Uvod u matematičku logiku

8. čas: Ekvivalencije. Uređenja.

Ekvivalencija, klase, količnik, transverzale

Definicija. Relacija $\sim$ na skupu S je ekvivalencija ako zadovoljava (R), (S) i (T).

Definicija. Klasa elementa $a \in S$ je skup $[a]_\sim = \{x \in S \mid x \sim a\}$.

Definicija. Količnički skup je $S/_\sim = \{[a] \mid a \in S\}$.

Definicija. Transverzala je bilo koji skup $T \subseteq S$ koji iz svake klase sadrži tačno jedan element.

Primer. Opisati $[a]_{\equiv_m}$ i odrediti jednu transverzalu.

Primer. Na skupu $S = \{a, b, c, d, e, f\}$ data je ekvivalencija $\sim$. Poznato je $a \sim b$, $a \not\sim c$, $a \sim d$, $a \not\sim e$, $c \not\sim e$, $e \sim f$. Izračunati $\sim$, odrediti klase i sve transverzale.

Primeri

Dokazati da je relacija $\sim$ ekvivalencija, odrediti klase i transverzalu.

- Na $\mathbb{R}$, $\sim$ je data sa $x \sim y$ akko $y - x \in \mathbb{Z}$.
- Na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\sim$ je data sa $(x, y) \sim (x', y')$ akko $y = y'$.
- Na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\sim$ je data sa $(x, y) \sim (x', y')$ akko $x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$.
- Na $\mathbb{R}$, $\sim$ je data sa $x \sim y$ akko $y - x \in \mathbb{Q}$.

Aksioma izbora. Svaka ekvivalencija ima bar jednu transverzalu.

Vitalijev skup

- Neka je T transverzala relacije $\sim$ na $\mathbb{R}$ date sa $x \sim y$ akko $y - x \in \mathbb{Q}$. Možemo pretpostaviti $T \subseteq [0,1)$ zamenom T sa $\{t - \lfloor t \rfloor \mid t \in T\}$. Pretpostavimo $\mu(T) = \varepsilon$.

- Neka je $\mathbb{Q} \cap (-1,1) = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$, $T_i = a_i + T$ i $S = \bigcup_{i=0}^{\infty} T_i$.

Imamo $\mu(T_i) = \mu(T) = \varepsilon$. Imamo $T_i \cap T_j = \varnothing$, pa je

$$\mu(S) = \lim_{n\to\infty} \mu\Big(\bigcup_{i=0}^{n} T_i\Big) = \lim_{n\to\infty} (n+1)\varepsilon = \begin{cases} 0 & \text{ako } \varepsilon = 0 \\ \infty & \text{ako } \varepsilon > 0 \end{cases}.$$

- Primetimo $T_i \subseteq (-1,2)$, pa i $S \subseteq (-1,2)$, što znači da $\mu(S) \leqslant 3$, pa $\varepsilon \not> 0$.

- Primetimo $(0,1) \subseteq S$, što znači da $1 \leqslant \mu(S)$, pa $\varepsilon \neq 0$.

- Dakle, T ne može da ima meru.

Uređenja

Definicija. Relacija $\preccurlyeq$ na skupu S je (parcijalno) uređenje ako zadovoljava (R), (A) i (T):

- $(\forall x \in S)\ x \preccurlyeq x$;
- $(\forall x, y \in S)(x \preccurlyeq y \wedge y \preccurlyeq x \rightarrow x = y)$;
- $(\forall x, y, z \in S)(x \preccurlyeq y \wedge y \preccurlyeq z \rightarrow x \preccurlyeq z)$.

Relacija $\preccurlyeq$ je linearno uređenje ako dodatno važi i:

- $(\forall x, y \in S)(x \preccurlyeq y \vee y \preccurlyeq x)$. (L)

Primeri. $\preccurlyeq$ na $\mathbb{R}$, $\subseteq$ na $\mathcal{P}(S)$, $\mid$ na $\mathbb{N}$.

Definicija. Relacija $\prec$ na S je strogo uređenje ako zadovoljava (I) i (T) (ekvivalentno, (a) i (T)).

Primeri. $<$ na $\mathbb{R}$, $\subsetneq$ na $\mathcal{P}(S)$.

Najmanji i minimalni elementi

Veza između uređenja i strogog uređenja:

$$\preccurlyeq \ \rightsquigarrow \ \preccurlyeq \cap \Delta_S^c$$
$$\prec \cup \Delta_S \ \leftsquigarrow \ \prec$$

Definicija. Neka je $\preccurlyeq$ uređenje na S, $A \subseteq S$ i $a \in S$:

- a je najmanji element skupa A ako $a \in A$ i $(\forall x \in A)\ a \preccurlyeq x$;
- a je minimalni element skupa A ako $a \in A$ i $(\forall x \in A)\ x \nprec a$.

Dualno definišemo najveći i maksimalni element.

Tvrđenje. Ako je a najmanji element skupa A, on je jedini najmanji i jedini minimalni element skupa A.

Najmanji (najveći) element skupa A, ako postoji, obeležavamo sa $\min(A)$ ($\max(A)$).

Donje ograničenje i infimum

Definicija. Neka je $\preccurlyeq$ uređenje na S, $A \subseteq S$ i $a \in S$:

- a je donje ogrničenje skupa A ako $(\forall x \in A)\ a \preccurlyeq x$;
- a je infimum skupa A ako je a najveći element skupa donjih ograničenja od A.

Dualno definišemo gornje ograničenje i supremum.

