Uvod u matematičku logiku

2. čas: Strategije dokaza. Matematička indukcija.

Kako dokazujemo implikaciju

Postupak dedukcije

Ako želimo da dokažemo iskaz oblika $p \rightarrow q$, postupamo na sledeći način:

Dokazujemo $p \rightarrow q$ je tačan iskaz.

> Pretpostavimo da je p tačan.
>
> *Dokazujemo da je q tačan koristeći da je p tačan.*
>
> Dakle, q je tačan.

Dakle, $p \rightarrow q$ je tačan.

Kako dokazujemo implikaciju

Postupak dedukcije

Ako želimo da dokažemo iskaz oblika $p \to q$, postupamo na sledeći način:

Dokazujemo $p \to q$ je tačan iskaz.

> Pretpostavimo da je p tačan.
>
> *Dokazujemo da je q tačan koristeći da je p tačan.*
>
> Dakle, q je tačan.

Dakle, $p \to q$ je tačan.

Primeri

1. Neka $a, b \in \mathbb{R}$. Ako $0 < a < b$, onda $a^2 < b^2$.
2. Neka $a \in \mathbb{R}$. Ako $a = 2$, onda $a^2 - 3a + 2 = 0$.

Dokaz kontrapozicije

Implikacije $p \to q$ i $\neg q \to \neg p$ su ekvivalentne (imaju jednake tačnosti).

Dokaz kontrapozicije

Implikacije $p \to q$ i $\neg q \to \neg p$ su ekvivalentne (imaju jednake tačnosti).

Postupak dokaza kontrapozicije

Ako želimo da dokažemo iskaz oblika $p \to q$, možemo da dokažemo $\neg q \to \neg p$ postupkom dedukcije:

Dokazujemo $p \to q$ je tačan iskaz.

> Pretpostavimo da je q netačan.
>
> *Dokazujemo da je p netačan koristeći da je q netačan.*
>
> Dakle, p je netačan.

Dakle, $p \to q$ je tačan.

Dokaz kontrapozicije

Implikacije $p \to q$ i $\neg q \to \neg p$ su ekvivalentne (imaju jednake tačnosti).

Postupak dokaza kontrapozicije

Ako želimo da dokažemo iskaz oblika $p \to q$, možemo da dokažemo $\neg q \to \neg p$ postupkom dedukcije:

Dokazujemo $p \to q$ je tačan iskaz.

> Pretpostavimo da je q netačan.
>
> *Dokazujemo da je p netačan koristeći da je q netačan.*
>
> Dakle, p je netačan.

Dakle, $p \to q$ je tačan.

Primeri

1. Neka $a, b, c \in \mathbb{R}$ i $a > b$. Ako $ac \leqslant bc$, onda $c \leqslant 0$.
2. Neka $a \in \mathbb{R}$. Ako $a^2 - 3a + 2 = 0$, onda $a \neq 3$.

Reductio ad absurdum

Implikacije $p \to q$ i $(p \wedge \neg q) \to \perp$ su ekvivalentne (imaju jednake tačnosti).

Reductio ad absurdum

Implikacije $p \to q$ i $(p \land \neg q) \to \bot$ su ekvivalentne (imaju jednake tačnosti).

Postupak svođenja na protivrečnost

Ako želimo da dokažemo iskaz oblika $p \to q$, možemo da dokažemo $(p \land \neg q) \to \bot$ postupkom dedukcije:

Dokazujemo $p \to q$ je tačan iskaz.

> Pretpostavimo da je p tačan i q netačan.
>
> *Dokazujemo kontradikciju koristeći pretpostavke.*
>
> Kontradikcija.

Dakle, $p \to q$ je tačan.

Reductio ad absurdum

Implikacije $p \to q$ i $(p \wedge \neg q) \to \bot$ su ekvivalentne (imaju jednake tačnosti).

Postupak svođenja na protivrečnost

Ako želimo da dokažemo iskaz oblika $p \to q$, možemo da dokažemo $(p \wedge \neg q) \to \bot$ postupkom dedukcije:

Dokazujemo $p \to q$ je tačan iskaz.

> Pretpostavimo da je p tačan i q netačan.
>
> *Dokazujemo kontradikciju koristeći pretpostavke.*
>
> Kontradikcija.

Dakle, $p \to q$ je tačan.

Primer

Neka $a, b \in \mathbb{R}$. Ako $a^2 + b = 13$ i $b \neq 4$, onda $a \neq 3$.

Dokaz ekvivalencije

Formule $p \leftrightarrow q$ i $(p \to q) \wedge (q \to p)$ su ekvivalentne.

Postupak dokaza ekvivalencije

Ako dokazujemo $p \leftrightarrow q$, obično dokazujemo $p \to q$ i $q \to p$ nekim od prethodnih postupaka:

Dokazujemo $p \leftrightarrow q$ je tačan iskaz.

($\Rightarrow$) Dokazujemo $p \to q$.

($\Leftarrow$) Dokazujemo $q \to p$.

Dakle, $p \leftrightarrow q$ je tačan.

