Uvod u matematičku logiku

5. čas: Teorema potpunosti.

Definicija. Formula φ je *logička posledica* skupa formula Σ, u oznaci $\Sigma \models \varphi$, ako za svaku valuaciju v važi imaplikacija $v \models \Sigma$ povlači $\hat{v}(\varphi) = \mathbf{t}$.

Primer

- $\emptyset \models \varphi$ akko $\models \varphi$.
- Σ je zadovoljiv akko $\Sigma \not\models \bot$.

Teorema saglasnosti

Ako $\Sigma \vdash \varphi$, onda $\Sigma \models \varphi$.

Definicija. Skup Σ je *konzistentan* ako $\Sigma \nvdash \bot$.

Posledica (Teorema saglasnosti)

Ako je skup Σ zadovoljiv, onda Σ je konzistentan.

Lema. $\varphi \to \psi, \neg\varphi \to \psi \vdash \psi$.

Lema. Ako $\Sigma \nvdash \varphi$ i $\psi \in \mathcal{F}$, onda $\Sigma, \psi \nvdash \varphi$ ili $\Sigma, \neg\psi \nvdash \varphi$.

Definicija. Skup formula Σ je *zatvoren za slova* ako za svako slovo $p \in \mathcal{P}$ važi $p \in \Sigma$ ili $\neg p \in \Sigma$.

Lindenbaumova teorema

Pretpostavimo $\mathcal{P} = \{p_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.[1]

Ako $\Sigma \nvdash \varphi$, onda postoji skup Σ^* takav da $\Sigma^* \supseteq \Sigma$, Σ^* je zatvoren za slova i $\Sigma^* \nvdash \varphi$.

[1] Ovo nije neophodan uslov. Za dokaz opšteg slučaja moramo da koristimo *aksiomu izbora*.

Teorema potpunosti

Definicija. Za formulu φ i valuaciju v definišemo:

$$\varphi^v := \begin{cases} \varphi & \text{ako } \hat{v}(\varphi) = \mathbf{t} \\ \neg\varphi & \text{ako } \hat{v}(\varphi) = \mathbf{n} \end{cases}.$$

Primetimo $\hat{v}(\varphi^v) = \mathbf{t}$.

Lema. $\varphi^v, \psi^v \vdash (\varphi \to \psi)^v$.

Lema. Ako je $\varphi = \varphi(p_1, \ldots, p_k)$, tada $p_1^v, \ldots, p_k^v \vdash \varphi^v$.

Teorema potpunosti

- $\Sigma \vdash \varphi$ akko $\Sigma \models \varphi$.
- Σ je zadovoljiv akko Σ je konzistentan.
- $\vdash \varphi$ akko $\models \varphi$.

Teorema kompaktnosti

Skup iskaznih formula Σ je zadovoljiv akko svaki konačan podskup od Σ je zadovoljiv.