Uvod u matematičku logiku

4. čas: Prirodna dedukcija.

Pravila prirodne dedukcije

$$\frac{\varphi}{\varphi}\,R \qquad \frac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}\,MP \qquad \frac{\begin{array}{|ll} \varphi & \text{pp} \\ \vdots & \\ \psi & \end{array}}{\varphi \to \psi}\,D \qquad \frac{\begin{array}{|ll} \neg\varphi & \text{pp} \\ \vdots & \\ \bot & \end{array}}{\varphi}\,RAA$$

Zovemo ih *reiteracija*, *modus ponens*, *pravilo dedukcije* i *reductio ad absurdum*.

Dokaz u prirodnoj dedukciji

Neka je Σ skup formula i φ jedna formula. *Dokaz u prirodnoj dedukciji* formule φ iz premisa Σ je konačan niz koraka u kome polazeći od premisa i prateći data pravila zaključivanja dolazimo do zaključka φ.

Primer

1. Iz premisa φ, $\varphi \to \psi$ i $\psi \to \theta$, možemo da zaključimo θ.
2. Iz premisa $\varphi \to \psi$ i $\psi \to \theta$, možemo da zaključimo $\varphi \to \theta$.
3. Bez premisa možemo da zaključimo $(\varphi \to (\psi \to \theta)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \theta))$.

Pišemo $\Sigma \vdash \varphi$ (Σ dokazuje φ, Σ izvodi φ, *sekvent* $\Sigma \vdash \varphi$ je tačan) ako postoji dokaz u prirodnoj dedukciji formule φ iz premisa Σ; u suprotnom $\Sigma \nvdash \varphi$.

Umesto $\emptyset \vdash \varphi$ pišemo samo $\vdash \varphi$ i kažemo da je φ *teorema*.

Izvedena pravila

Sekvent $\varphi \to \psi, \psi \to \theta \vdash \varphi \to \theta$ zapisujemo i sa:

$$\frac{\varphi \to \psi \quad \psi \to \theta}{\varphi \to \theta}\, HS$$

Možemo da ga koristimo kao izvedeno pravilo koje zovemo *hipotetički silogizam*.

Eliminacija i uvođenje negacije:

$$\frac{\varphi \quad \neg\varphi}{\bot}\, \neg_E \qquad \frac{\left|\begin{array}{ll} \varphi & \text{pp} \\ \vdots & \\ \bot & \end{array}\right.}{\neg\varphi}\, \neg_U$$

Ex falso quodlibet:

$$\frac{\bot}{\varphi}\, EFQ$$

Izvedena pravila

Eliminacija i uvođenje duple negacije:

$$\frac{\neg\neg\varphi}{\varphi}\neg\neg_E \quad \text{i} \quad \frac{\varphi}{\neg\neg\varphi}\neg\neg_U$$

Modus tollens i kontrapozicija:

$$\frac{\varphi \to \psi \quad \neg\psi}{\neg\varphi}MT \quad \frac{\varphi \to \psi}{\neg\psi \to \neg\varphi}K \quad \text{i} \quad \frac{\neg\varphi \to \neg\psi}{\psi \to \varphi}K$$

Uvođenje i eliminacija disjunkcije:

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi}\vee_U \quad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi}\vee_U \quad \text{i} \quad \frac{\varphi \vee \psi \quad \varphi \to \theta \quad \psi \to \theta}{\theta}\vee_E$$

Disjunktivni silogizmi:

$$\frac{\varphi \vee \psi \quad \neg\varphi}{\psi}DS \quad \text{i} \quad \frac{\varphi \vee \psi \quad \neg\psi}{\varphi}DS$$

Izvedena pravila

Tertium non datur – zakon isključenja trećeg:

$$\frac{}{\varphi \vee \neg\varphi}\,TND$$

Eliminacija i uvođenje konjunkcije:

$$\frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi} \wedge_E \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi} \wedge_E \qquad \text{i} \qquad \frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi} \wedge_U$$

Eliminacija i uvođenje ekvivalencije:

$$\frac{\varphi \leftrightarrow \psi}{\varphi \rightarrow \psi} \leftrightarrow_E \qquad \frac{\varphi \leftrightarrow \psi}{\psi \rightarrow \varphi} \leftrightarrow_E \qquad \text{i} \qquad \frac{\varphi \rightarrow \psi \quad \psi \rightarrow \varphi}{\varphi \leftrightarrow \psi} \leftrightarrow_U$$

De Morganova pravila:

$$\frac{\neg(\varphi \wedge \psi)}{\neg\varphi \vee \neg\psi}DM \quad \frac{\neg(\varphi \vee \psi)}{\neg\varphi \wedge \neg\psi}DM \quad \frac{\neg\varphi \vee \neg\psi}{\neg(\varphi \wedge \psi)}DM \quad \frac{\neg\varphi \wedge \neg\psi}{\neg(\varphi \vee \psi)}DM$$

Teorema dedukcije

Tvrđenje

Neka su Σ skup formula i φ, ψ dve formule. Tada:

$$\Sigma, \varphi \vdash \psi \quad \text{akko} \quad \Sigma \vdash \varphi \to \psi.$$

Logička posledica

Valuacija v *zadovoljava* skup formula Σ, u oznaci $v \models \Sigma$ ako za svaku formulu $\sigma \in \Sigma$ važi $\hat{v}(\sigma) = \mathbf{t}$.

Skup formula Σ je *zadovoljiv* ako postoji valuacija v takva da $v \models \Sigma$.

Formula φ je *logička posledica* skupa formula Σ, u oznaci $\Sigma \models \varphi$, ako za svaku valuaciju v važi imaplikacija $v \models \Sigma$ povlači $\hat{v}(\varphi) = \mathbf{t}$.

Primer

- $\emptyset \models \varphi$ akko $\models \varphi$.
- Σ je zadovoljiv akko $\Sigma \not\models \bot$.

Teorema saglasnosti

Ako $\Sigma \vdash \varphi$, onda $\Sigma \models \varphi$.

Skup Σ je *konzistentan* ako $\Sigma \nvdash \bot$.

Posledica (Teorema saglasnosti)

Ako je skup Σ zadovoljiv, onda Σ je konzistentan.