Dokaz ekvivalencije

Formule $p \leftrightarrow q$ i $(p \to q) \wedge (q \to p)$ su ekvivalentne.

Postupak dokaza ekvivalencije

Ako dokazujemo $p \leftrightarrow q$, obično dokazujemo $p \to q$ i $q \to p$ nekim od prethodnih postupaka:

Dokazujemo $p \leftrightarrow q$ je tačan iskaz.

($\Rightarrow$) Dokazujemo $p \to q$.

($\Leftarrow$) Dokazujemo $q \to p$.

Dakle, $p \leftrightarrow q$ je tačan.

Primer

Neka $n \in \mathbb{N}$. Broj n je paran akko n^2 je paran.

Dokaz univerzalnog iskaza

Postupak generalizacije

Ako želimo da dokažemo iskaz oblika $(\forall x)\, p(x)$ postupamo na sledeći način:

Dokazujemo $(\forall x)\, p(x)$ je tačan iskaz.

> Neka je x proizvoljan element (u $\mathcal{U}_x$).
>
> *Dokazujemo $p(x)$, bez pretpostavki o x.*
>
> Dakle, $p(x)$.

Kako je x bilo proizvoljno, $(\forall x)\, p(x)$ je tačan.

Dokaz univerzalnog iskaza

Postupak generalizacije

Ako želimo da dokažemo iskaz oblika $(\forall x)\, p(x)$ postupamo na sledeći način:

Dokazujemo $(\forall x)\, p(x)$ je tačan iskaz.

> Neka je x proizvoljan element (u $\mathcal{U}_x$).
>
> *Dokazujemo $p(x)$, bez pretpostavki o x.*
>
> Dakle, $p(x)$.

Kako je x bilo proizvoljno, $(\forall x)\, p(x)$ je tačan.

Primer

Za svaki neparan prirodan broj n važi $8 \mid n^2 - 1$.

Matematička indukcija

Skup prirodnih brojeva je $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Matematička indukcija

Skup prirodnih brojeva je $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Zapažanje

Ako je S neprazan podskup od $\mathbb{N}$, onda S ima najmanji element.

Matematička indukcija

Skup prirodnih brojeva je $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Zapažanje

Ako je S neprazan podskup od $\mathbb{N}$, onda S ima najmanji element.

Teorema (Princip matematičke indukcije)

Neka je $p(n)$, $\mathcal{U}_n = \mathbb{N}$, predikat. Ako su tačni iskazi:

(BI) $p(0)$ i

(IK) $(\forall n)(p(n) \to p(n+1))$,

onda je tačan iskaz $(\forall n)\, p(n)$.

Matematička indukcija

Skup prirodnih brojeva je $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Zapažanje

Ako je S neprazan podskup od $\mathbb{N}$, onda S ima najmanji element.

Teorema (Princip matematičke indukcije)

Neka je $p(n)$, $\mathcal{U}_n = \mathbb{N}$, predikat. Ako su tačni iskazi:

(BI) $p(0)$ i

(IK) $(\forall n)(p(n) \to p(n+1))$,

onda je tačan iskaz $(\forall n)\, p(n)$.

Primeri

1. Dokazati $3 \mid 7^n + 2$ za sve $n \in \mathbb{N}$.
2. Dokazati $2^n > n$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Teorema (Princip matematičke indukcije)

Neka je $p(n)$, $\mathcal{U}_n = \mathbb{N}$, predikat. Ako su tačni iskazi:

(BI) $p(n_0)$ i

(IK) $(\forall n \geqslant n_0)(p(n) \to p(n+1))$,

onda je tačan iskaz $(\forall n \geqslant n_0)\, p(n)$.

Teorema (Princip matematičke indukcije)

Neka je $p(n)$, $\mathcal{U}_n = \mathbb{N}$, predikat. Ako su tačni iskazi:

(BI) $p(n_0)$ i

(IK) $(\forall n \geqslant n_0)(p(n) \rightarrow p(n+1))$,

onda je tačan iskaz $(\forall n \geqslant n_0)\, p(n)$.

Primer

Dokazati $2^n > n^2$ za sve $n \geqslant 5$.

Princip potpune indukcije

Teorema (Princip potpune indukcije)

Neka je $p(n)$, $\mathcal{U}_n = \mathbb{N}$, predikat. Ako je tačan iskaz:

$$(\forall n)((\forall k < n)\, p(k) \rightarrow p(n)),$$

onda je tačan iskaz $(\forall n)\, p(n)$.

Princip potpune indukcije

Teorema (Princip potpune indukcije)

Neka je $p(n)$, $\mathcal{U}_n = \mathbb{N}$, predikat. Ako je tačan iskaz:

$$(\forall n)((\forall k < n)\, p(k) \rightarrow p(n)),$$

onda je tačan iskaz $(\forall n)\, p(n)$.

Primer

Niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definisan je sa $a_0 = 2$, $a_1 = 3$, $a_2 = 5$ i $a_{n+3} = 2a_{n+2} + a_{n+1} - 2a_n$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Dokazati $a_n = 2^n + 1$ za sve $n \in \mathbb{N}$.