

Uvod u matematičku logiku

3. čas: Semantika iskazne logike.

Iskazne formule

Iskazne formule su konačni nizovi sledećih simbola:

- *iskaznih slova* koje obično zapisujemo malim latiničnim slovima p, q, r, \dots , moguće sa indeksima; skup iskaznih slova obeležavamo sa \mathcal{P} ;
- *logičke konstante* \perp (*kontradikcija*);
- *logičkog veznika* \rightarrow (*implikacija*);
- pomoćnih simbola zagrada.

Iskazne formule dobijamo primenom sledećih pravila u konačno mnogo koraka:

- svako iskazno slovo i konstanta \perp jesu iskazne formule;
- ako su φ i ψ (već izgrađene) iskazne formule, onda je i $(\varphi \rightarrow \psi)$ iskazna formula.

$\mathcal{P}(\varphi)$ = konačan skup slova koja se pojavljuju u φ ;

$sl(\varphi)$ = broj znakova \rightarrow u φ ;

\mathcal{F} = skup svih formula.

Zarad kraćeg zapisa iskaznih formula definišemo i sledeće skraćenice:

- formulu $(\varphi \rightarrow \perp)$ kraće zapisujemo sa $\neg\varphi$;
- formulu $(\neg\varphi \rightarrow \psi)$ ¹ kraće zapisujemo sa $(\varphi \vee \psi)$;
- formulu $\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)$ ² kraće zapisujemo sa $(\varphi \wedge \psi)$;
- formulu $((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi))$ ³ kraće zapisujemo sa $(\varphi \leftrightarrow \psi)$;
- formulu $\neg\perp$ ⁴ kraće zapisujemo sa \top .

¹tj. $((\varphi \rightarrow \perp) \rightarrow \psi)$

²tj. $((\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \perp)) \rightarrow \perp)$

³tj. $((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow \perp)) \rightarrow \perp)$

⁴tj. $(\perp \rightarrow \perp)$

Podrazumevamo da veznik \neg ima najviši prioritet, \vee i \wedge srednji preoritet, a \rightarrow i \leftrightarrow najniži prioritet, i u skladu sa tim brišemo višak zagrada.

$\neg p \vee q \rightarrow r \wedge \neg s$ je kraće zapisana formula
 $((\neg p) \vee q) \rightarrow (r \wedge (\neg s))$.

Tačnost formule

Valuacija je bilo koje dodeljivanje $v : \mathcal{P} \rightarrow \{\mathbf{t}, \mathbf{n}\}$ istinitosnih vrednosti iskaznim slovima.

Za fiksiranu valuaciju v određujemo istinitosnu vrednost svake formule φ pri valuaciji v , u oznaci $\hat{v}(\varphi)$, rekurento po izgradnji formule na sledeći način:

- $\hat{v}(\perp) = \mathbf{n}$;
- $\hat{v}(p) = v(p)$ za svako slovo $p \in \mathcal{P}$;
- $\hat{v}(\varphi \rightarrow \psi)$ računamo po tablici za implikaciju:

$\hat{v}(\varphi)$	$\hat{v}(\psi)$	$\hat{v}(\varphi \rightarrow \psi)$
t	t	t
t	n	n
n	t	t
n	n	t

Zadatak

U skladu sa datim definicijama, vrednosti $\hat{v}(\neg\varphi)$, $\hat{v}(\varphi \vee \psi)$, $\hat{v}(\varphi \wedge \psi)$ i $\hat{v}(\varphi \leftrightarrow \psi)$ računaju se po sledećim tablicama:

$\hat{v}(\varphi)$	$\hat{v}(\neg\varphi)$
t	n
n	t

i

$\hat{v}(\varphi)$	$\hat{v}(\psi)$	$\hat{v}(\varphi \vee \psi)$	$\hat{v}(\varphi \wedge \psi)$	$\hat{v}(\varphi \leftrightarrow \psi)$
t	t	t	t	t
t	n	t	n	n
n	t	t	n	n
n	n	n	n	t

Takođe, $\hat{v}(\top) = \mathbf{t}$, gde je v proizvoljna valuacija.

Teorema

Ako su p_1, \dots, p_k slova formule φ , i v, w dve valuacije takve da $v(p_i) = w(p_i)$ za sve $i = 1, \dots, k$, tada je $\hat{v}(\varphi) = \hat{w}(\varphi)$.

Smene u formuli

Zapisom $\varphi = \varphi(p_1, p_2, \dots, p_k)$ ističemo da su sva slova koja se pojavljuju u formuli φ neka (i možda ne sva) od p_1, p_2, \dots, p_k , tj. da je $\mathcal{P}(\varphi) \subseteq \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$.

(Npr. ako je φ formula $p \rightarrow q$, možemo da pišemo $\varphi = \varphi(p, q)$ ili $\varphi = \varphi(p, q, r)$, ali nećemo da pišemo $\varphi = \varphi(p)$ ili $\varphi = \varphi(q, r)$.)

