

Uvod u matematičku logiku

7. čas: Binarne relacije.

Binarna relacija

Definicija. Binarna relacija između skupova A i B je bilo koji podskup $\rho \subseteq A \times B$.

Ako $(a, b) \in \rho$ pišemo $a \rho b$ („ a je u relaciji sa b ”); ako $(a, b) \notin \rho$ pišemo $a \not\rho b$ („ a nije u relaciji sa b ”).

Ako je $A = B$, za ρ kažemo da je relacija na A .

Relaciju $\rho \subseteq A \times B$ često skiciramo kao usmeren graf između skupova A i B u kome crtamo strelicu $a \rightarrow b$ između $a \in A$ i $b \in B$ akko $a \rho b$. U slučaju $A = B$, crtamo graf između elemenata skupa A .

Primer. Neka su $A = \{1, 2, 3, 4\}$ i $B = \{a, b, c\}$,
 $\rho = \{(1, b), (1, c), (2, b), (4, c)\}$ i $\sigma \subseteq A \times A$ data sa $x \sigma y$ akko $|x - y| \leq 1$. Skicirati relacije ρ i σ .

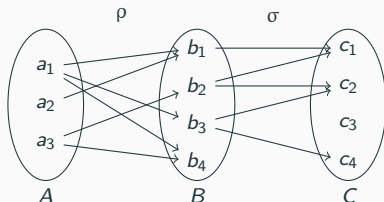
Operacije sa relacijama

Među relacijama između A i B prirodno su definisane operacija $\cap, \cup, \setminus, \Delta, ^c$ (komplement u odnosu $A \times B$).

Definicija. Inverz relacije $\rho \subseteq A \times B$ je relacija $\rho^{-1} \subseteq B \times A$ data sa $b \rho^{-1} a$ akko $a \rho b$.

Definicija. Kompozicija relacija $\rho \subseteq A \times B$ i $\sigma \subseteq B \times C$ je relacija $\sigma \circ \rho \subseteq A \times C$ data sa $a \sigma \circ \rho c$ akko $(\exists b \in B) (a \rho b \wedge b \sigma c)$.

Primer. Zapisati i skicirati ρ^{-1} i $\sigma \circ \rho$, gde:



Neka $\rho, \rho_1, \rho_2 \subseteq A \times B$, $\sigma \subseteq B \times C$, $\tau \subseteq C \times D$.

- Dokazati $(\sigma \circ \rho)^{-1} = \rho^{-1} \circ \sigma^{-1}$.
- Dokazati $\rho_1 \subseteq \rho_2$ povlači $\sigma \circ \rho_1 \subseteq \sigma \circ \rho_2$.
- U kom su odnosu $\sigma \circ (\rho_1 \cap \rho_2)$ i $(\sigma \circ \rho_1) \cap (\sigma \circ \rho_2)$?
- U kom su odnosu $\sigma \circ (\rho_1 \setminus \rho_2)$ i $(\sigma \circ \rho_1) \setminus (\sigma \circ \rho_2)$?
- U kom su odnosu $\tau \circ (\sigma \circ \rho)$ i $(\tau \circ \sigma) \circ \rho$?

Osobine binarne relacije na skupu S

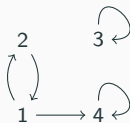
Neka je $\rho \subseteq S \times S$. Kažemo da je ρ :

- refleksivna ako $(\forall x \in S) x \rho x$; (R)
- irefleksivna ako $(\forall x \in S) x \not\rho x$; (I)
- simetrična ako $(\forall x, y \in S)(x \rho y \rightarrow y \rho x)$; (S)
- asimetrična ako $(\forall x, y \in S)(x \rho y \rightarrow y \not\rho x)$; (a)
- antisimetrična ako $(\forall x, y \in S)(x \rho y \wedge y \rho x \rightarrow x = y)$; (A)
- antisimetrična ako $(\forall x, y, z \in S)(x \rho y \wedge y \rho z \rightarrow x \rho z)$. (T)

Pitanje. Šta znači svaka od osobina na slici (grafu relacije)?

Pitanje. Koje osobine zadovoljavaju sledeće relacije na skupu $\{1, 2, 3, 4\}$:

- ρ data sa:



- σ data sa $x \sigma y$ akko $2x - y > 1$;
- τ data sa $x \tau y$ akko $|x - y| \leq 1$.

Na skupu $\{a, b, c\}$ konstruisati relaciju ρ tako da:

- zadovoljava (R) i (S), ali ne (T);
- zadovoljava (R) i (T), ali ne (S);
- zadovoljava (S) i (T), ali ne (R).

Definicija. Relacija \sim na skupu S je ekvivalencija ako zadovoljava (R), (S) i (T):

- $(\forall x \in S) x \sim x$;
- $(\forall x, y \in S)(x \sim y \rightarrow y \sim x)$;
- $(\forall x, y, z \in S)(x \sim y \wedge y \sim z \rightarrow x \sim z)$.

Primer. Za $m \in \mathbb{N}$, na \mathbb{Z} definišemo $x \equiv_m y$ akko $m \mid y - x$, tj. akko $(\exists k \in \mathbb{N}) y - x = km$. Dokazati \equiv_m je ekvivalencija. Šta su \equiv_0 i \equiv_1 .

Klasa, količnički skup, transverzala

Neka je \sim ekvivalencija na S .

Definicija. Klasa elementa $a \in S$ je skup:

$$[a]_{\sim} = \{x \in S \mid x \sim a\}.$$

Definicija. Količnički skup je:

$$S/\sim = \{[a] \mid a \in S\}.$$

Definicija. Transverzala je bilo koji skup $T \subseteq S$ koji iz svake klase sadrži tačno jedan element.

Primer. Opisati $[a]_{\equiv_m}$ i odrediti jednu transverzalu.

Primer. Na skupu $S = \{a, b, c, d, e, f\}$ data je ekvivalencija \sim .

Poznato je $a \sim b$, $a \not\sim c$, $a \sim d$, $a \not\sim e$, $c \not\sim e$, $e \sim f$. Izračunati \sim , odrediti klase i sve transverzale.

Tvrđenje.

- $a \in [a]$, pa specijalno $[a] \neq \emptyset$;
- $a \sim b$ akko $[a] = [b]$;
- $a \not\sim b$ akko $[a] \cap [b] = \emptyset$;
- $\bigcup S/\sim = S$.

Dokazati da je relacija \sim ekvivalencija, odrediti klase i transverzalu.

- Na \mathbb{R} , \sim je data sa $x \sim y$ akko $y - x \in \mathbb{Z}$.
- Na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, \sim je data sa $(x, y) \sim (x', y')$ akko $y = y'$.
- Na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, \sim je data sa $(x, y) \sim (x', y')$ akko $x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$.
- Na \mathbb{R} , \sim je data sa $x \sim y$ akko $y - x \in \mathbb{Q}$.

Aksioma izbora. Svaka ekvivalencija ima bar jednu transverzalu.