzitivnost jednakosti:

$$\frac{x = y}{y = x}\,s \quad \text{i} \quad \frac{x = y \quad y = z}{x = z}\,t$$

Uvođenje i eliminacija egzistencijalnog kvantifikatora:

$$\frac{\varphi[y/x]}{(\exists x)\,\varphi}\,\exists_U \quad \text{i} \quad \frac{(\exists x)\,\varphi \quad (\forall x)(\varphi \to \psi)}{\psi}\,\exists_E$$

De Morganovi zakoni:

$$\frac{\neg(\forall x)\,\varphi}{(\exists x)\,\neg\varphi}\,DM \quad \frac{\neg(\exists x)\,\varphi}{(\forall x)\,\neg\varphi}\,DM \quad \frac{(\exists x)\,\neg\varphi}{\neg(\forall x)\,\varphi}\,DM \quad \frac{(\forall x)\,\neg\varphi}{\neg(\exists x)\,\varphi}\,DM$$