Neka su $\varphi = \varphi(p_1, p_2, \dots, p_k)$, $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k$ formule.

Označavamo sa $\varphi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k)$ formulu φ u kojoj smo sva pojavljivanja slova p_i zamenili sa ψ_i za sve $i = 1, \dots, k$.

(Npr. ako je $\varphi = \varphi(p, q)$ formula $p \rightarrow q \wedge p$, onda je $\varphi(p \vee q, s \rightarrow r)$ formula $p \vee q \rightarrow (s \rightarrow r) \wedge (p \vee q)$.)

Lema

Neka su $\varphi = \varphi(p_1, p_2, \dots, p_k)$, $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k$ formule i v valuacija. Tada je:

$$\hat{v}(\varphi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k)) = \hat{w}(\varphi),$$

gde je w bilo koja valuacija takva da $w(p_i) = \hat{v}(\psi_i)$ za sve $i = 1, \dots, k$.

Tautologije

Formula φ je:

- *zadovoljiva* ako za neku valuaciju v važi $\hat{v}(\varphi) = \mathbf{t}$;
- *poreciva* ako za neku valuaciju v važi $\hat{v}(\varphi) = \mathbf{n}$;
- *tautologija*, u oznaci $\models \varphi$, ako za sve valuacije v važi $\hat{v}(\varphi) = \mathbf{t}$ (tj. nije poreciva);
- *kontradikcija* ako za sve valuacije v važi $\hat{v}(\varphi) = \mathbf{n}$ (tj. nije zadovoljiva).

Primer

1. Ispitati da li je formula $(p \wedge \neg r) \vee (q \wedge \neg r) \rightarrow (p \vee q \rightarrow r)$ zadovoljiva/poreciva?
2. Dokazati da je formula $(p \wedge (\neg q \rightarrow \neg p)) \wedge (\neg q \vee \neg r) \rightarrow (r \rightarrow \neg p)$ tautologija.

Važne tautologije

- $p \vee \neg p$;
- $\neg(p \wedge \neg p)$;
- $p \rightarrow p$;
- $\neg\neg p \leftrightarrow p$;
- $p \wedge p \leftrightarrow p$;
- $p \vee p \leftrightarrow p$;
- $p \wedge \top \leftrightarrow p$;
- $p \wedge \perp \leftrightarrow \perp$;
- $p \vee \top \leftrightarrow \top$;
- $p \vee \perp \leftrightarrow p$;
- $p \wedge (p \vee q) \leftrightarrow p$;
- $p \vee (p \wedge q) \leftrightarrow p$;
- $p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$;
- $p \vee q \leftrightarrow q \vee p$;
- $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (q \leftrightarrow p)$;

Važne tautologije

- $p \wedge (q \wedge r) \leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$;
- $p \vee (q \vee r) \leftrightarrow (p \vee q) \vee r$;
- $(p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)) \leftrightarrow ((p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r)$;
- $p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$;
- $p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$;
- $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$;
- $\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$;
- $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$;
- $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \wedge \neg q \rightarrow \perp)$;
- $p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q$;
- $(p \rightarrow q) \wedge \neg q \rightarrow \neg p$;
- $(p \vee q) \wedge \neg p \rightarrow q$;
- $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$.

Teorema

Neka su $\varphi = \varphi(p_1, \dots, p_k)$, ψ_1, \dots, ψ_k formule i neka je $i \models \varphi$.

Tada je $i \models \varphi(\psi_1, \dots, \psi_k)$.

Primer

Dokazati da je formula

$$(p \leftrightarrow q \vee r) \wedge ((p \leftrightarrow q \vee r) \rightarrow (q \vee r \rightarrow s)) \rightarrow (q \vee r \rightarrow s)$$

tautologija.

Ekvivalentne formule

Formule φ i ψ su *logički ekvivalentne*, u oznaci $\varphi \Leftrightarrow \psi$, ako za svaku valuaciju v važi $\hat{v}(\varphi) = \hat{v}(\psi)$, tj. ako je $\varphi \leftrightarrow \psi$ tautologija.

Teorema

Neka su $\varphi_1 = \varphi_1(p_1, \dots, p_n)$, $\varphi_2 = \varphi_2(p_1, \dots, p_n)$, ψ_1, \dots, ψ_n i $\theta_1, \dots, \theta_n$ formule takve da $\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2$ i $\psi_i \Leftrightarrow \theta_i$ za sve $i = 1, \dots, n$. Tada je

$$\varphi_1(\psi_1, \dots, \psi_n) \Leftrightarrow \varphi_2(\theta_1, \dots, \theta_n).$$

Primer

1. $(\neg p \vee q) \rightarrow (r \leftrightarrow s) \Leftrightarrow \neg(p \rightarrow q) \vee (s \leftrightarrow r)$;
2. $(\neg p \vee q) \wedge \neg(p \wedge \neg q) \Leftrightarrow p \rightarrow q$;
3. $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \Leftrightarrow (p \vee q \rightarrow r)$.