Uvod u matematičku logiku

6. čas: Skupovi.

Intuitivna definicija skupa

Definicija. Skup je celina koja okuplja određeni broj objekata koje nazivamo elementima tog skupa.

Činjenicu da je objekat x element skupa A zapisujemo sa $x \in A$ (čitamo „x je element od A" ili „x pripada A"); u suprotnom, ako $\neg(x \in A)$, pišemo $x \notin A$.

Dva skupa A i B su jednaka, $A = B$, ako imaju iste elemente, tj. važi iskaz:

$$(\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B).$$

Postoji (jedinstven) skup koji nema elemente, zovemo ga prazan skup i obeležavamo sa $\emptyset$.

Zapisi skupa

- $\{2, 3, 5, 9, 12\}$;
- $\{3, 4, 5, \ldots, 57\}$, $\{1, 3, 5, 7, \ldots, 101, 103\}$, $\{0, 1, 4, 9, 16, \ldots\}$, $\{\ldots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \ldots\}$;
- $\{x \colon p(x)\}$ ili $\{x \mid p(x)\}$ – skup svih elemenata (iz $\mathcal{U}_x$) za koje važi predikat p, npr.

$$\{n \in \mathbb{N} \colon 2 \mid n\};$$

- $\{f(x) \colon x \in S\}$ ili $\{f(x) \mid x \in S\}$ – skup elemenata izračunatih po pravilu $f(x)$ kad x prođe unapred zadat skup S, npr.

$$\{2n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Raselov paradoks. Ako je $S = \{X \mid X \notin X\}$, da li $S \in S$?

Podskup

Skup A je podskup skupa B, u oznaci $A \subseteq B$ (i još kažemo da je B nadskup skupa A), ako važi iskaz:

$$(\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B).$$

- $(\forall A)\ \emptyset \subseteq A$;
- $(\forall A)\ A \subseteq A$;
- $(\forall A, B, C)(A \subseteq B \wedge B \subseteq C \rightarrow A \subseteq C)$;
- $(\forall A, B)(A \subseteq B \wedge B \subseteq A \leftrightarrow A = B)$.

Presek i unija

- Presek skupova A i B je skup:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\},$$

tj. važi $(\forall x)(x \in A \cap B \leftrightarrow x \in A \wedge x \in B)$.

- Unija skupova A i B je skup:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\},$$

tj. važi $(\forall x)(x \in A \cup B \leftrightarrow x \in A \vee x \in B)$.

Razlika i simetrična razlika

- Razlika skupova A i B je skup:

$$A \smallsetminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\},$$

tj. važi $(\forall x)(x \in A \smallsetminus B \leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B)$.

- Simetrična razlika skupova A i B je skup:

$$A \triangle B = \{x \mid x \in A \veebar x \in B\},$$

tj. važi $(\forall x)(x \in A \triangle B \leftrightarrow x \in A \veebar x \in B)$.

Komentar. $A \triangle B = (A \smallsetminus B) \cup (B \smallsetminus A) = (A \cup B) \smallsetminus (A \cap B)$.

Komplement

Komplement skupa A je skup:

$$A^c = \{x \mid x \notin A\},$$

tj. važi $(\forall x)(x \in A^c \leftrightarrow x \notin A\}$.

Skupovni izrazi i iskazne formule

Neka je $\sigma = \sigma(A_1, A_2, \dots, A_k)$ skupovni izraz. Dodeljujemo mu iskaznu formulu $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}(p_1, p_2, \dots, p_k)$ na sledeći način:

- ako je $\sigma = A_i$, $\hat{\sigma} = p_i$;
- ako je σ oblika $\sigma_1 \cap \sigma_2$, $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}_1 \wedge \hat{\sigma}_2$;
- ako je σ oblika $\sigma_1 \cup \sigma_2$, $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}_1 \vee \hat{\sigma}_2$;
- ako je σ oblika $\sigma_1 \setminus \sigma_2$, $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}_1 \wedge \neg\hat{\sigma}_2$;
- ako je σ oblika $\sigma_1 \triangle \sigma_2$, $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}_1 \veebar \hat{\sigma}_2$;
- ako je σ oblika σ_1^c, $\hat{\sigma} = \neg\hat{\sigma}_1$.

Teorema

- Važi inkluzija $\sigma_1 \subseteq \sigma_2$ akko $\models \hat{\sigma}_1 \rightarrow \hat{\sigma}_2$;
- važi identitet $\sigma_1 = \sigma_2$ akko $\models \hat{\sigma}_1 \leftrightarrow \hat{\sigma}_2$.

Partitivni skup, presek i unija familije skupova

- Partitivni skup skupa A je skup:

$$\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\},$$

tj. važi $(\forall X)(X \in \mathcal{P}(A) \leftrightarrow X \subseteq A)$.

Neka je $\mathcal{F} = \{A_i \mid i \in I\}$ familija skupova:

- presek familije $\mathcal{F}$ je skup:

$$\bigcap \mathcal{F} = \bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid (\forall i \in I)\ x \in A_i\};$$

- unija familije $\mathcal{F}$ je skup:

$$\bigcup \mathcal{F} = \bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid (\exists i \in I)\ x \in A_i\}.$$

Komentar. $A \cup B = \bigcup \{A, B\}$.

Dekartov proizvod

Definicija. Uređeni par elemenata a i b je matematički objekat koji obeležavamo sa (a, b) i koji zadovoljava sledeću osobinu:

$$(a, b) = (a', b') \Leftrightarrow a = a' \wedge b = b'.$$

Za element a para (a, b) kažemo da je prva, a za element b da je druga koordinata para.

Slično definišemo i uređene n-torke.

Definicija. Dekartov proizvod skupova A i B je skup:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}.$$

Slično definišemo proizvod više skupova.