Uvod u matematičku logiku

10. čas: Kardinalnost.

Direktna i inverzna slika skupa

Definicija.

Neka je $f : A \to B$, $X \subseteq A$ i $Y \subseteq B$.

Direktna slika skupa X je:

$$f[X] = \{f(x) \mid x \in X\} \subseteq B.$$

Inverzna slika skupa Y je:

$$f^{-1}[Y] = \{x \in A \mid f(x) \in Y\}.$$

Monotonost direktne slike.

Ako je $X_1 \subseteq X_2$, onda je i $f[X_1] \subseteq f[X_2]$.

Knaster-Tarski teorema o fiksnoj tački

Teorema.

Neka je $f\colon \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ neopadajuća funkcija, tj. zadovoljava uslov:

$$X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow f(X_1) \subseteq f(X_2).$$

Tada postoji $S \subseteq A$ takav da je $f(S) = S$.

Kantor-Šreder-Bernštajnova teorema (KŠB teorema)

Teorema.

Ako postoje 1-1 funkcije $f : A \to B$ i $g : B \to A$, onda postoji i bijekcija $h : A \to B$.

Poređenje kardinalnosti

Definicija.

Skup A je jednake kardinalnosti kao i skup B, u oznaci $|A| = |B|$, ako postoji bijekcija $A \to B$.

Osobine.

$|A| = |A|$;

$|A| = |B| \Rightarrow |B| = |A|$;

$|A| = |B| \wedge |B| = |C| \Rightarrow |A| = |C|$.

Poređenje kardinalnosti

Definicija.

Skup A je manje ili jednake kardinalnosti od B, u oznaci $|A| \leqslant |B|$, ako postoji 1-1 funkcija $A \to B$.

Skup A je manje kardinalnosti od B, u oznaci $|A| < |B|$, ako je $|A| \leqslant |B|$ i $|A| \neq |B|$.

Osobine.

$|A| \leqslant |A|$;

$|A| \leqslant |B| \wedge |B| \leqslant |A| \Rightarrow |A| = |B|$;

$|A| \leqslant |B| \wedge |B| \leqslant |C| \Rightarrow |A| \leqslant |C|$.

Ako $A \subseteq B$, onda $|A| \leqslant |B|$.

Ako $|A| \leqslant |B|$, onda postoji $C \subseteq B$ tako da $|A| = |C|$.

Još neke osobine

Ako $|A| = |A'|$, $|B| = |B'|$ i $A \cap B = A' \cap B' = \emptyset$, onda $|A \cup B| = |A' \cup B'|$;

ako $|A| = |A'|$ i $|B| = |B'|$, onda $|A \times B| = |A' \times B'|$;

ako $|A| = |A'|$, onda $|\mathcal{P}(A)| = |\mathcal{P}(A')|$;

$|\mathcal{P}(A)| = |{}^{A}\{0, 1\}|$.

Kantorova teorema.

$|A| < |\mathcal{P}(A)|$.

Prebrojivi skupovi

Definicija. $|\mathbb{N}| =: \aleph_0$. Skup A je prebrojiv ako je $|A| = \aleph_0$.

Skup A je neprebrojiv ako nije konačan i nije prebrojiv.

Primeri.

- $\mathbb{N}^+$, $\mathbb{N} \setminus \{3, 6, 100\}$, $2\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ su prebrojivi;
- $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ je prebrojiv;
- $\mathbb{Q}$ je prebrojiv.

Skupovi moći kontinuuma

Definicija. $|\mathbb{R}| =: \mathfrak{c}$. Skup A je moći kontinuuma ako je $|A| = \mathfrak{c}$.

Primeri.

- svi intervali su moći kontinuuma;
- $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ je moći kontinuuma;
- $\mathbb{C}$ je moći kontinuuma;
- $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ je moći kontinuuma (specijalno, $\aleph_0 < \mathfrak{c}$).

Kantorov dijagonalni argument

Teorema. $(0,1)$ nije prebrojiv, pa $\aleph_0 < \mathfrak{c}$.

Zadatak. Neka je $A \subseteq \mathbb{R}$ prebrojiv skup. Dokazati da postoji $b \in \mathbb{R}$ tako da $A \cap (b + A) = \emptyset$.

Zadatak. Neka je $\mathcal{F}$ familija krugova u ravni takva da se nikoja dva kruga iz familije ne seku. Dokazati da je $\mathcal{F}$ najvišre prebrojiva.

Bernštajnova teorema o trihotomiji

Teorema.

Ako su A i B dva skupa, važi tačno jedno od $|A| < |B|$, $|A| = |B|$ i $|B| < |A|$.

Hauzdorfov princip maksimalnosti.

Svako uređenje ima maksimalan lanac (linearno uređeni podskup).