Ako je A^- (A^+) skup donjih (gornjih) ograničenja skupa A, onda je $\inf(A) = \max(A^-)$ i $\sup(A) = \min(A^+)$.

Tvrđenje. Ako postoji $\min(A)$, onda $\inf(A) = \min(A)$. Ako $\inf(A) \in A$, onda $\min(A) = \inf(A)$.

Primeri. Na tabli...

Funkcionalne relacije

Definicija. Relacija $f \subseteq A \times B$ je *funkcionalna* ako:

$$(\forall a \in A, b_1, b_2 \in B)(a\ f\ b_1 \ \wedge \ a\ f\ b_2 \ \rightarrow \ b_1 = b_2),$$

tj. iz svakog elementa $a \in A$ izlazi najviše jedna f-strelica.

U slučaju da $f \subseteq A \times B$ jeste funkcionalna relacija, ako za $a \in A$ postoji jedinstveni element $b \in B$ takav da $a\ f\ b$, obeležavamo ga sa $b = f(a)$ – *slika* elementa a. Ako za $a \in A$ takav element ne postoji, pišemo $f(a) = \uparrow$.

Domen funkcionalne relacije $f \subseteq A \times B$ je skup:

$$\mathrm{Dom}(f) = \{a \in A \mid (\exists b \in B)\ b = f(a)\},$$

a *slika* je skup:

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(a) \mid a \in \mathrm{Dom}(f)\}.$$

Primeri

Primer. Da li su relacije $f = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$, $g = \{(x^2, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$, $h = \{(x^2, x) \mid x \geqslant 0\}$ i $k = \{(x^2, x) \mid x \leqslant -2\}$ funkcionalne relacije na $\mathbb{R}$?

Komentar. Ako su $f \subseteq A \times B$ i $g \subseteq B \times C$ funkcionalne, onda je i $g \circ f \subseteq A \times C$ funkcionalna. Takođe, $g \circ f(a)$ postoji akko postoje $f(a)$ i $g(f(a))$, i važi $g \circ f(a) = g(f(a))$.

Primeri. Konstruisati primere $f \subseteq A \times B$ i $g \subseteq B \times C$ takve da:

- $g \circ f$ i g jesu, ali f nije funkcionalna;
- $g \circ f$ i f jesu, ali g nije funkcionalna;
- $g \circ f$ jeste, ali f i g nisu funkcionalne.

Funkcije

Definicija. *Funkcija iz A u B*, u oznaci $f\colon A \to B$, je relacija $f \subseteq A \times B$ za koju važi:

- f je funkcionalna relacija i • $\mathrm{Dom}(f) = A$,

tj. ako $(\forall a \in A)(\exists_1 b \in B)\ a\ f\ b$.

Skup A je *domen*, a B je *kodomen* funkcije f.

Funkcija $f\colon A \to B$ je *injekcija* ili *1-1* ako:

$$(\forall a_1, a_2 \in A)(a_1 \neq a_2 \to f(a_1) \neq f(a_2)) \quad \text{ili ekvivalentno:}$$

$$(\forall a_1, a_2 \in A)(f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2).$$

Funkcija $f\colon A \to B$ je *surjekcija* ili *na*, ako je $\mathrm{Im} = B$, tj. ako:

$$(\forall b \in B)(\exists a \in A)\ b = f(a).$$

Funkcija je *bijekcija* ako je 1-1 i na.

Primeri

Primer. Da li je funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ data sa $f(n) = n + (-1)^n$ 1-1 ili na?

Primer. Dati primer funkcije $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ koja je:

- 1-1, ali nije na;
- na, ali nije 1-1.

Tvrđenje. Ako $f : A \to B$ i $g : B \to C$, onda $g \circ f : A \to C$.

Osobine kompozicije

Tvrđenje. Neka $f : A \to B$ i $g : B \to C$. Tada:

- ako su f i g 1-1, onda je i $g \circ f$ 1-1;
- ako su f i g na, onda je i $g \circ f$ na;
- ako su f i g bijekcije, onda je i $g \circ f$ bijekcija;
- ako je $g \circ f$ 1-1, onda je i f 1-1;
- ako je $g \circ f$ na, onda je i g na.

Primer. Dati primer funkcija takvih da:

- $g \circ f$ je bijekcija, f nije na i g nije 1-1.

Inverzi

Tvrđenje. Neka $f\colon A \to B$.

- $f^{-1} \subseteq B \times A$ je funkcionalna akko f je 1-1;
- $f^{-1} : B \to A$ akko f je bijekcija.

Definicija. *Identiteta* na A je $\mathrm{id}_A : A \to A$ data sa $\mathrm{id}_A(a) = a$ – očigledno je bijekcija.

Definicija. Neka je $f\colon A \to B$. Funkcija $g\colon B \to A$ je:

- levi inverz od f ako $g \circ f = \mathrm{id}_A$;
- desni inverz od f ako $f \circ g = \mathrm{id}_B$;
- inverz ako je i levi i desni inverz.

Egzistencija inverza

Primer.

- Naći neki levi inverz funkcije $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ date da $f(m) = 2m$.
- Naći neki desni inverz funkcije $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ date sa $f(m) = \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$.

Teorema. Neka je $f\colon A \to B$.

- f ima levi inverz akko f je 1-1;
- f ima desni inverz akko f je na; (Aksioma izbora.)
- f ima inverz akko f je bijekcija. Inverz je jedinstven i zapravo jednak f^{-1}.