Uvod u matematičku logiku

9. čas: Funkcije.

Funkcionalne relacije

Definicija. Relacija $f \subseteq A \times B$ je *funkcionalna* ako:

$$(\forall a \in A, b_1, b_2 \in B)(a \; f \; b_1 \;\; \wedge \;\; a \; f \; b_2 \;\; \rightarrow \;\; b_1 = b_2),$$

tj. iz svakog elementa $a \in A$ izlazi najviše jedna f-strelica.

U slučaju da $f \subseteq A \times B$ jeste funkcionalna relacija, ako za $a \in A$ postoji jedinstveni element $b \in B$ takav da $a \; f \; b$, obeležavamo ga sa $b = f(a)$ – *slika* elementa a; u tom slučaju još pišemo i $f(a) \downarrow$.

Ako za $a \in A$ takav element ne postoji, pišemo $f(a) \uparrow$.

Domen funkcionalne relacije $f \subseteq A \times B$ je skup:

$$\mathrm{Dom}(f) = \{a \in A \mid f(a) \downarrow\},$$

a *slika* je skup:

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(a) \mid a \in \mathrm{Dom}(f)\}.$$

Primeri

Primer. Da li su relacije $f = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$, $g = \{(x^2, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$, $h = \{(x^2, x) \mid x \geqslant 0\}$ i $k = \{(x^2, x) \mid x \leqslant -2\}$ funkcionalne relacije na $\mathbb{R}$?

Komentar. Ako su $f \subseteq A \times B$ i $g \subseteq B \times C$ funkcionalne, onda je i $g \circ f \subseteq A \times C$ funkcionalna. Takođe, $g \circ f(a) \downarrow$ akko $f(a) \downarrow$ i $g(f(a)) \downarrow$, i važi $g \circ f(a) = g(f(a))$.

Funkcije

Definicija. *Funkcija iz A u B*, u oznaci $f\colon A \to B$, je relacija $f \subseteq A \times B$ za koju važi:

- f je funkcionalna relacija i • $\mathrm{Dom}(f) = A$,

tj. ako $(\forall a \in A)(\exists_1 b \in B)\ a\ f\ b$.

Skup A je *domen*, a B je *kodomen* funkcije f.

Funkcija $f\colon A \to B$ je *injekcija* ili *1-1* ako:

$$(\forall a_1, a_2 \in A)(a_1 \neq a_2 \to f(a_1) \neq f(a_2)) \quad \text{ili ekvivalentno:}$$

$$(\forall a_1, a_2 \in A)(f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2).$$

Funkcija $f\colon A \to B$ je *surjekcija* ili *na*, ako je $\mathrm{Im} = B$, tj. ako:

$$(\forall b \in B)(\exists a \in A)\ b = f(a).$$

Funkcija je *bijekcija* ako je 1-1 i na.

Primeri

Primer. Da li je funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ data sa $f(n) = n + (-1)^n$ 1-1 ili na?

Primer. Dati primer funkcije $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ koja je:

- 1-1, ali nije na;
- na, ali nije 1-1.

Tvrđenje. Ako $f : A \to B$ i $g : B \to C$, onda $g \circ f : A \to C$.

Osobine kompozicije

Tvrđenje. Neka $f : A \to B$ i $g : B \to C$. Tada:

- ako su f i g 1-1, onda je i $g \circ f$ 1-1;
- ako su f i g na, onda je i $g \circ f$ na;
- ako su f i g bijekcije, onda je i $g \circ f$ bijekcija;
- ako je $g \circ f$ 1-1, onda je i f 1-1;
- ako je $g \circ f$ na, onda je i g na.

Primer. Dati primer funkcija takvih da:

- $g \circ f$ je bijekcija, f nije na i g nije 1-1.

Inverzi

Tvrđenje. Neka $f: A \to B$.

- $f^{-1} \subseteq B \times A$ je funkcionalna akko f je 1-1;
- $f^{-1} : B \to A$ akko f je bijekcija.

Definicija. *Identiteta* na A je $\mathrm{id}_A : A \to A$ data sa $\mathrm{id}_A(a) = a$ – očigledno je bijekcija.

Definicija. Neka je $f: A \to B$. Funkcija $g: B \to A$ je:

- levi inverz od f ako $g \circ f = \mathrm{id}_A$;
- desni inverz od f ako $f \circ g = \mathrm{id}_B$;
- inverz ako je i levi i desni inverz.

Egzistencija inverza

Primer.

- Naći neki levi inverz funkcije $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ date da $f(m) = 2m$.
- Naći neki desni inverz funkcije $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ date sa $f(m) = \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$.

Teorema. Neka je $f\colon A \to B$.

- f ima levi inverz akko f je 1-1;
- f ima desni inverz akko f je na; (Aksioma izbora.)
- f ima inverz akko f je bijekcija. Inverz je jedinstven i zapravo jednak f^{-1}.